La Geometria dello spazio delle fasi della Meccanica Quantistica

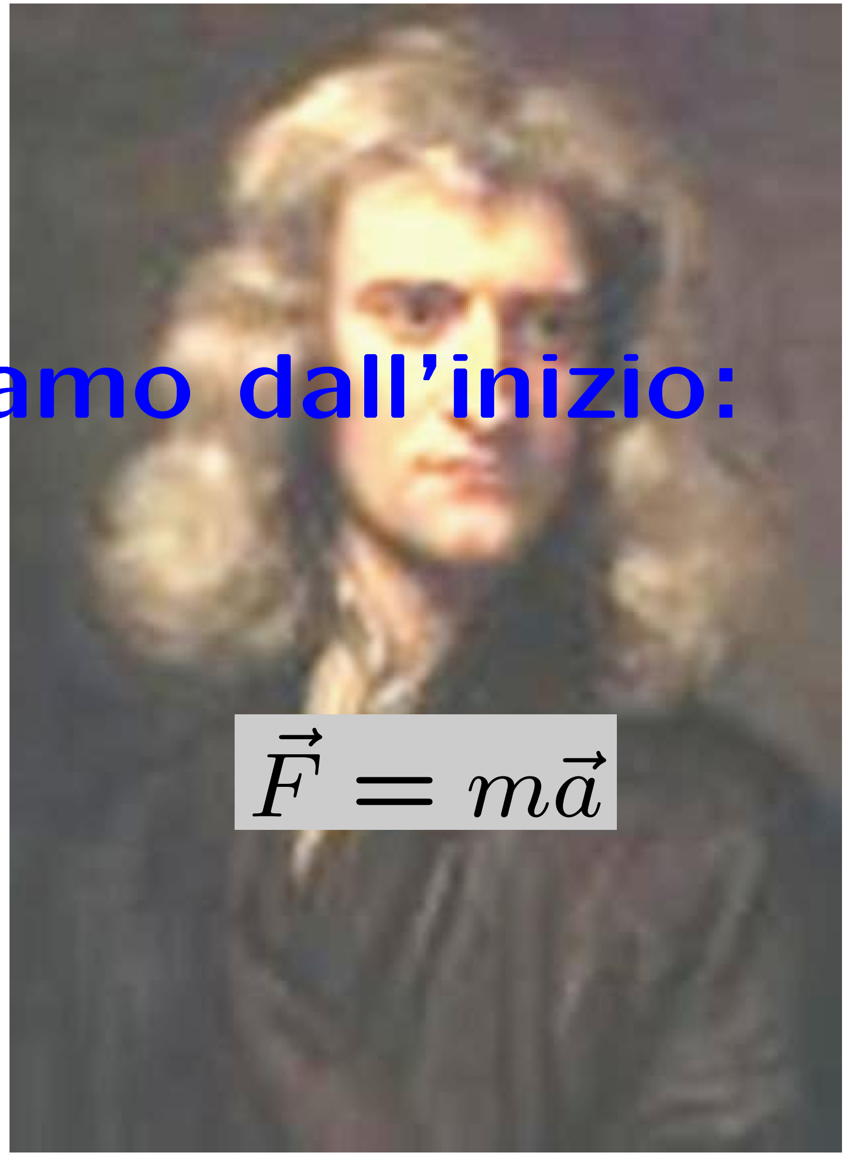
Fedele Lizzi

Napoli 2007

Ma no! Farebbe i calcoli prima di me!

Schrödinger in risposta al suggerimento di consultare Weyl

Cominciamo dall’inizio:



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

dopo poco arriviamo a scrivere:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla} V(x)$$

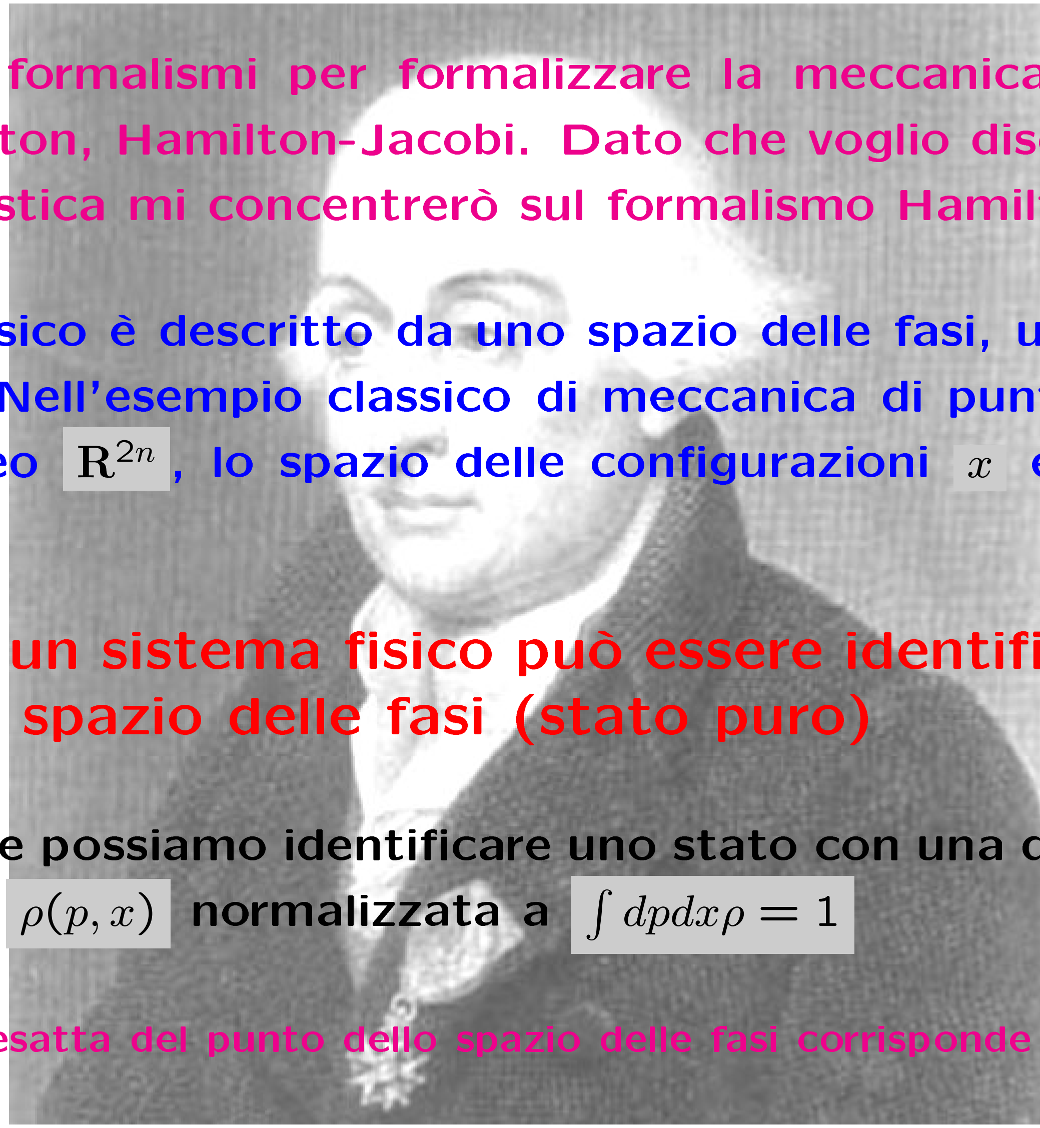
Con questa formula introduciamo lo Spazio delle fasi, spazio delle posizioni $\vec{x}$ e dei momenti $\vec{p}$

Nella meccanica elementare di punto, noti valori iniziali di $\vec{p}, \vec{x}$ e una funzione Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ è possibile (almeno in principio) calcolare la posizione del punto ad ogni istante successivo

Poi arriviamo a considerare sistemi più complicati

- Con più particelle
- Con campi magnetici o forze viscose
- Su spazi che non sono piani
- Con vincoli
- Ad infinite dimensioni (campi)
- . . .

Il formalismo della meccanica classica è la Geometria Differenziale. I suoi strumenti sono varietà differenziabili, campi vettoriali tangenti, fibrati cotangenti . . .



Ci sono vari formalismi per formalizzare la meccanica classica, Lagrange, Hamiton, Hamilton-Jacobi. Dato che voglio discutere la meccanica quantistica mi concentrerò sul formalismo Hamiltoniano

Un sistema fisico è descritto da uno spazio delle fasi, una varietà differenziabile. Nell'esempio classico di meccanica di punto questo è lo spazio euclideo $\mathbf{R}^{2n}$, lo spazio delle configurazioni x e dei momenti p

Lo stato di un sistema fisico può essere identificato con un punto dello spazio delle fasi (stato puro)

Più in generale possiamo identificare uno stato con una densità classica di probabilità $\rho(p,x)$ normalizzata a $\int dpdx\rho = 1$

La conoscenza esatta del punto dello spazio delle fasi corrisponde alla distribuzione δ

Un osservabile è una funzione sullo spazio delle fasi, E devo poter sommare e moltiplicare gli osservabili fra di loro per costruirne di nuovi. Questo prodotto è abeliano

Per esempio la coordinata x_1, o il momento p_2 o il momento angolare $p_1 x_2 - p_2 x_1$

Se lo stato del sistema è descritto da uno stato puro, un punto x_0, p_0, allora il valore dell'osservabile $f(x,p)$ è dato dal valore della funzione in un punto: $f(x_0, q_0)$

Se lo stato è dato da una densità di probabilità allora possiamo parlare di valor medio

$$\langle f \rangle_\rho = \int d\mu f \rho$$

dove $d\mu$ è l'appropriata misura sullo spazio delle fasi, usualmente $d^n x d^n p$

Potevamo partire dalgli osservabili, definiti come una algebra (commutativa) e definire uno stato come una mappa dagli elementi dell'algebra degli osservabili nei numeri reali $\rho : f \to \mathrm{R}$, ovvero $\rho(f) = \langle f \rangle_\rho$

Considerando gli osservabili come la parte reale delle funzioni a valori sui complessi dobbiamo imporre sugli stati le condizioni $\rho(1) = 1$ e $\rho(f^* f) \geq 0$

I punti dello spazio delle fasi possono essere ricostruiti come gli stati puri, stati che non si possono scrivere come somma convessa di due altri stati $\rho = a\rho_1 + (1-a)\rho_2$

In effetti, modulo dettagli tecnici, tutta una serie di risultati matematici mostra che l'informazione sulla geometria e la topologia dello spazio delle fasi è contenuta nell'algebra degli osservabili

Per discutere la dinamica bisogna introdurre una nuova struttura: la parentesi di Poisson, un altro prodotto sull'algebra degli osservabili con le proprietà

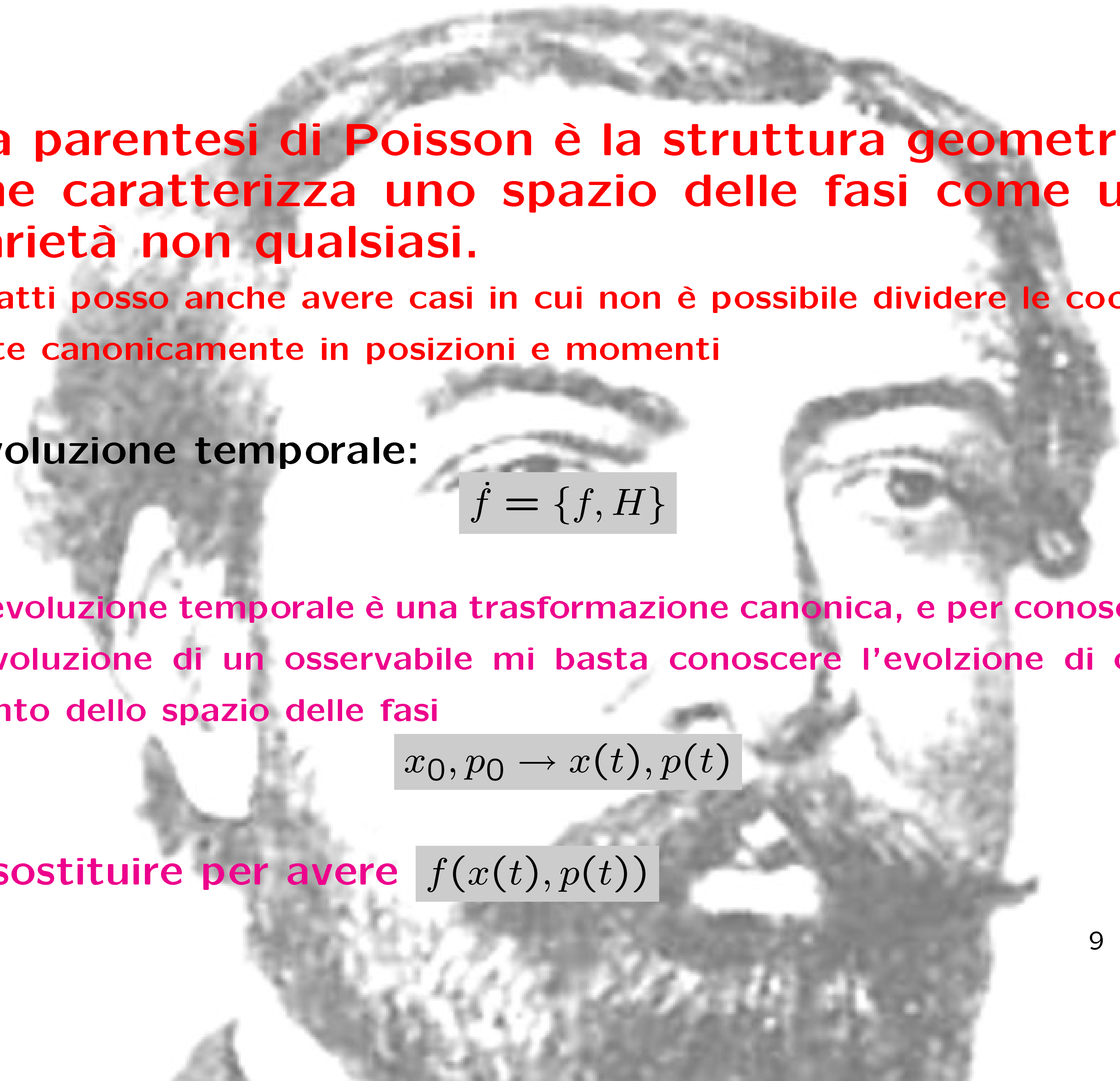
- **Antisimmetria:** $\{f,g\} = -\{g,f\}$
- **Leibniz:** $\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$
- **Jacobi** $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}$

La parentesi di Poisson è data da un bivettore antisimmetrico Λ^{ab}

$$\{f,g\} = \Lambda^{ab}\partial_a f \partial_b g$$

Che nel caso standard diviene $\{f,g\} = \sum_i \partial_{x_i} f \partial_{p_i} g - \partial_{p_i} f \partial_{x_i} g$ con $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$

E si possono considerare il caso simplettico, il ruolo dei vincoli etc.



La parentesi di Poisson è la struttura geometrica che caratterizza uno spazio delle fasi come una varietà non qualsiasi.

Infatti posso anche avere casi in cui non è possibile dividere le coordinate canonicamente in posizioni e momenti

Evoluzione temporale:

$$\dot{f} = \{f, H\}$$

L'evoluzione temporale è una trasformazione canonica, e per conoscere l'evoluzione di un osservabile mi basta conoscere l'evolzione di ogni punto dello spazio delle fasi

$$x_0, p_0 \to x(t), p(t)$$

e sostituire per avere $f(x(t), p(t))$

Anche in meccanica classica io posso consoderare una evoluzione alla Heisenberg o alla Schrődinger

Ovvero (in generale) se conosco la distribuzione iniziale di probabilità di un sistema dato da ρ, posso alternativamente evolvere lo stato o l'osservabile.

$$\langle f \rangle_\rho (t) = \int d\mu f(x(t), p(t))\rho(x_0, p_0) = \int d\mu f(x_0, p_0)\rho(x(t), p(t))$$

Notiamo che la relazione normalmente usate per gli stati puri $f_t(x,p) = f(x(t), p(t))$ è una conseguenza del fatto che l'algebra è abeliana, e che posso evolvere indipendentemente qualunque monomio $x^n p^m$, per esempio in una espansione di Taylor.

Sto iniziando a parlare di commutatività , è il momento di passare alla. . .

Meccanica Quantistica

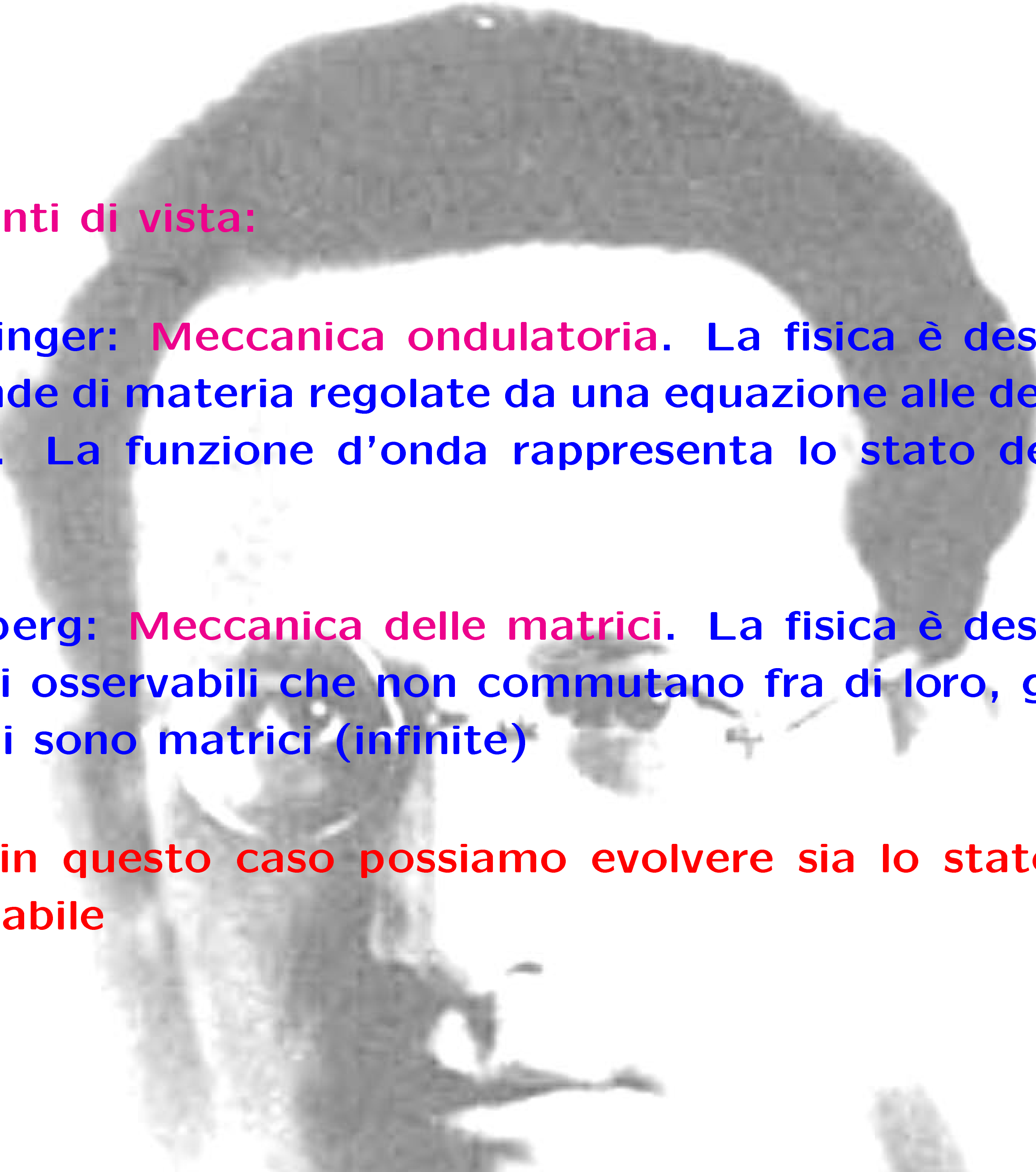
La meccanica quantistica è una teoria diversa dalla meccanica classica

- Esiste una costante fondamentale con le dimensioni di una posizione per un momento (il volume dello spazio delle fasi aveva dimensione $\hbar^n$)

- Non si può più parlare di punti nello spazio delle fasi a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg

- Lo stato di un sistema non è più un punto di un inesistente spazio delle fasi ma un vettore dello spazio di Hilbert, o meglio una matrice densità

- Posizione e momento sono più funzioni sull'insesistente spazio delle fasi, ma degli operatori sullo spazio di Hilbert

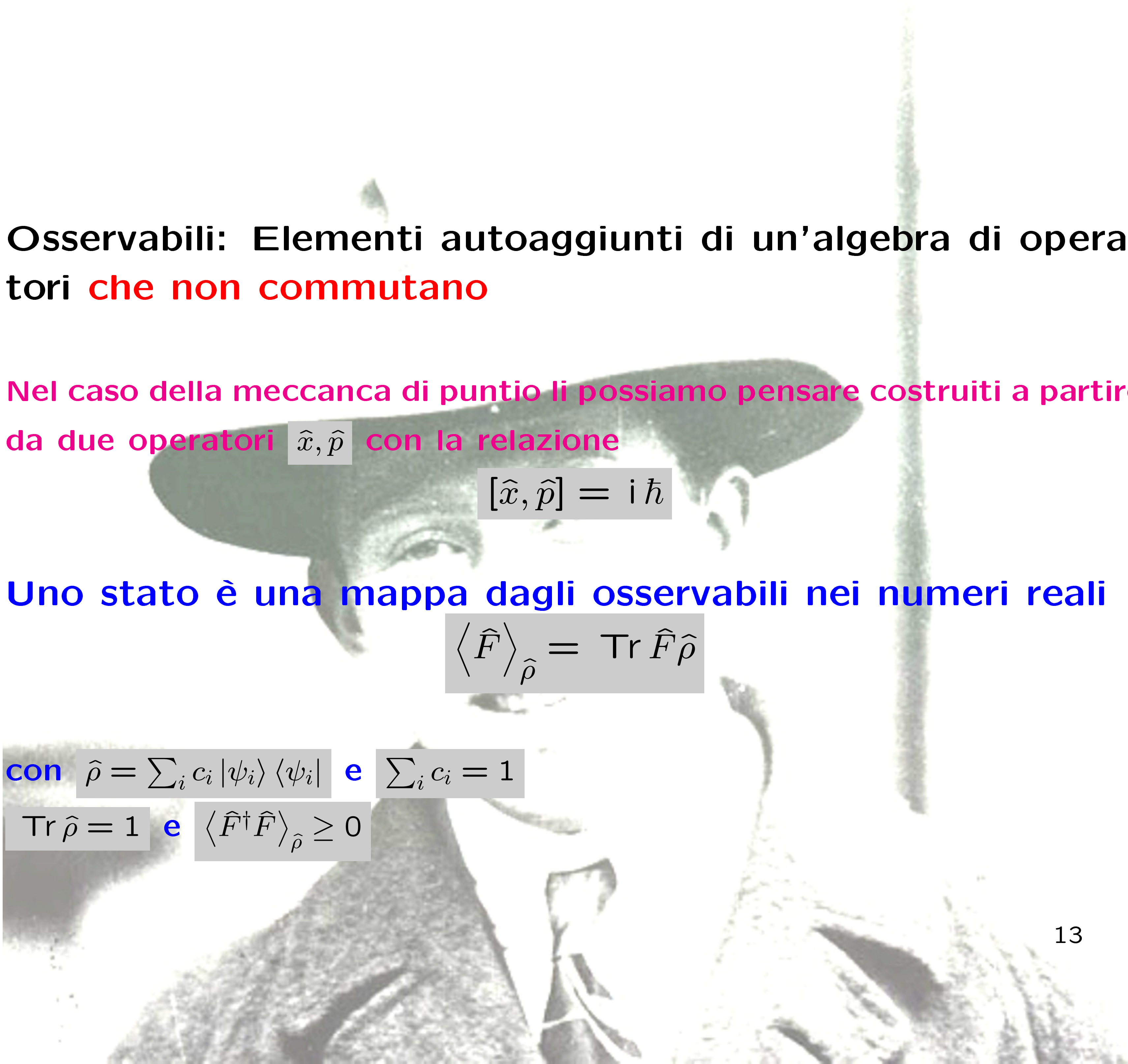


Due punti di vista:

Schrŏdinger: Meccanica ondulatoria. La fisica è descritta dalle onde di materia regolate da una equazione alle derivate parziali. La funzione d'onda rappresenta lo stato del sistema

Heisenberg: Meccanica delle matrici. La fisica è descritta da degli osservabili che non commutano fra di loro, gli osservabili sono matrici (infinite)

Anche in questo caso possiamo evolvere sia lo stato che l'osservabile



Osservabili: Elementi autoaggiunti di un'algebra di operatori che non commutano

Nel caso della meccanca di puntio li possiamo pensare costruiti a partire da due operatori $\widehat{x}, \widehat{p}$ con la relazione

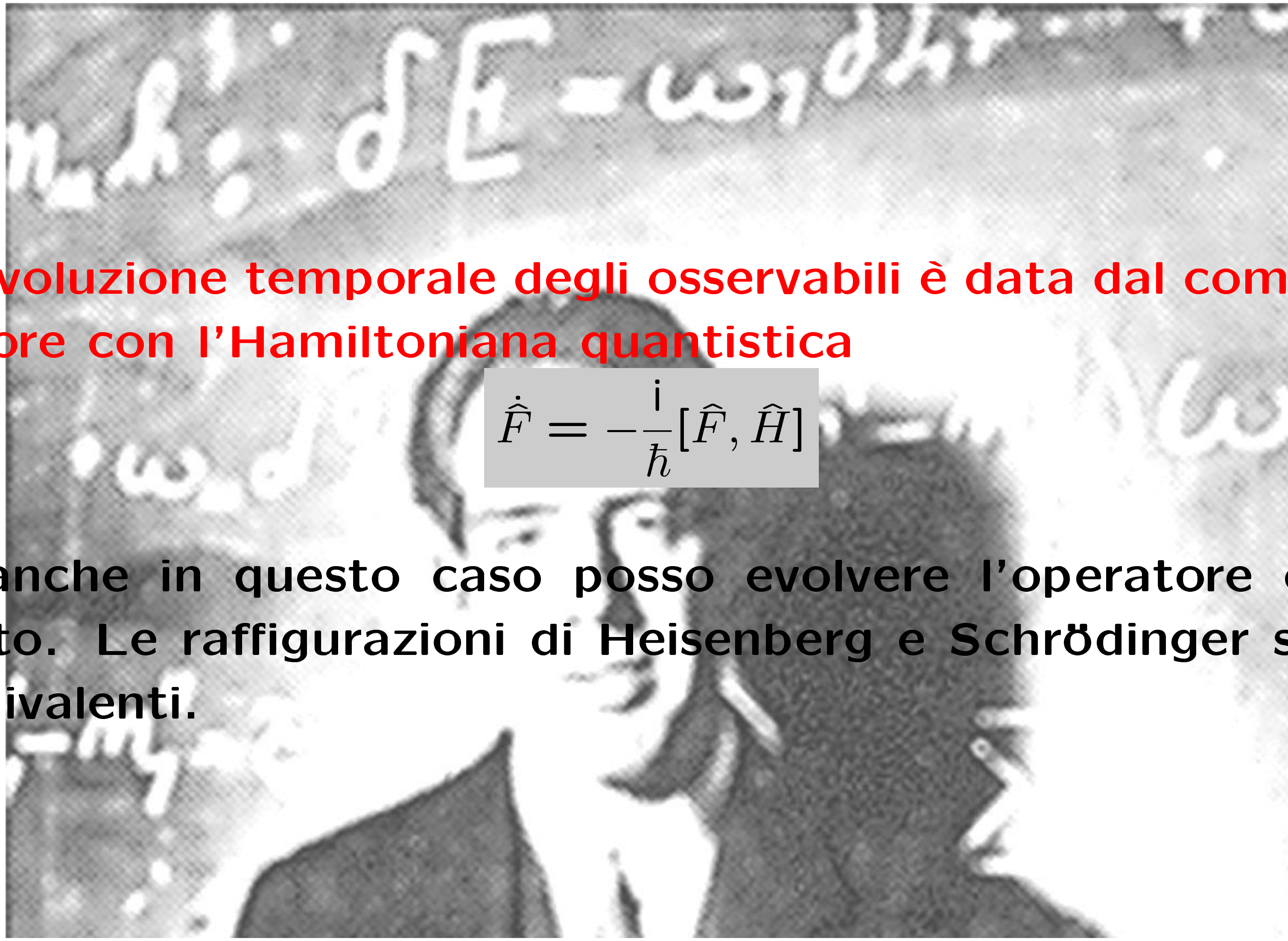
$$[\widehat{x}, \widehat{p}] = \mathrm{i}\,\hbar$$

Uno stato è una mappa dagli osservabili nei numeri reali

$$\left\langle \widehat{F} \right\rangle_{\widehat{\rho}} = \mathrm{Tr}\, \widehat{F} \widehat{\rho}$$

con $\widehat{\rho} = \sum_i c_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$ **e** $\sum_i c_i = 1$

$\mathrm{Tr}\, \widehat{\rho} = 1$ **e** $\left\langle \widehat{F}^\dagger \widehat{F} \right\rangle_{\widehat{\rho}} \geq 0$



L'evoluzione temporale degli osservabili è data dal commutatore con l'Hamiltoniana quantistica

$$\dot{\hat{F}} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\widehat{F}, \widehat{H}]$$

E anche in questo caso posso evolvere l'operatore o lo stato. Le raffigurazioni di Heisenberg e Schrödinger sono equivalenti.

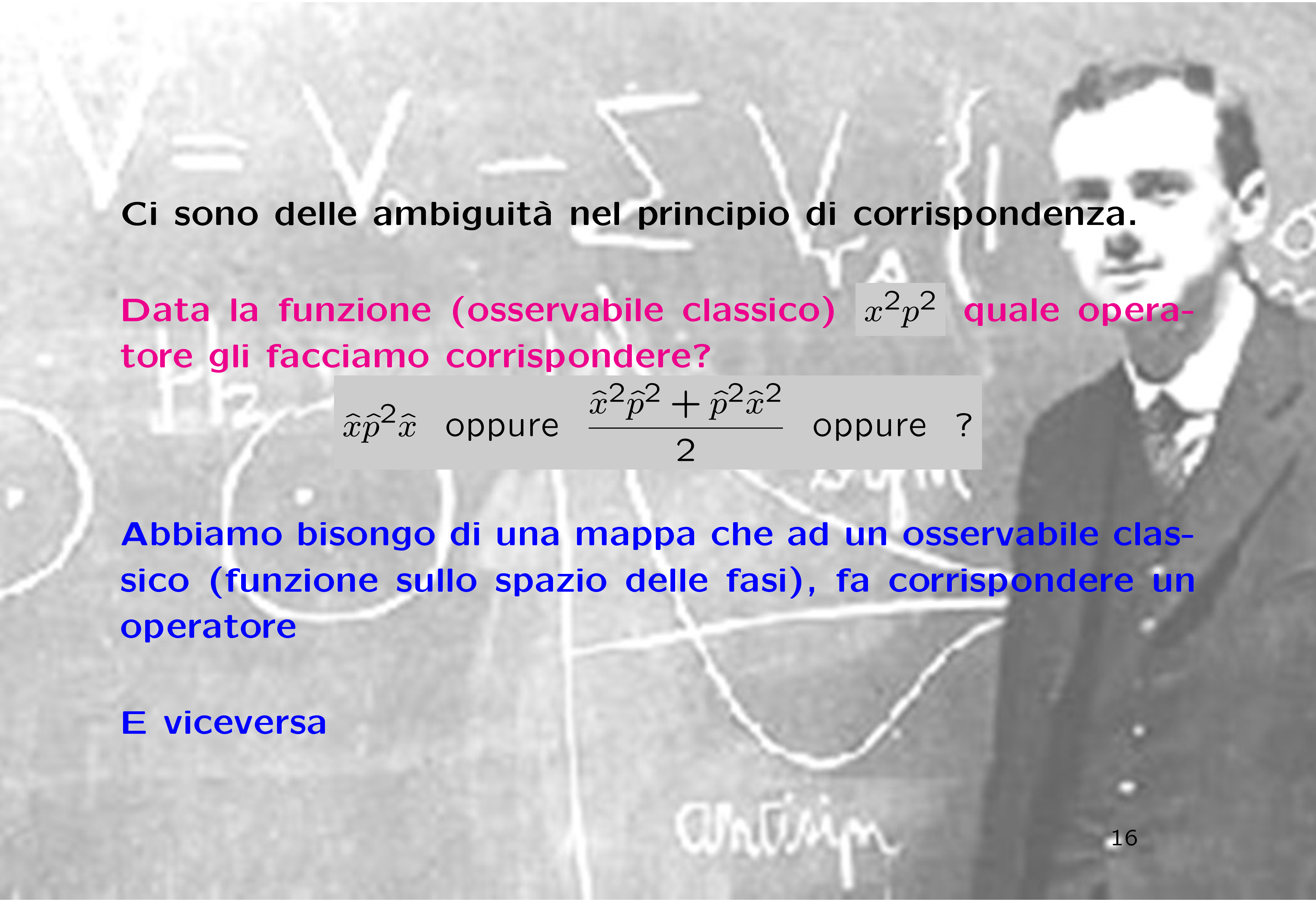
Le analogie fra la teoria classica e quella quantistica sono ben note e si riassumono nel principio di corrispondenza fra gli osservabili classici e quelli quantistici in una rappresentazione che trasformi la parentesi di Poisson nel commutatore fra gli operatori moltiplicato per $\mathrm{i}\hbar$

Principio di corrispondenza: sullo spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato sommabile di x

$$x \to \hat{x} = x \quad , \quad p \to \hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$$

Possiamo dire che lo spazio delle fasi è diventato l'algebra degli operatori su uno spazio di Hilbert a dimensione infinita?

Questo è azzardato, gli spazi di Hilbert sono tutti uguali (sono isomorfi), e lo stesso vale per l'algebra degli operatori limitati su di esso. Gli spazi delle fasi non sono tutti uguali (per esempio hanno dimensioni diverse)



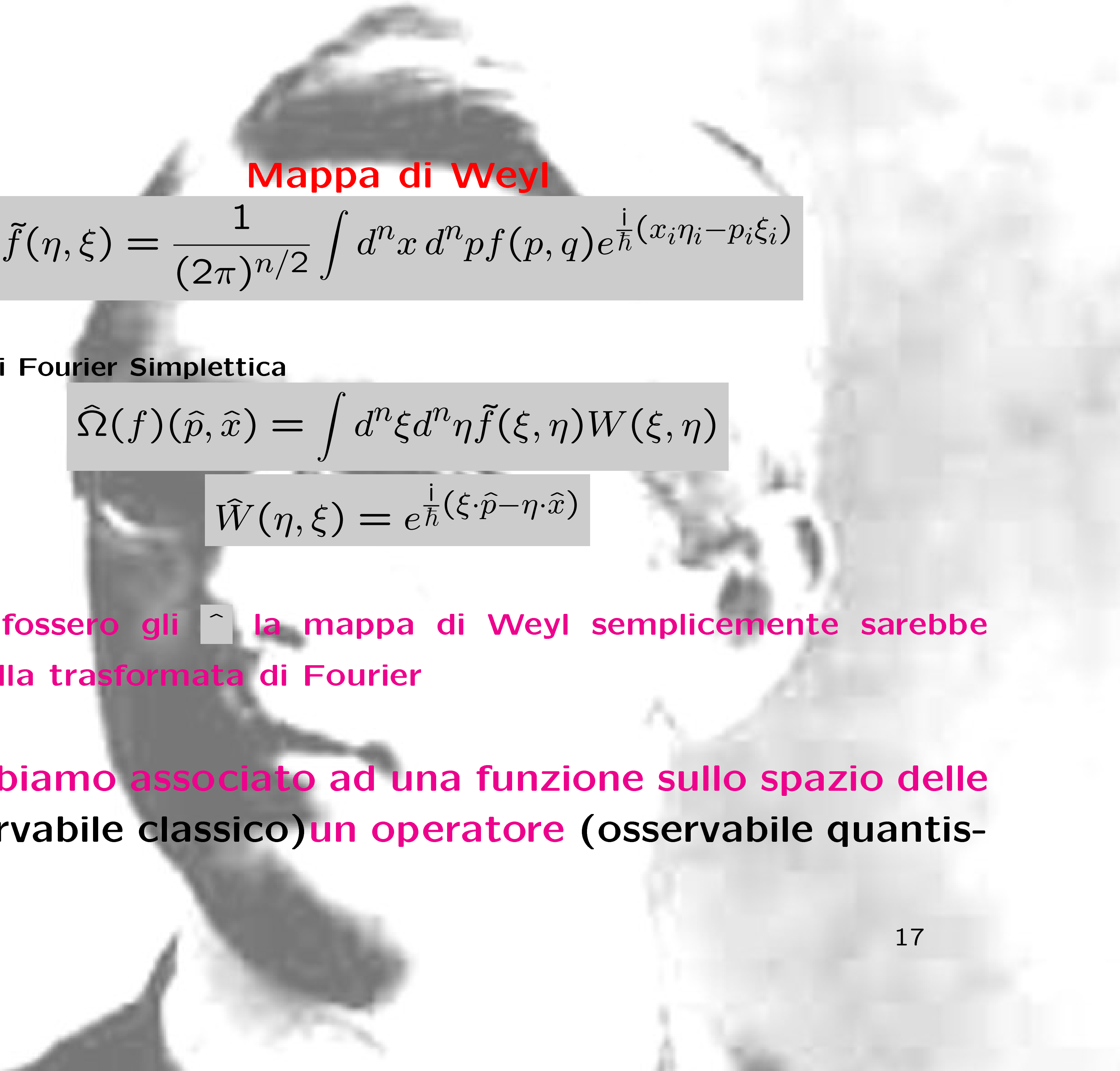
Ci sono delle ambiguità nel principio di corrispondenza.

Data la funzione (osservabile classico) x^2p^2 quale operatore gli facciamo corrispondere?

$$\hat{x}\hat{p}^2\hat{x} \quad \text{oppure} \quad \frac{\hat{x}^2\hat{p}^2+\hat{p}^2\hat{x}^2}{2} \quad \text{oppure} \quad ?$$

Abbiamo bisogno di una mappa che ad un osservabile classico (funzione sullo spazio delle fasi), fa corrispondere un operatore

E viceversa



Mappa di Weyl

$$\tilde{f}(\eta,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n x\, d^n p f(p,q) e^{\frac{i}{\hbar}(x_i\eta_i - p_i\xi_i)}$$

trasformata di Fourier Simplettica

$$\hat{\Omega}(f)(\hat{p},\hat{x}) = \int d^n\xi d^n\eta \tilde{f}(\xi,\eta) W(\xi,\eta)$$

$$\hat{W}(\eta,\xi) = e^{\frac{i}{\hbar}(\xi\cdot\hat{p} - \eta\cdot\hat{x})}$$

Se non ci fossero gli $\hat{}$ la mappa di Weyl semplicemente sarebbe l'inverso della trasformata di Fourier

Invece abbiamo associato ad una funzione sullo spazio delle fasi (osservabile classico) un operatore (osservabile quantistico)

La mappa di Weyl ha un inverso, chiamato mappa di Wigner, che ad un operatore associa una funzione di x, p:

$$\Omega^{-1}(F)(p,q) = \int \frac{d^n\eta d^n\xi}{(2\pi)^2\hbar} e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\eta\cdot x+\xi\cdot p)} \,\mathrm{Tr}\, F\, W(\xi,\eta)$$

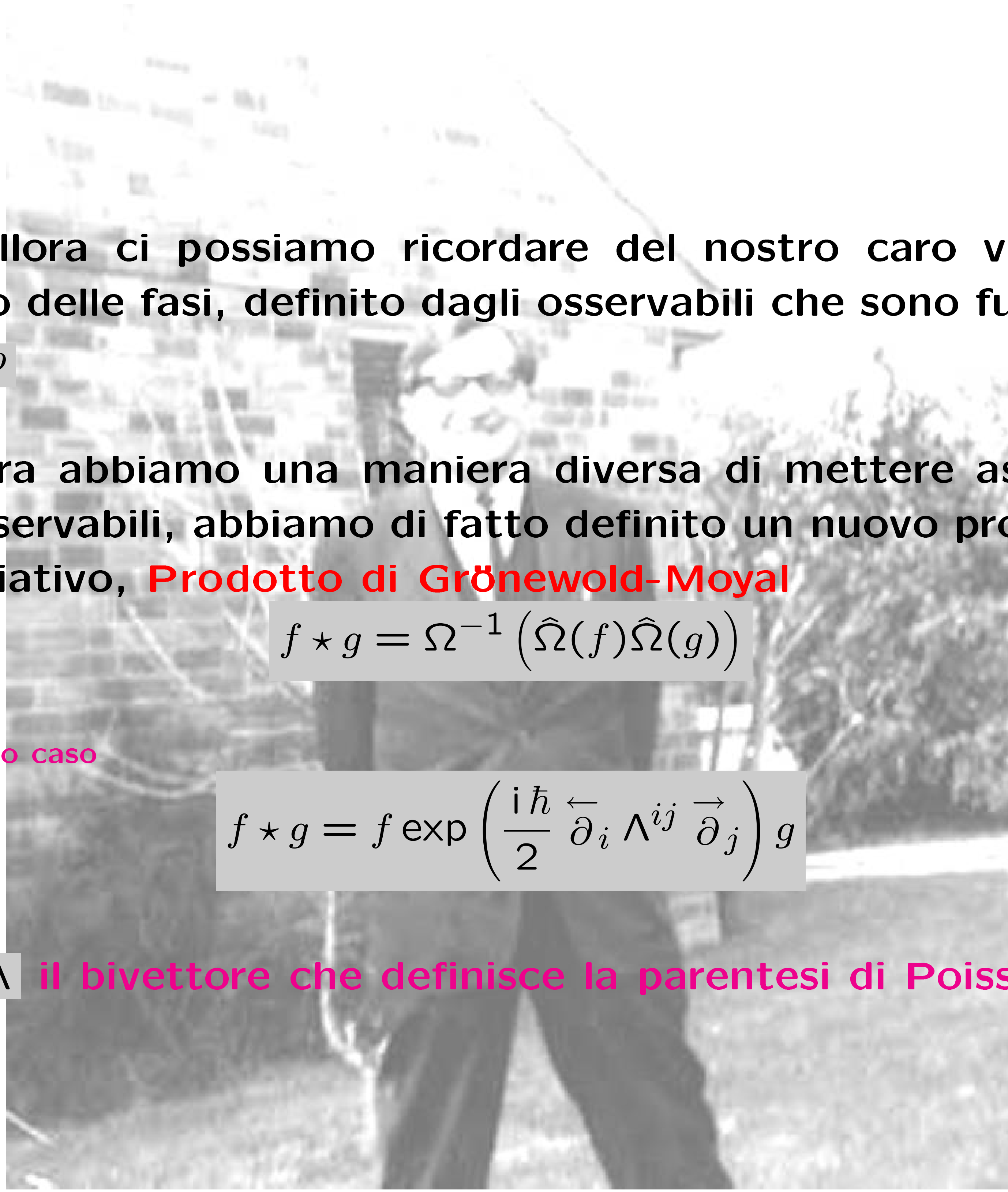
Funzioni a quadrato sommabile vanno in operatori di Hilbert-Schmidt e viceversa

Ora abbiamo una maniera canonica di associare agli osservabili classici gli osservabili quantistici.

Ed alle matrici densità delle funzioni sullo spazio delle fasi che vorremmo interpretare come densità di probabilità

Ma purtroppo queste non sono definite positive e non possono essere definite densità di probabilità nello spazio delle fasi!

Ma per gli stati coerenti lo sono



Ma allora ci possiamo ricordare del nostro caro vecchio spazio delle fasi, definito dagli osservabili che sono funzioni di x, p

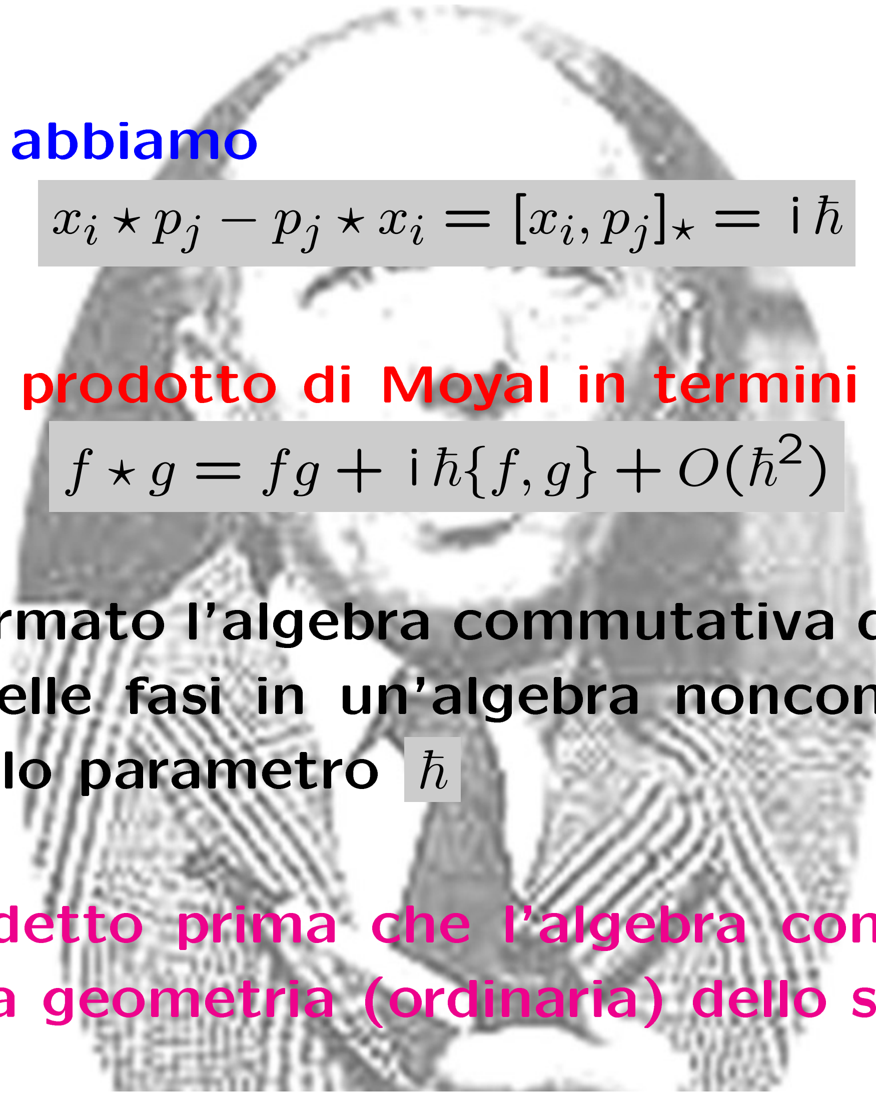
Ma ora abbiamo una maniera diversa di mettere assieme gli osservabili, abbiamo di fatto definito un nuovo prodotto associativo, Prodotto di Grönewold-Moyal

$$f \star g = \Omega^{-1}\left(\hat{\Omega}(f)\hat{\Omega}(g)\right)$$

In questo caso

$$f \star g = f \exp\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_i \Lambda^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) g$$

con Λ **il bivettore che definisce la parentesi di Poisson**



Naturalmente abbiamo

$$x_i \star p_j - p_j \star x_i = [x_i, p_j]_\star = \mathrm{i}\,\hbar$$

Espandendo il prodotto di Moyal in termini di $\hbar$

$$f \star g = fg + \mathrm{i}\,\hbar\{f, g\} + O(\hbar^2)$$

Abbiamo deformato l'algebra commutativa degli osservabili sullo spazio delle fasi in un'algebra noncommutativa guidata dal piccolo parametro $\hbar$

Ma abbiamo detto prima che l'algebra commutativa corrispondeva alla geometria (ordinaria) dello spazio delle fasi

Ma stavolta i punti non corrispondono più a stati. Per esempio

$$xp \star xp = x^2p^2 - 2\hbar^2 \ngeq 0$$

Ora abbiamo una geometria noncommutativa che non ammette i punti

Gli osservabili sono ancora le funzioni sullo spazio delle fasi, ma ora li moltiplichiamo in maniera differente, con un prodotto non commutativo. Gli stati non sono più quelli di prima, ed anche l'evoluzione temporale cambia:

$$\dot{f} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[f, H]_\star = \{f, H\} + O(\hbar^2)$$

Quindi la meccanica quantistica risulta essere una deformazione della meccanica classica

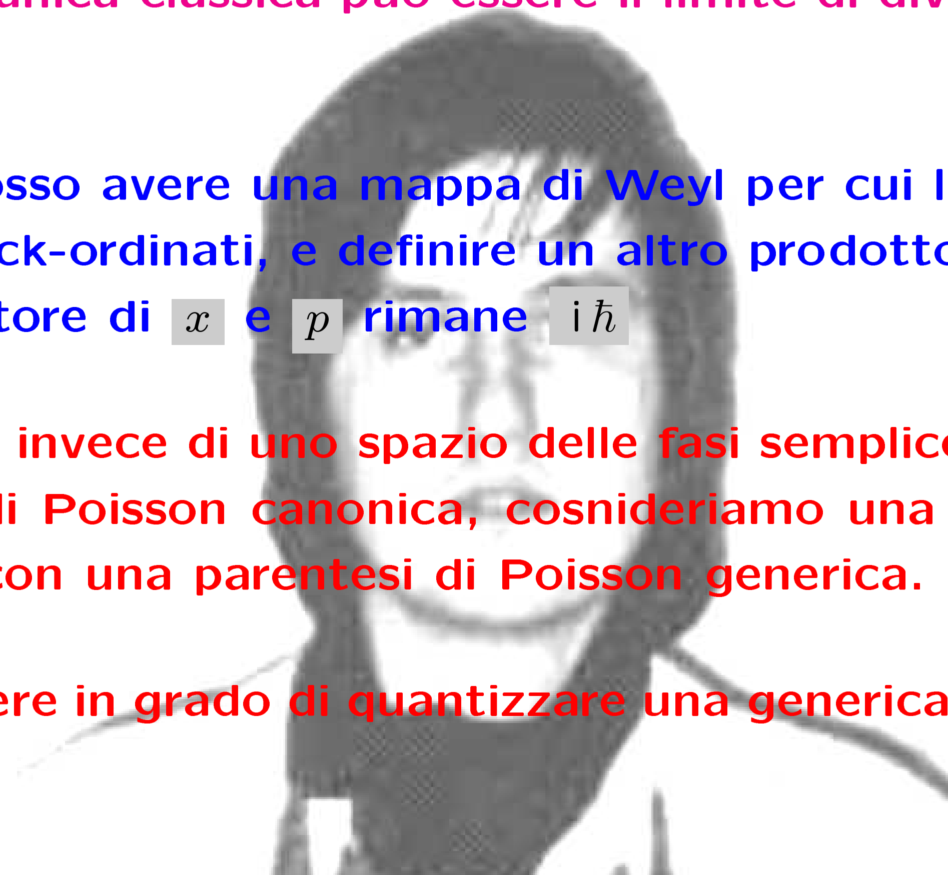
La deformazione è data dalla deformazione della geometria sottostante che diventa una Geometria Nocommutativa

Così come potevamo descrivere la geometria di uno spazio ordinario (fatto di punti) tramite un'algebra commmutativa. Ora possiamo sviluppare tecniche per descrivere uno spazio descritto da un'algebra non commutativa

Possiamo rinunciare ai punti senza rinunciare alla geometria

Esiste un dizionario che associa agli strmenti tipici della geometria differenziale oggetti basati puramente su concetti algebrici, che si possono immediatamente generalizzare al caso noncommutativo

La mappa di Weyl, e quindi questa quantizzazione, non sono uniche. Una data meccanica classica può essere il limite di diverse meccaniche quantistiche.



Per esempio posso avere una mappa di Weyl per cui le funzioni vanno in operatori Wick-ordinati, e definire un altro prodotto deformato, per cui il commutatore di x e p rimane $\mathrm{i}\hbar$

Che succede se invece di uno spazio delle fasi semplice come $\mathbb{R}^{2n}$ con una parentesi di Poisson canonica, cosnideriamo una generica varietà differenziabile con una parentesi di Poisson generica.

Dovremmo essere in grado di quantizzare una generica meccanica classica.

Il problema si è rivelato molto difficile e solo pochi anni fa è stato risolto da Kontsevich (che ha vinto la Field medal per questo)

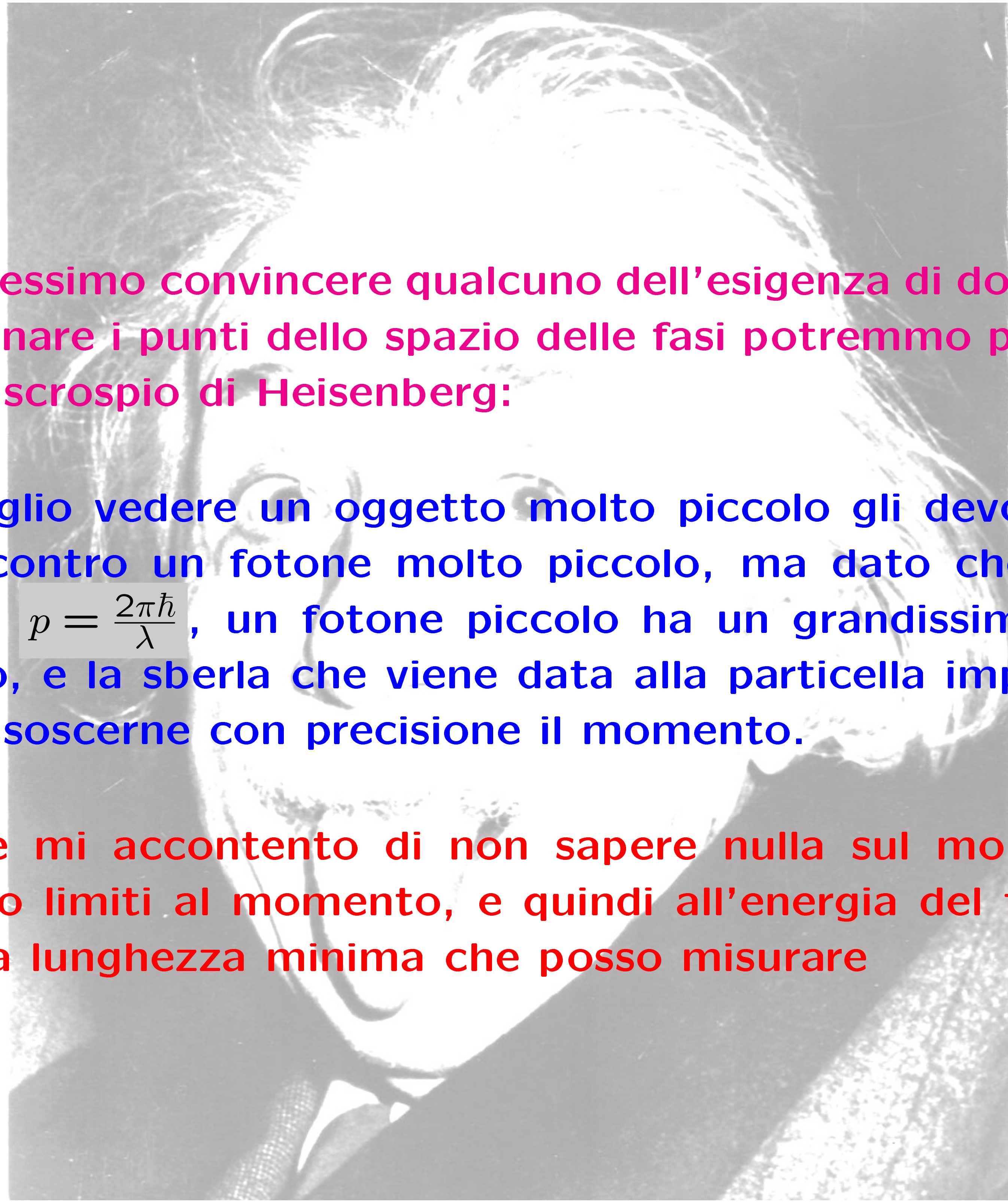
E se volessi fare un dispetto e partire da Lagrange e Feynmann e costruire la meccanica quantistica seguendo gli integrali di cammino?

Niente paura! Basta interpretare il propagatore che evolve il sistema come un esponenziale $\star$

Consideriamo l'integrale di cammino per l'evoluzione da x_1 a x_2 in un tempo t

$$\int \frac{\mathcal{D}p\mathcal{D}q}{2\pi\hbar} e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int d\tau (p\dot{x} - H)} = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p(x_1 - x_2)} e_\star^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H(\frac{x_1+x_2}{2}, p)\, t}$$

con $e_\star^X = 1 + X + \frac{1}{2} X \star X + \ldots$



Se volessimo convincere qualcuno dell'esigenza di dover abbandonare i punti dello spazio delle fasi potremmo parlargli del miscrospio di Heisenberg:

Se voglio vedere un oggetto molto piccolo gli devo mandare contro un fotone molto piccolo, ma dato che per i fotoni $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$, un fotone piccolo ha un grandissimo momento, e la sberla che viene data alla particella impedisce di consoscerne con precisione il momento.

Ma se mi accontento di non sapere nulla sul momento, non ho limiti al momento, e quindi all'energia del fotone, ed alla lunghezza minima che posso misurare

Eccetto che se concentro troppa energia in uno spazio troppo piccolo creo un buco nero, e il fotone non esce più ! Che faccio con i punti dello spazio delle configurazioni?

Ma questa è un'altra storia