FACSIMILE prova scritta intercorso 1 (per allenamento)

Laurea in Scienza e Ingegneria dei Materiali – anno accademico 2002-2003
Istituzioni di Fisica della Materia - Prof. Lorenzo Marrucci

Tempo a disposizione: 2 ore e 10 minuti
Uso degli appunti o di libri: NON AMMESSO
Uso della calcolatrice: consigliato ma non indispensabile

1) Un atomo di idrogeno (massa $m = 1.7 \times 10^{-27}$ kg) è legato ad una grossa molecola con un legame chimico che, per piccole elongazioni, si comporta come una molla di costante elastica $K = 272$ N/m. Il legame chimico è parzialmente ionico, per cui sull'atomo di idrogeno è presente una carica elettrica $q = 10^{-20}$ C. Determinate (a) il periodo delle piccole oscillazioni dell'atomo di idrogeno. Supponendo poi che le oscillazioni siano smorzate, con una perdita di energia dello 0.1% per ogni oscillazione, calcolate (b) il coefficiente β della forza d'attrito viscoso $\boldsymbol{F} = -\beta\mathbf{v}$ che, applicata all'atomo di idrogeno, produrrebbe tale attenuazione. Supponiamo infine che la molecola sia immersa in un'onda elettromagnetica armonica di intensità $I = 290$ kW/cm^2 e di frequenza pari alla frequenza naturale di oscillazione. Trascurando la forza magnetica generata dall'onda, calcolate (c) l'energia che la molecola assorbe dall'onda per unità di tempo. [punti: a = 6/10; b = 3/10; c = 1/10]

2) Un'onda armonica di frequenza $\nu = 0.5$ Hz e di ampiezza $A = 20$ cm viaggia sulla catena di pendoli di densità lineare di massa $\rho_l = 10$ kg/m e modulo elastico $K = 40$ N, lungo l'asse x nella direzione positiva. Calcolate: (a) la lunghezza d'onda; (b) la differenza di fase tra le oscillazioni armoniche di due pendoli che distano tra loro 5 m lungo l'asse x; (c) la potenza media necessaria a generare l'onda da un estremo della catena di pendoli. Se l'onda descritta viene in effetti generata solo per un tempo di mezz'ora, e l'accensione e lo spegnimento della sorgente sono approssimativamente istantanei, quale sarà (d) la larghezza di banda dell'onda in termini di frequenze spaziali e temporali? [punti: a = 5/10; b = 2/10; c = 2/10; d = 1/10]

3) Scrivete un saggio di mezza pagina (si accettano "sconfinamenti" solo per chi ha una calligrafia particolarmente larga) su uno dei seguenti due argomenti, a vostra scelta (ma NON ENTRAMBI*). [punti: 10]

    a. Il principio di sovrapposizione nella fisica delle oscillazioni e delle onde.
    b. Onde armoniche e loro importanza.

[costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 \approx 9$ pF/m, velocità della luce $c = 3 \times 10^8$ m/s]

* ovviamente per allenamento si consiglia di farli entrambi, ma tenete conto che in classe ne dovrete fare solo uno

Soluzioni degli esercizi 1 e 2

(Attenzione: non escludo che ci siano errori di calcolo nei valori numerici dei risultati)

Esercizio 1

Domanda (a)

Dato che la molecola è grossa la si può considerare come approssimativamente fissa (altrimenti sarebbe necessario introdurre la "massa ridotta"). L'atomo d'idrogeno quindi si comporta come un sistema massa-molla collegato ad un sostegno fisso. La frequenza angolare di oscillazione è quindi semplicemente

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{272}{1.7\times10^{-27}}}\ \text{rad/s} = \sqrt{16\times10^{28}}\ \text{rad/s} = 4\times10^{14}\ \text{rad/s}$$

Il periodo è quindi dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.57\times10^{-14}\ \text{s}$$

Domanda (b)

Ora consideriamo lo smorzamento. Ponendo $\gamma = \beta/(2m)$, sappiamo [si vedano gli appunti] che lo smorzamento dell'ampiezza delle oscillazioni è determinato dalla legge

$A(t) = A_0 \exp(-\gamma t)$

dove A_0 è l'ampiezza iniziale. L'energia U è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, per cui essa si attenua con la legge

$U(t) = U_0 \exp(-2\gamma t)$

In un periodo di oscillazione T, l'energia diminuisce della quantità

$\Delta U = U(t)-U(t+T) = U(t)\,[1-\exp(-2\gamma T)]$

per cui la diminuzione relativa di energia è

$\Delta U/U(t) = 1-\exp(-2\gamma T)$

Ora la diminuzione relativa di energia è nota ed è $\Delta U/U = 0.1\ \% = 10^{-3}$, per cui da questa relazione possiamo ottenere γ. Per semplificare i calcoli [questo non è indispensabile se si usa la calcolatrice, ma è comunque più elegante] possiamo fare la seguente approssimazione. Dato che $\Delta U/U$ è molto piccolo, l'esponenziale $\exp(-2\gamma T)$ deve essere molto prossimo a 1, il che vuol dire che l'esponente $-2\gamma T$ deve essere molto piccolo. Perciò possiamo usare lo sviluppo in serie di Taylor dell'esponenziale troncato al primo ordine, ottenendo:

$\Delta U/U(t) = 1-\exp(-2\gamma T) \approx 1-(1-2\gamma T+\ldots) = 2\gamma T$

Quindi

$\gamma = (\Delta U/U)/2T$ (1)

e

$\beta = 2m\gamma = (\Delta U/U)\,(m/T) = 10^{-3} \times (1.7\times10^{-27}) / (1.57\times10^{-14})$ kg/s $= 1.08 \times 10^{-16}$ kg/s

(notate che abbiamo usato il periodo calcolato senza smorzamento; infatti la variazione del periodo prevedibile con uno smorzamento così piccolo è trascurabile, come si può verificare facilmente).

Domanda (c)

L'intensità I dell'onda è legata all'ampiezza del campo elettrico oscillante dell'onda mediante la relazione

$I = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, c\, E_0^2$

per cui possiamo determinare l'ampiezza del campo con la formula (non serve calcolarne il valore numerico)

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} \quad (2)$$

Assumiamo ora che il campo elettrico dell'onda sia diretto parallelamente al legame chimico tra l'atomo di idrogeno e il resto della molecola (poniamo che questa direzione sia quella dell'asse x) [NOTA: questo avrei fatto meglio a dirvelo io nel testo dell'esercizio] e che l'onda si propaghi in una qualsiasi direzione ortogonale (il campo elettrico e la direzione di propagazione delle onde elettromagnetiche devono necessariamente essere perpendicolari, essendo l'onda trasversale), che poniamo coincidere con l'asse y.

Allora il campo elettrico dell'onda dipende dal tempo e dalla posizione come segue

$E(x,y,z,t) = E_0 \cos(ky-\omega t+\varphi)$

[notate che c'è y al posto di x perché l'onda si propaga lungo l'asse y]. Un campo elettrico esercita una forza su una carica q data da qE. Perciò sull'atomo di idrogeno agirà una forza esterna oscillante diretta come il legame chimico: il sistema diventa un oscillatore forzato. Per convenienza scegliamo l'origine dell'asse y coincidente con la posizione dell'atomo di idrogeno e l'origine dei tempi t in modo da rendere nulla la fase φ. In questo modo la forza dovuta all'onda agente (lungo l'asse x) sull'atomo di idrogeno (quindi nel punto y = 0) è data da

$F(t) = qE_0 \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t)$ con $F_0 = qE_0$

La frequenza ω dell'onda coincide con la frequenza propria dell'oscillatore calcolata in precedenza, per cui siamo in condizioni di perfetta risonanza. Perciò, dopo un eventuale breve transitorio, l'oscillazione si stabilizza nella forma seguente (si vedano gli appunti):

$$x(t) = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega}\sin(\omega t) = \frac{qE_0}{2m\gamma\omega}\sin(\omega t)$$

Per calcolare la potenza assorbita dall'oscillatore, basta considerare il lavoro fatto per unità di tempo dalla forza, ossia

$$P = F(t)\frac{dx}{dt} = qE_0\cos(\omega t)\frac{qE_0}{2m\gamma}\cos(\omega t) = \frac{q^2E_0^2}{2m\gamma}\cos^2\omega t$$

La potenza media è quindi

$$\overline{P} = \frac{q^2E_0^2}{2m\gamma}\overline{\cos^2\omega t} = \frac{q^2E_0^2}{4m\gamma}$$

Sostituendo l'espressione (1) per γ e quella (2) per E_0, otteniamo la formula finale

$$\overline{P} = \frac{2\pi q^2 I}{\varepsilon_0 c m\omega(\Delta U/U)} = 10^{-12}\ \mathrm{W}$$

Esercizio 2

Domanda (a)

Calcoliamo la velocità dell'onda [a proposito: se vi ricordate che per calcolare la velocità dovete fare la radice di un rapporto tra K e ρ_l, ma non vi ricordate quale fra K e ρ_l deve stare a numeratore e quale a denominatore, potete usare uno dei seguenti trucchi per ricostruirlo: (i) controllare le dimensioni; (ii) ricordare che più sono pesanti i corpi, più l'onda sarà lenta, cosa abbastanza intuitiva, per cui la densità deve necessariamente stare a denominatore]

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho_l}} = 2\ \mathrm{m/s}$$

La lunghezza d'onda può ora essere determinata come segue:

$\lambda = v_0/\nu = 4$ m

Domanda (b)

La fase dell'onda è definita come segue: $\Phi = kx-\omega t+\varphi$. Perciò la differenza di fase tra le oscillazioni dei due pendoli che distano $\Delta x = 5$m è

$\Delta\Phi = k\,\Delta x = 2\pi\Delta x/\lambda = 5\pi/2$ rad $= 2\pi + \pi/2$ rad

che poi è equivalente ad una differenza di fase di $\pi/2$ rad.

Domanda (c)

La potenza media per generare l'onda da un estremo coincide con la potenza media dell'onda stessa, che è data dal prodotto della velocità v_0 per la densità media di energia (utilizzando anche il fatto che $k^2K = \omega^2\rho_l$):

$$P = \frac{1}{2} v_0 \rho_l \omega^2 A^2 = 2\pi^2 v_0 \rho_l \nu^2 A^2 = 0.39\ \mathrm{W}$$

Domanda (d)

Se l'onda viene generata per mezz'ora con accensione e spegnimento istantanei, l'onda generata è un pacchetto d'onde rettangolare di durata temporale $\Delta t = 0.5$ h = 1800 s ed estensione spaziale $\Delta x = v_0\, \Delta t = 3600$ m = 3.6 km.

Lo spettro di Fourier spaziale avrà quindi larghezza di banda (si vedano gli appunti)

$\Delta k = 2\pi/\Delta x = 1.75 \times 10^{-3}$ rad/m

La larghezza di banda temporale può essere ottenuta con la stessa formula con Δt al posto di Δx, oppure semplicemente moltiplicando Δk per la velocità dell'onda v_0. Perciò si ha

$\Delta \omega = v_0\, \Delta k = 2\pi/\Delta t = 3.49 \times 10^{-3}$ rad/s

In termini di frequenze cicliche, la larghezza di banda temporale è quindi

$\Delta \nu = \Delta \omega / 2\pi = 1/\Delta t = 0.55$ mHz