

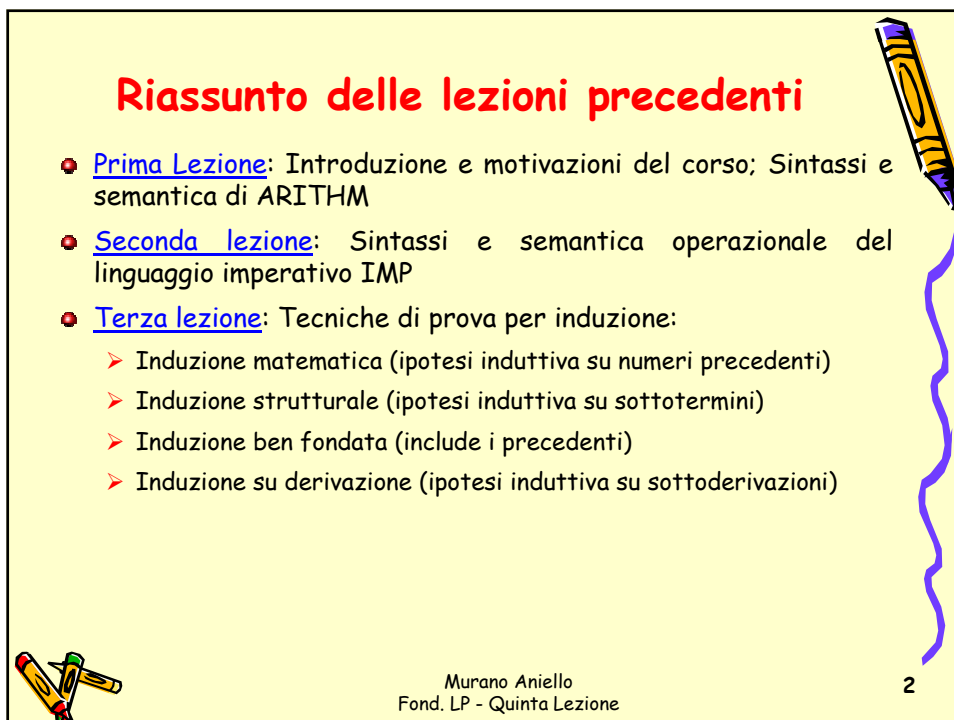


Fondamenti dei linguaggi di programmazione

Aniello Murano
Università degli Studi di Napoli
"Federico II"

Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

1



Riassunto delle lezioni precedenti

- Prima Lezione: Introduzione e motivazioni del corso; Sintassi e semantica di ARITHM
- Seconda lezione: Sintassi e semantica operativa del linguaggio imperativo IMP
- Terza lezione: Tecniche di prova per induzione:
 - Induzione matematica (ipotesi induttiva su numeri precedenti)
 - Induzione strutturale (ipotesi induttiva su sottotermini)
 - Induzione ben fondata (include i precedenti)
 - Induzione su derivazione (ipotesi induttiva su sottoderivazioni)

Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

2




Definizioni Induttive di Domini

Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

3

Introduzione

- In questo capitolo studieremo la teoria degli *insiemi definiti induttivamente*
- Un esempio di tale insieme è il linguaggio IMP definito induttivamente dalle regole sintattiche e semantiche introdotte nelle precedenti lezioni
- Questa teoria permette di provare proprietà degli insiemi in modo efficiente, utilizzando le regole che definiscono l'insieme (*induzione sulle regole*)
- Per esempio, è possibile dimostrare che un insieme definito induttivamente tramite regole è il **minimo insieme chiuso** rispetto alle regole date
- Dunque, l'induzione sulle regole è largamente utilizzata nella costruzione dei linguaggi (come vedremo per IMP) e se applicata alle regole semantiche del linguaggio permette di ragionare sulla sua semantica operativa.



Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

4

Definizione induttiva di insiemi

- Nelle lezioni precedenti abbiamo già visto insiemi definiti induttivamente (A_{exp} , \rightarrow_{Com} , ecc.). Queste definizioni includono regole sintattiche (grammatiche) per la definizione sintattica e regole semantiche per la definizione degli alberi di derivazione.
- Una **definizione induttiva** di un insieme è una collezione di regole che include assiomi e regole di inferenza. Un assioma x indica che x è un elemento dell'insieme per default. Una regola di inferenza $\{x_1, \dots, x_n\} / x$ mostra che x è un elemento dell'insieme se x_1, \dots, x_n lo sono
- Per esempio, l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è un insieme definito induttivamente, la cui definizione consiste nelle seguenti due regole

$$\frac{}{0} \qquad \frac{n}{succ(n)}$$

Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

5

Principio di induzione sulle regole descrizione informale

- Il principio di induzione sulle regole si basa sulla seguente idea

"se una **proprietà è preservata** nel passaggio **dalle premesse alle conclusioni** di tutte le regole utilizzate in una derivazione allora la proprietà vale anche per la conclusione della derivazione"

- Se questo è vero per tutte le regole, allora la proprietà è **vera per tutti gli elementi** dell'insieme definito dalle regole.

Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

6

Principio di induzione sulle regole

- Sia \mathcal{R} un insieme di regole (insieme di assiomi e regole di inferenza) e \mathcal{I} l'insieme delle istanze delle regole di \mathcal{R}
- Con $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ indichiamo l'insieme di tutti gli elementi x ottenuti da \mathcal{I} per cui esiste una derivazione consistente con \mathcal{R} .
- Formalmente $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = \{x \mid \Vdash_{\mathcal{R}} x\}$
- Per esempio, si consideri la seguente regola e una sua istanza

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \rightarrow n_0 \quad \langle a_1, \sigma \rangle \rightarrow n_1}{\langle a_0 \times a_1, \sigma \rangle \rightarrow n = n_0 \times n_1} \quad \frac{\langle 2, \sigma \rangle \rightarrow 3 \quad \langle 3, \sigma \rangle \rightarrow 4}{\langle 2 \times 3, \sigma \rangle \rightarrow 12 = 3 \times 4}$$

- $\langle 2 \times 3, \sigma \rangle \rightarrow 12$ non è un elemento di $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ perché l'istanza è corretta, ma non è derivabile con le regole di \mathcal{R}
- **Principio di induzione:** Sia P una proprietà, allora $\forall x \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}. P(x)$ sse per tutte le istanze di regole (X/y) in \mathcal{R} per le quali $X \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$
 $(\forall x \in X. P(x)) \Rightarrow P(y)$



Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

7

Definizione di insieme (R-)chiuso

- Un insieme Q è \mathcal{R} -chiuso rispetto alle istanze delle regole \mathcal{R} sse ogni volta che le premesse di una istanza di una regola appartengono a Q allora anche le conclusioni appartengono a Q .
- Formalmente: Q è \mathcal{R} -chiuso rispetto alle istanze delle regole \mathcal{R} sse per ogni istanza di regola (X/y) , si ha che $X \subseteq Q \Rightarrow y \in Q$

◆ Rules

$n \in \text{Aexp}$

$X \in \text{Aexp}$

$a_0 \in \text{Aexp}$

$a_1 \in \text{Aexp}$

$a_0 + a_1 \in \text{Aexp}$

◆ Rule instances (X/y) : set of premises/conclusion

$\emptyset/1 \quad \emptyset/2 \quad \emptyset/3 \quad \dots$

$\emptyset/x_1 \quad \emptyset/x_2 \quad \emptyset/x_3 \quad \dots$

$\{1\}/(1+1) \quad \{1, 2\}/(1+2) \quad \{1, 2\}/(2+1) \quad \dots$

$\{1, x_1\}/(1+x_1) \quad \{1, x_1\}/(x_1+1) \quad \{x_1, 2\}/(2+x_1) \quad \dots$

$\{x_1\}/(x_1+x_1) \quad \{x_1, x_2\}/(x_1+x_2) \quad \dots$

\dots



Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

8

Minimo insieme chiuso

- $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è il minimo insieme chiuso rispetto alle regole di \mathcal{R}
 - $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è chiuso
 - Se Q è un insieme \mathcal{R} -chiuso allora $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subseteq Q$

Dimostrazione

▷ $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è \mathcal{R} -chiuso

Sia $(X/y) \in \mathcal{R}$. Se $X \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ allora per definizione di $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ tutti gli elementi di X sono derivabili e possiamo costruire con (X/y) una derivazione per y . Quindi y è in $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$.

▷ $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è il più piccolo: se Q è \mathcal{R} -chiuso allora $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subseteq Q$.

Sia Q un insieme \mathcal{R} -chiuso. Se $y \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ allora deve esistere una derivazione $d \Vdash_{\mathcal{R}} y$. Dimostriamo, per induzione sulla derivazione d , che se $d \Vdash y$ e $y \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ allora $y \in Q$.

- I casi di base sono immediati perchè Q è \mathcal{R} -chiuso.

- Caso induttivo: siano $d_i \Vdash_{\mathcal{R}} x_i$, ($i = 1, \dots, n$) le derivazioni delle premesse di d . Per ipotesi induttiva $x_i \in Q$, ($i = 1, \dots, n$) e poichè Q è \mathcal{R} -chiuso deve essere $y \in Q$.

9

Induzione sulle regole

Dalla induzione sulle derivazioni possiamo derivare la seguente induzione sulle regole

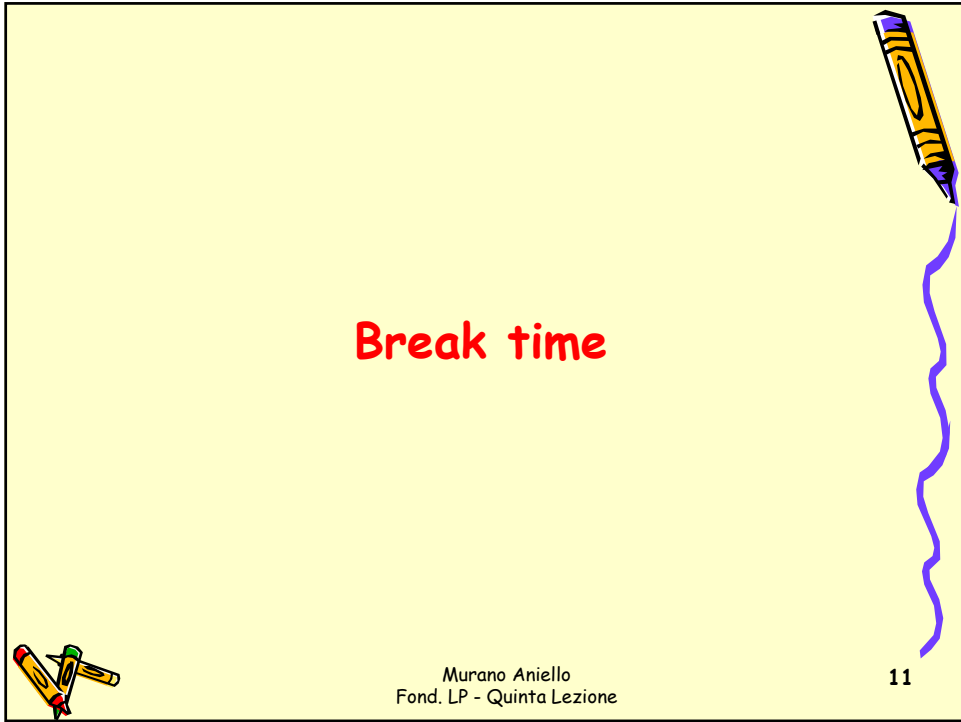
$$\frac{\forall (X/y) \in \mathcal{R}. (X \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}} \wedge \forall x \in X. P(x)) \implies P(y)}{\forall x \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}. P(x)}$$

Prova. Sia $Q = \{x \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}} \mid P(x)\}$. Per dimostrare che la proprietà P è vera per tutti gli elementi di $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è sufficiente dimostrare che $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subseteq Q$.

La premessa della regola dice che Q è \mathcal{R} -chiuso e, dato che $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è il più piccolo insieme \mathcal{R} -chiuso, questo implica proprio $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subseteq Q$.

- Notiamo che la premessa della regola è necessaria in quanto $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ è \mathcal{R} -chiuso.

10



Break time

Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

11



Punto fisso

Murano Aniello
Fond. LP - Quinta Lezione

12

Set Construction Operator

◆ Define an operator based on rule instances

$$R(B) = \{ y \mid \exists X \subseteq B. (X/y) \in R \}$$

– create set of conclusions where all the premises are in B

◆ Series

$$A_0 = \emptyset = R^0(\emptyset) \quad \text{empty set}$$

$$A_1 = R(A_0) = R^1(\emptyset) \quad \text{axioms}$$

$$A_2 = R(A_1) = R^2(\emptyset) \quad \text{derived from axioms in 1 step}$$

...

$$A_n = R(A_{n-1}) = R^n(\emptyset)$$



Example

◆ Operator

$$R(B) = N \cup \text{Loc} \cup \{ a_0 + a_1 \mid a_0, a_1 \in B \}$$

◆ Sets

$$A_0 = \emptyset$$

$$A_1 = R(A_0) = N \cup \text{Loc}$$

– numbers and locations

$$A_2 = R(A_1) = N \cup \text{Loc} \cup \{ a_0 + a_1 \mid a_0, a_1 \in A_1 \}$$

– numbers, locations and sum of any number or location

...

CO 386L, Fall 2004

Explicit Construction

◆ Inclusion

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

◆ Define limit

$$A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$$

- A is R-closed
- $R(A) = A$
- A is the least R-closed set

◆ Fixed-point of an operator

$$\text{fix}(R) = \bigcup_{n \in \omega} R^n(\emptyset)$$

CO 386L, Fall 2004

Summary

◆ Definitions are equivalent

- R-Closure
- Limit of repeated application of operator R
- Fixed-point of operator R

◆ Lets use them...

23

Inductive Syntax Definition

◆ Formal explanation of Aexp, Bexp, and Com

$$a \in \text{Aexp} ::= n \mid X \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 \times a_1$$

$$b \in \text{Bexp} ::= \text{true} \mid \text{false} \mid a_0 = a_1 \mid a_0 \leq a_1 \mid \neg b \mid b_0 \wedge b_1 \mid b_0 \vee b_1$$

$$c \in \text{Com} ::= \text{skip} \mid X := a \mid c_0 ; c_1 \mid \text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1 \mid \text{while } b \text{ do } c$$

◆ Interpret grammar as inference rules which generate the set

- Basis for structural induction



<h3 style="background-color: yellow; margin: 0;">Inductive Definition of Relations</h3> <p>◆ We have already seen one: \rightsquigarrow</p> $\frac{\langle n, \sigma \rangle \rightsquigarrow n \quad [Const]}{\langle X, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma(X) \quad [Loc]}$ $\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 - a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \quad [Sub]$ <p style="text-align: center; font-size: small;">where n is the result of subtracting a_2 from n_1</p> $\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \quad [Sum]$ <p style="text-align: center; font-size: small;">where n is the sum of n_1 and n_2</p> $\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 \times a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \quad [Prod]$ <p style="text-align: center; font-size: small;">where n is the product of n_1 and n_2</p> <p style="text-align: right; font-size: x-small;">CD 386L Fall 2004</p>	<h3 style="background-color: yellow; margin: 0;">Inductive Semantics of While</h3> $\frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow true \quad \langle c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma''} \quad \frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow false}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma}$ <p>◆ Convert rules to operator R_{\sim}</p> $R_{\sim}(S) = \{ \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma, \sigma \rangle \mid \langle b, \sigma, false \rangle \in \rightsquigarrow_{Bexp} \} \cup \{ \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma, \sigma'' \rangle \mid \langle b, \sigma, true \rangle \in \rightsquigarrow_{Bexp} \ \& \ \langle c, \sigma, \sigma' \rangle \in S \ \& \ \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma', \sigma'' \rangle \in S \}$ <p style="text-align: center; font-size: x-small;">CD 386L Fall 2004</p>
<h3 style="background-color: yellow; margin: 0;">Fixed-Point of R_{\sim}</h3> <p>◆ Equivalence $fix(R_{\sim}) = \rightsquigarrow$</p> <p>◆ We showed that evaluation is a <i>function</i></p> <p style="text-align: right;">27</p>	<h3 style="background-color: yellow; margin: 0;">Inductive Function Definitions</h3> <p>◆ Variables in an arithmetic expression</p> $\begin{aligned} Loc(n) &= \emptyset \\ Loc(X) &= \{ X \} \\ Loc(a_0 + a_1) &= Loc(a_0) \cup Loc(a_1) \\ Loc(a_0 - a_1) &= Loc(a_0) \cup Loc(a_1) \\ Loc(a_0 \times a_1) &= Loc(a_0) \cup Loc(a_1) \end{aligned}$ <p>◆ We are used to seeing programs of this form</p> <ul style="list-style-type: none"> • But normally a "definition" gives a convenient name to something that is previously known • But here the "thing being defined" is used in the definition • In what sense is this a definition? <p style="text-align: right;">15</p>



<h3 style="background-color: yellow; margin: 0;">Inductive Function Definitions</h3> <p>◆ Let Loc be the smallest binary relation closed under the following rules</p> $\frac{(n, \emptyset) \in Loc \quad \langle a_0, s_0 \rangle \in Loc \quad \langle a_1, s_1 \rangle \in Loc}{\langle a_0 + a_1, s_0 \cup s_1 \rangle \in Loc}$ $\frac{\langle a_0 - a_1, s_0 \cup s_1 \rangle \in Loc \quad \langle a_0 \times a_1, s_0 \cup s_1 \rangle \in Loc}{(X, \{ X \}) \in Loc}$ <p>◆ Loc is a relation. Is it a function?</p> <p style="text-align: right; font-size: x-small;">CD 386L Fall 2004</p>	<h3 style="background-color: yellow; margin: 0;">Inductive Function Definitions</h3> <p>◆ Variables in an arithmetic expression</p> $\begin{aligned} BadLoc(n) &= \emptyset \\ BadLoc(X) &= \{ X \} \\ BadLoc(a_0 + a_1) &= BadLoc(a_0) \cup BadLoc(a_1) \\ BadLoc(a_0 - a_1) &= BadLoc(a_0) \cup BadLoc(a_1) \\ BadLoc(a_0 \times a_1) &= BadLoc(a_0 \times (a_1 \times 1)) \end{aligned}$ <p>◆ Why is this a problem?</p> <ul style="list-style-type: none"> • How do you tell well-formed inductive definitions from ill-formed ones <p style="text-align: right; font-size: x-small;">CD 386L Fall 2004</p>
<h3 style="background-color: yellow; margin: 0;">Bad Rule</h3> $\frac{\langle a_0 \times (a_1 \times 1), s \rangle \in BadLoc}{\langle a_0 \times a_1, s \rangle \in BadLoc}$ <p>◆ Closure?</p> <ul style="list-style-type: none"> • The set $\{ (3 \times (2 \times 1), \emptyset), (3 \times 2, \emptyset) \}$ is R-closed • But so is $\{ (5 \times (3 \times 1), \emptyset), (5 \times 3, \emptyset) \}$ • The least set is degenerate <p>◆ Operator?</p> $R(B) = \{ \langle a_i \times a_i, s \rangle \mid \langle a_i \times (a_i \times 1), s \rangle \in B \}$ <p style="font-size: x-small;">- If this is the only rule for \times, then no terms involving \times will be included in $R^*(\emptyset)$ for any n</p> <p style="text-align: right;">31</p>	<p style="text-align: right;">16</p>

