

## Chapter 9

# Cromodinamica quantistica

### 9.1 Introduzione

Nello sviluppo del modello a quark emerse, come sappiamo, la necessità di attribuire ai quark un ulteriore grado di libertà al quale fu dato il nome di *colore*. Nella teoria delle interazioni forti, la *cromodinamica quantistica* (QCD), il colore assume una funzione dinamica venendo identificato come *carica forte* e, quindi, come sorgente del campo cromodinamico. La QCD è la teoria di gauge delle interazioni forti e, come tale, è in un certo senso analoga alla QED pur differenziandosene molto. E' analoga alla QED nel senso che è sviluppata a partire dal principio di gauge con la sostituzione, però, del gruppo  $U(1)_{em}$  con il gruppo  $SU(3)_C$  di colore. La differenza più rilevante sta proprio nel fatto che, mentre  $U(1)$  è un gruppo abeliano,  $SU(3)$  non lo è. I generatori di  $SU(3)_C$  non commutano e questo conduce nella lagrangiana di QCD a termini di interazione tra i campi di gauge (*gluoni*), i quali, pertanto, portano la carica del gruppo (carica di colore). In QED, invece, come sappiamo i fotoni non hanno carica elettrica e, quindi, non esistono nella lagrangiana termini di autointerazione tra fotoni. Una conseguenza molto importante della non abelianità della QCD è *la libertà asintotica* della quale parleremo nel paragrafo 9.4.

### 9.2 Una teoria di gauge locale $SU(3)$

Alla QCD i quark partecipano come *tripletti di colore*, cioè per ogni sapore  $f$  ci sono tre campi spinoriali  $\psi_j^f(x)$  con  $j = 1, 2, 3$  indice di colore (1 sta, per esempio, per  $R$ , 2 per  $G$  e 3 per  $B$ )

$$\boldsymbol{\psi}^f(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^f(x) \\ \psi_2^f(x) \\ \psi_3^f(x) \end{pmatrix}$$

Postuliamo che la teoria sia invariante sotto il gruppo di trasformazioni locali  $SU(3)_C$ , ovvero

$$\boldsymbol{\psi}^f(x) \rightarrow \boldsymbol{\psi}'^f(x) = \mathbf{U}(x) \boldsymbol{\psi}^f(x)$$

dove  $\boldsymbol{\psi}(x)$  è uno dei sei possibili tripletti di (campi di) quark e  $\mathbf{U}(x)$  è una qualunque trasformazione, dipendente dallo spazio e dal tempo, appartenente

al gruppo  $SU(3)_C$ .

Una trasformazione infinitesima del gruppo  $SU(3)_C$  ha la forma

$$\psi^f(x) \rightarrow \psi'^f(x) = [1 + ig_s \theta_a(x) T_a] \psi^f(x)$$

ove  $T_a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) sono i generatori del gruppo  $SU(3)_C$ , convenzionalmente presi come

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}$$

essendo  $\lambda_a$  le otto matrici (3x3 a traccia nulla) di Gell-Mann.

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Essi soddisfano le relazioni di commutazione

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$$

ove  $f_{abc}$  sono le costanti di struttura del gruppo  $SU(3)_C$ .  $\theta_a(x)$  sono gli otto parametri del gruppo, funzioni dello spazio e del tempo. A sua volta  $g_s$  è la costante di accoppiamento forte.

La lagrangiana per quark liberi è

$$\mathcal{L} = \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}^f i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^f$$

avendo trascurato al momento ogni termine di massa, ovvero assumendo che i quark abbiano massa nulla. L'invarianza di gauge locale porta all'introduzione di otto campi di gauge a massa nulla, i *gluoni*,

$$A_a(x) \quad (a = 1, \dots, 8)$$

tanti quanti sono i generatori di  $SU(3)_C$  e alla sostituzione di  $\partial_\mu$  con la derivata covariante  $\mathcal{D}_\mu$  data da

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_s T_a A_\mu^a(x)$$

$\mathcal{D}_\mu$  è una matrice  $3 \times 3$

$$(\mathcal{D}_\mu)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu + ig_s (T_a)_{\alpha\beta} A_\mu^a \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  indici di colore. Sostituendo  $\partial_\mu$  con la derivazione covariante, la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\psi}_\alpha^f i \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta^f \quad (9.4)$$

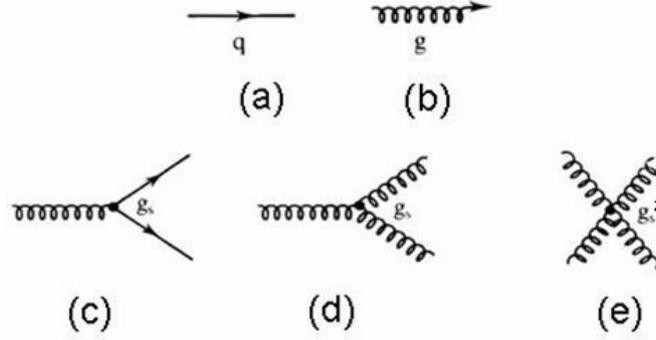


Figure 9.1: Grafici di propagazione di quark e gluoni liberi e vertici di interazione.

sottintendendo come sempre la somma sugli indici ripetuti. L'invarianza sotto gauge locale della lagrangiana richiede che gli otto campi di gauge  $A_\mu^a$ , i quali costituiscono un ottetto di  $SU(3)_c$ , si trasformino come

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu'^a = A_\mu^a - \partial_\mu \theta_a(x) - g_s f_{abc} \theta_b(x) A_\mu^c$$

La lagrangiana deve essere completata con l'aggiunta di un termine di energia cinetica gauge-invariante per ciascun gluone del tipo

$$-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$$

con

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

La lagrangiana diventa allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qg} &= \mathcal{L}_{quark} + \mathcal{L}_{gluoni} \\ &= i \sum_f \bar{\psi}_\alpha^f \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta^f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \\ &= \sum_f \left\{ \bar{\psi}_\alpha^f i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_\alpha^f - g_s \bar{\psi}_\alpha^f \gamma^\mu (T_a)_{\alpha\beta} \psi_\beta^f A_\mu^a \right\} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (9.5) \end{aligned}$$

Come abbiamo visto il percorso per arrivarci è quello da noi delineato fin dall'inizio. Abbiamo imposto alla lagrangiana libera l'invarianza sotto trasformazione di gauge locale di tipo  $SU(3)$ ; questo ha richiesto l'introduzione di otto campi di gauge vettoriali  $A_\mu^a(x)$  che compensano le variazioni arbitrarie della fase  $\theta_a(x)$  della trasformazione. Gli otto campi  $A_\mu^a$ , i gluoni, hanno massa nulla però hanno carica di colore. Infatti nella lagrangiana 9.5, in aggiunta ai termini di propagazione libera di quark e gluoni (figura 9.1 a) e b)) compaiono termini di interazione quark-gluone e gluone-gluone (figura 9.1 c), d) ed f)). Tutte le interazioni sono caratterizzate dalla costante di accoppiamento forte  $g_s$ . Poiché, come i fotoni, i gluoni hanno massa nulla e spin 1, essi sono rappresentati da un vettore di polarizzazione  $\epsilon_\mu(p)$ ; inoltre, essendo membri di un ottetto di  $SU(3)_c$ ,

$$\begin{array}{l} \text{Quark} \left\{ \begin{array}{l} \text{incoming ( } \nearrow \text{ ) : } u^{(s)}(p)c \\ \text{outgoing ( } \searrow \text{ ) : } \bar{u}^{(s)}(p)c^\dagger \end{array} \right\} \\ \text{Antiquark} \left\{ \begin{array}{l} \text{incoming ( } \searrow \text{ ) : } \bar{v}^{(s)}(p)c^\dagger \\ \text{outgoing ( } \nearrow \text{ ) : } v^{(s)}(p)c \end{array} \right\} \end{array}$$

Figure 9.2: Fattori per le linee esterne di quark e antiquark.

ciascuno di essi è caratterizzato da un ulteriore vettore a otto componenti,  $a^\alpha$ , che ne caratterizza lo stato di colore

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \text{gluone 1}; \dots\dots a^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \text{gluone 5} \dots\dots$$

Le regole di Feynman (per i grafici a livello albero) risultano essere quelle

- in figura 9.2 per le linee esterne di quark;  $c$  è un vettore a tre componenti che caratterizza il colore del quark<sup>1</sup> (spesso si omette)

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per } R, = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per } G, = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per } B$$

- in figura 9.3 per le linee esterne di gluoni,
- in figura 9.4 per i propagatori,
- in figura 9.5 per i vertici.

### 9.3 L'interazione quark-quark. Fattori di colore

Vogliamo ora analizzare l'interazione quark-quark e quark-antiquark in regime perturbativo all'ordine più basso.

<sup>1</sup>Gli stessi vettori saranno usati per caratterizzare gli anticolori  $\bar{R}$ ,  $\bar{G}$  e  $\bar{B}$ .

$$\text{Gluon} \left\{ \begin{array}{l} \text{incoming } ( \begin{array}{c} \alpha, \mu \\ \text{diagram} \end{array} ): \epsilon_\mu(p) a^\alpha \\ \text{outgoing } ( \begin{array}{c} \alpha, \mu \\ \text{diagram} \end{array} ): \epsilon_\mu^*(p) a^{\alpha*} \end{array} \right\}$$

Figure 9.3: Fattori per le linee esterne di gluoni.

$$\begin{aligned} \text{Quark-antiquark } ( \begin{array}{c} \text{diagram} \\ q \end{array} ): & \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2 c^2} \\ \text{Gluon } ( \begin{array}{c} \alpha, \mu \quad q \rightarrow \quad \beta, \nu \\ \text{diagram} \end{array} ): & \frac{-ig_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2} \end{aligned}$$

Figure 9.4: Fattori per propagatori di quark e gluoni.

### 9.3.1 Caso quark-antiquark

Consideriamo, innanzitutto, il caso quark-antiquark. Assumendo che abbiano sapore diverso, c'è un unico grafico all'ordine più basso ed è quello (canale  $t$ ) rappresentato in figura 9.6 con riferimento, a titolo di esempio, allo scattering  $u\bar{d} \rightarrow u\bar{d}$ . Per scrivere l'ampiezza invariante basta applicare le regole di Feynman. Si ha

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{M} &= [\bar{u}(3) c_3^\dagger (-i\frac{g_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu) u(1) c_1] \times \left[ -i\frac{g_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right] \times \\ & [\bar{v}(2) c_2^\dagger (-i\frac{g_s}{2} \lambda^\beta \gamma^\nu) v(4) c_4] \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathfrak{M} = -\frac{g_s^2}{4} \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3) \gamma^\mu u(1)] \times [\bar{v}(4) \gamma_\mu v(2)] \times [c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1] \times [c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4]$$

ove  $q^2 = (p_1 - p_3)^2$  (ed è intesa la somma su  $\alpha$ ).

E' interessante confrontare questa ampiezza con l'ampiezza elettromagnetica per la diffusione (all'ordine più basso) di un fermione e un antifermione carichi, per esempio  $e^- \mu^+$ , data da

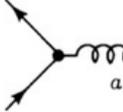
$$\mathfrak{M} = -e^2 \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3) \gamma^\mu u(1)] \times [\bar{v}(4) \gamma_\mu v(2)]$$

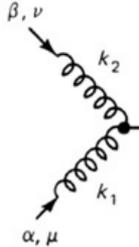
Le uniche differenze sono:

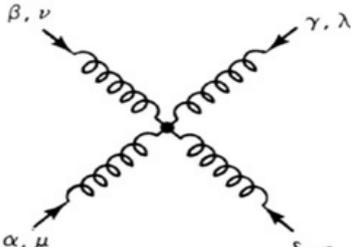
la costante di accoppiamento  $e$  è sostituita da  $g_s$ ,  
nell'ampiezza forte c'è in più "il fattore di colore"

$$c_F = \frac{1}{4} [c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1] \times [c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4]$$

<sup>2</sup>Per quark e antiquark dello stesso sapore c'è anche il grafico nel canale  $s$ .

Quark-gluon (  ):  $\frac{-ig_s}{2} \lambda^a \gamma^\mu$

Three gluon (  ):  $-g_s f^{abc} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu]$

Four gluon (  ):  $-ig_s^2 [f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\delta\beta\eta} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho})]$

(summation over  $\eta$  implied.)

Figure 9.5: Fattori di vertice. Per il vertice a tre gluoni i momenti dei gluoni ( $k_1, k_2, k_3$ ) sono assunti che puntano verso il vertice. Qualora uno o più di essi puntino nell'altra direzione occorre cambiare il loro segno.

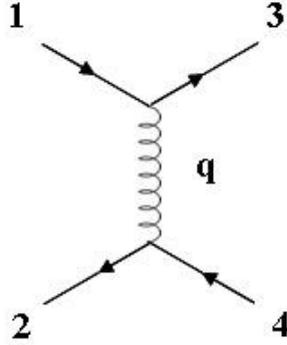


Figure 9.6: Scattering quark- antiquark all'ordine più basso.

Il potenziale (di breve distanza) dell'interazione quark-antiquark (e quark-quark) è, perciò, anch'esso di tipo coulombiano con la differenza, rispetto a quello elettromagnetico, che  $\alpha$  è sostituita da  $c_F \alpha_s$

$$V_{q\bar{q}} = -c_F \frac{\alpha_s}{r}$$

Esso sarà, dunque, attrattivo quando il fattore di colore  $c_F$  è positivo.

Un quark e un antiquark si possono presentare in uno stato di ottetto o di singoletto di colore. E' evidente che la simmetria di colore comporta che il fattore di colore risulti essere lo stesso per tutti i membri dell'ottetto. Calcoliamolo, a titolo di esempio, per la coppia  $R\bar{G}$ . In questo caso abbiamo

$$c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in quanto la conservazione al vertice del colore richiede che il quark e l'antiquark uscenti sia ancora  $R$  e  $\bar{G}$ . si ha, dunque,

$$\begin{aligned} c_F &= \frac{1}{4} \left[ (1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0, 1, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha \end{aligned}$$

Nel somma su  $\alpha$  le uniche due matrici che contribuiscono, perché hanno diverso da zero sia  $\lambda_{11}$  che  $\lambda_{22}$ , sono la terza e l'ottava, per cui

$$c_F = \frac{1}{4} \{ \lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8 \} = \frac{1}{4} \left\{ (1)(-1) + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} = -\frac{1}{6}$$

E' facile verificare che si ottiene lo stesso risultato per una qualunque altra configurazione di colore dell'ottetto per la coppia quark-antiquark.

Consideriamo ora il caso della coppia (ancora  $u\bar{d}$  per esempio) in uno stato di singoletto di colore

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$$

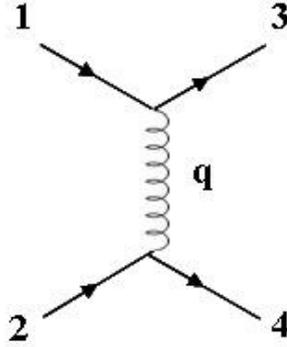


Figure 9.7: Scattering quark-quark all'ordine più basso.

Considerando che anche il quark e l'antiquark uscenti saranno in uno stato di singoletto di colore, abbiamo nove diverse combinazioni possibili

$$\begin{aligned} R\bar{R} &\rightarrow R\bar{R}, & R\bar{R} &\rightarrow G\bar{G}, & R\bar{R} &\rightarrow B\bar{B} \\ G\bar{G} &\rightarrow R\bar{R}, & G\bar{G} &\rightarrow G\bar{G}, & G\bar{G} &\rightarrow B\bar{B} \\ B\bar{B} &\rightarrow R\bar{R}, & B\bar{B} &\rightarrow G\bar{G}, & B\bar{B} &\rightarrow B\bar{B} \end{aligned}$$

per cui

$$c_F = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (\lambda_{ij}^\alpha \lambda_{ji}^\alpha) = \frac{1}{12} Tr(\lambda^\alpha \lambda^\alpha) = \frac{4}{3}$$

essendo

$$Tr(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta^{\alpha\beta}$$

e, quindi,

$$Tr(\lambda^\alpha \lambda^\alpha) = 16$$

Poiché  $c_F$  è positivo, la forza è attrattiva e il potenziale (di breve distanza) è proprio quello da noi visto nel corso di Fisica delle Particelle Elementari

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$$

D'altra parte, come abbiamo visto a suo tempo, un coppia  $q\bar{q}$  in uno stato di singoletto di colore forma un mesone.

### 9.3.2 Caso quark-quark

Possiamo, ad esempio, ipotizzare che si tratti dello scattering  $u + d \rightarrow u + d$  (grafico in figura 9.7<sup>3</sup>). L'ampiezza è data da

$$\mathfrak{M} = -\frac{g_s^2}{4} \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3) \gamma^\mu u(1)] \times [\bar{u}(4) \gamma_\mu \bar{u}(2)] \times [c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1] \times [c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2]$$

<sup>3</sup>Nel caso di quark identici c'è un secondo grafico che si ottiene da quello in figura incrociando le particelle in uscita.

Quest'ampiezza, a parte il fattore di colore

$$c_F = \frac{1}{4} \left[ c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1 \right] \times \left[ c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2 \right]$$

e la sostituzione di  $g_s$  a  $e$ , è del tutto simile a quella elettromagnetica di  $e^- \mu^-$ , per cui il potenziale (di breve distanza) sarà del tipo

$$V_{qq} = c_F \frac{\alpha_s}{r}$$

Questa volta la forza è attrattiva se  $c_F$  è negativo e repulsiva se è positivo. La coppia di quark può stare in uno stato di tripletto o di sestetto di colore; infatti

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$$

Gli stati del tripletto sono antisimmetrici (si veda l'esercizio ... del capitolo ... del corso di Fisica delle Particelle Elementari)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (RG - GR); \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (RB - BR); \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (GB - GR)$$

mentre quelli del sestetto sono simmetrici

$$RR; \quad GG; \quad BB; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (RG + GR); \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (RB + BR); \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (GB + GR)$$

Facciamo prima l'ipotesi che lo stato di colore dei due quark appartenga al sestetto e sia, per esempio,  $RR$  (tutti gli altri daranno lo stesso risultato); si ha

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} c_F &= \frac{1}{4} \left[ (1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[ (1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{11}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{11}^8) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vediamo ora il caso della coppia di quark in uno stato di sestetto di colore, per esempio  $\frac{1}{\sqrt{2}} (RG - GR)$ . Si hanno quattro diversi possibili grafici corrispondenti a

$$RG \rightarrow RG; \quad GR \rightarrow R; \quad RG \rightarrow GR; \quad GR \rightarrow GR;$$

Allora

$$\begin{aligned}
c_F &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0, 1, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - \left[ (0, 1, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad - \left[ (1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0, 1, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \left[ (0, 1, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (1, 0, 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{8} \{ \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{11}^\alpha \} \\
&= \frac{1}{4} \{ \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha \} \\
&= \frac{1}{4} \{ \lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8 - \lambda_{12}^1 \lambda_{21}^1 - \lambda_{12}^2 \lambda_{21}^2 \} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ -1 + \frac{1}{3} - 1 - 1 \right\} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Si vede che la forza tra due quark in uno stato di tripletto di colore risulta attrattiva. Si potrebbe, pertanto, aspettare che due quark possano formare uno stato legato del tutto esotico (con carica di colore e numero barionico frazionario) che però non è mai stato osservato e si assume non esista. Questo risultato aiuta, però, a capire l'esistenza dei barioni come stati legati a tre quark. In questo caso lo stato di colore può appartenere a un singoletto completamente antisimmetrico, a un decupletto completamente simmetrico o a uno di due ottetti. Nel caso del decupletto ogni coppia di quark costituirebbe un doppietto simmetrico di colore che è repulsivo. Nel caso degli ottetti avremmo talune coppie in uno stato di tripletto di colore e altre in uno stato di sestetto e quindi avremmo in parte attrazione ed in parte repulsione. Solo nello stato di singoletto abbiamo sempre attrazione in quanto ogni coppia è in uno stato di tripletto (antisimmetrico) di colore e questo, ancora una volta, è a favore dell'assunzione che i barioni siano in uno stato di singoletto di colore.

## 9.4 La costante di accoppiamento forte che corre

Una volta stabilito

- uno schema di rinormalizzazione e
- una scala di rinormalizzazione  $\mu$ ,

le predizioni della QCD sono espresse in termini della costante di accoppiamento forte  $\alpha_s$ , definita, in modo analogo a  $\alpha_{em}$  ( $\equiv \alpha$ ), come

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$$

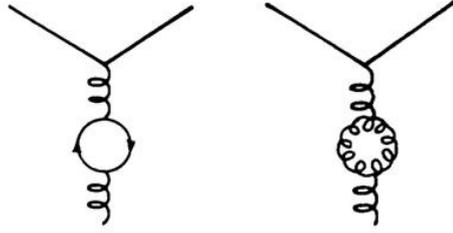


Figure 9.8: Loop di polarizzazione del vuoto in QCD.

Essa è una "costante che corre" così come lo è  $\alpha$ .

Ricordiamo, infatti, che nel paragrafo 5.2.3 abbiamo visto che la carica dell'elettrone o, equivalentemente, la costante di struttura fine deve essere vista come una funzione della distanza di interazione. Infatti la polarizzazione del vuoto dà luogo ad un effetto di schermo della carica, effetto che diminuisce al crescere del quadrimomento trasferito per cui  $\alpha$  è una funzione di  $Q^2$  e, in particolare, cresce al crescere di  $Q^2$  secondo la relazione 5.24

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - z_f \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

ove

$$z_f = n_l + 3\frac{4}{9}n_+ + 3\frac{1}{9}n_-$$

con  $n_l$  numero di leptoni carichi,  $n_+$  numero di quark di carica  $+2/3$  e  $n_-$  numero di quark di carica  $-1/3$  che partecipano al particolare valore di  $Q^2$ .

L'effetto della polarizzazione del vuoto si fa sentire anche sulla costante di accoppiamento forte  $\alpha_s$ . L'andamento con  $Q^2$  di  $\alpha_s$  risulta, tuttavia, molto differente da quello di  $\alpha(Q^2)$ . Infatti, diversamente dalla QED, la QCD è una teoria non abeliana e questo comporta, come abbiamo visto, che i bosoni di campo portino carica di colore e possano, pertanto, accoppiarsi tra loro. La manipolazione dei grafici per calcolare  $\alpha_s(Q^2)$  è simile a quella della QED però, questa volta, i loop da considerare sono di due tipi: un loop di quark e un loop di gluoni, come è indicato in figura 9.8. Il risultato al quale si perviene per  $\alpha_s(Q^2)$  è formalmente simile a quello per  $\alpha(Q^2)$ , però con una differenza cruciale: il coefficiente del termine  $\ln(Q^2/\mu^2)$  non è lo stesso.

Il loop di quark a parte un fattore di colore, contribuisce nello stesso modo del loop di elettroni nel caso QED e, poiché l'interazione quark-gluone non dipende dal sapore, tale loop dà lo stesso contributo per ogni sapore di quark. Così, si tiene conto del loop di quark semplicemente sostituendo  $\alpha(\mu^2)/(3\pi)$  con  $(1/2)\alpha_s(Q^2)/(3\pi)$  per ogni sapore. Il fattore 1/2 dipende semplicemente dalla diversa definizione di  $\alpha$  e  $\alpha_s$ . In QED l'accoppiamento tra due quark di carica  $q_1$  e  $q_2$  (in unità  $e$ ), attraverso lo scambio di un fotone è  $q_1q_2\alpha$ , mentre in QCD l'accoppiamento tra due quark attraverso lo scambio di un gluone è  $(1/2)c_1c_2\alpha_s$ , dove  $c_1$  e  $c_2$  sono i coefficienti di colore associati ai due verici. Il loop di quark produce, dunque, un effetto di schermo della carica forte del tutto analogo a quello prodotto dal loop di elettroni per la carica elettrica.

Il loop di gluoni contribuisce anch'esso un termine  $\alpha_s(Q^2)/(3\pi)$  moltiplicato, però, per un fattore di segno opposto a quello del loop di quark; ne risulta un effetto di antischermo.

In definitiva l'espressione di  $\alpha_s(Q^2)$ , ottenuta considerando soltanto i grafici a un loop, si può ricavare formalmente da quella di  $\alpha(\mu^2)$  sostituendo il fattore che moltiplica  $\ln(Q^2/\mu^2)$  con

$$\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \left( -\frac{2}{3}n_f + 11 \right)$$

ove  $n_f$  è il numero di sapori che effettivamente contribuiscono al loop; in pratica quelli dei quark con massa  $m_f < |Q|$ . Si ha

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi} (33 - 2n_f) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (9.6)$$

Si vede così che, essendo al massimo  $n_f = 6$ , il fattore di  $\ln(Q^2/\mu^2)$  è sempre positivo e, quindi,  $\alpha_s(Q^2)$  decresce al crescere di  $Q^2$ . Per  $Q^2 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ ; è questa la proprietà nota come *libertà asintotica*. L'interazione di colore tra quark tende a zero al tendere a zero della distanza, cioè a brevissima distanza i quark sono sostanzialmente liberi.

In modo più corretto  $\alpha_s$  corre secondo la relazione

$$\ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) = \int_{\alpha_s(\mu)}^{\alpha_s(Q)} \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}$$

ottenuta integrando l'equazione del gruppo di rinormalizzazione (RGE).

La funzione  $\beta(\alpha_s)$  è calcolata usando teoria delle perturbazioni

$$\beta(\alpha_s) = - (b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + b_2\alpha_s^4 + \dots)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{33 - 2n}{12\pi} && \text{coefficiente a 1 loop} \\ b_1 &= \frac{153 - 19n}{24\pi^2} && \text{coefficiente a 2 loop} \end{aligned}$$

$n$  è, come abbiamo già detto, il numero dei sapori "attivi" (cioè tali che  $m_q \ll Q$ )

$b_i$  con  $i > 1$  dipende dallo schema di rinormalizzazione.

Nello schema  $\overline{MS}$

$$b_2 = \frac{2857 - \frac{5033}{9}n + \frac{325}{27}n^2}{128\pi^3}$$

All'ordine  $\alpha_s^3$

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_s) &= -b_{(n_f)}\alpha_s^2 \left[ 1 + b'_{(n_f)}\alpha_s + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right] \\ &= -\frac{(33 - 2n_f)}{12\pi}\alpha_s^2 \left[ 1 + \frac{\frac{1}{2}(153 - 19n)}{33 - 2n}\alpha_s + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right] \end{aligned}$$

(indipendente dallo schema di rinormalizzazione). Ad esempio, per  $n = 5$

$$\beta(\alpha_s) = -0,61\alpha_s^2 \left[ 1 + 1,26\frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right]$$

Trascurando i termini da  $\alpha_s^3$  in su, si trova

$$\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) = - \int_{\alpha_s(\mu)}^{\alpha_s(Q)} \frac{d\alpha_s}{b_{(n_f)}\alpha_s^2} = \frac{1}{b_{(n_f)}} \left[ \frac{1}{\alpha_s(Q)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu)} \right]$$

ovvero l'espressione

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s(\mu)}{1 + b_{(n_f)}\alpha_s(\mu) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} = \frac{\alpha_s(\mu)}{1 - \frac{(33-2n_f)}{12\pi}\alpha_s^2 \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}$$

che è proprio la relazione 9.6 vista in precedenza. Essa ci dice come varia  $\alpha_s$  ma non quanto vale! Per determinare il suo valore occorrono gli esperimenti.

Come per la costante di struttura fine,  $\alpha_s^{-1}(Q^2)$  dipende linearmente da  $\ln Q^2/\mu^2$  negli intervalli di  $Q^2$  compresi tra due soglie corrispondenti a diversi valori di  $n_f$

$$\alpha_s^{-1}(Q^2) = \alpha_s^{-1}(\mu^2) + \frac{33-2n_f}{12\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$$

Per  $Q^2$  sufficientemente piccolo,  $\alpha_s(Q^2)$  diventa molto grande. Infatti il denominatore della 9.6 diventa nullo per  $Q^2 = \Lambda_{QCD}^2 \equiv \Lambda^2$  con

$$\Lambda^2 = \mu^2 e^{-\frac{12\pi}{(33-2n_f)\alpha_s(\mu^2)}} \quad (9.7)$$

Usando questo risultato possiamo scrivere

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad (9.8)$$

In questo modo abbiamo eliminato dall'espressione di  $\alpha_s$  che corre il parametro  $\mu^2$ , che deriva dal processo di rinormalizzazione, sostituendolo con il parametro  $\Lambda$ , che ha le dimensioni di una massa e che deve essere determinato sperimentalmente<sup>4</sup>. Si trova

$$\Lambda^{(3)} \approx 400 MeV \quad \text{e} \quad \Lambda^{(4)} \approx 200 MeV$$

in corrispondenza, rispettivamente, al contributo di tre e quattro sapori al loop di quark.

$\Lambda$  è un parametro importante. Esso separa sostanzialmente due diversi regimi di energia. Per energie aldisopra di  $\Lambda$  la costante di accoppiamento è piccola ed è possibile un approccio perturbativo ai processi di QCD; questo approccio viene, però, meno ad energie minori di  $\Lambda$  alle quali la costante di accoppiamento diventa grande. La tendenza attuale per descrivere  $\alpha_s$  che corre

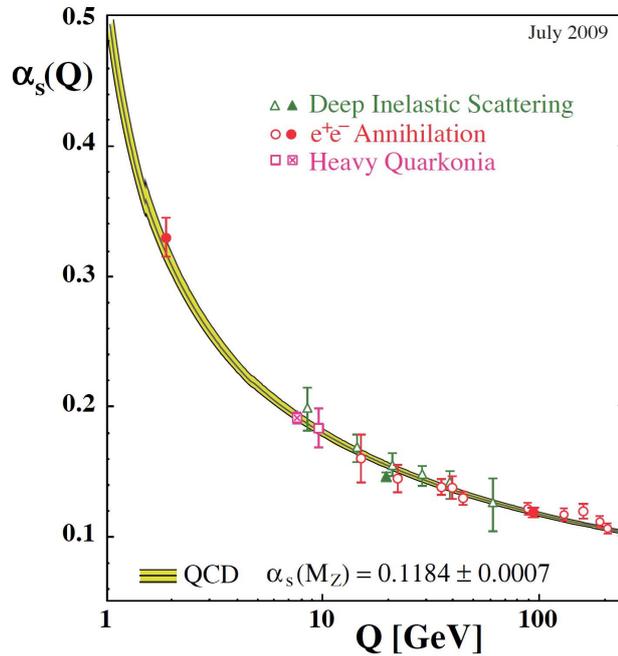
<sup>4</sup>Più in generale,  $\Lambda$  ( $\equiv \Lambda_{QCD}$ ) è definita da

$$\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) = - \int_{\alpha_s(Q)}^{\infty} \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}$$

dalla quale al "leading order" si ricava proprio

$$\alpha_s(Q) = \frac{1}{b_{(n_f)} \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}$$

essendo a tale ordine  $\beta(\alpha_s) = -b_{(n_f)}\alpha_s^2$ .

Figure 9.9: Run di  $\alpha_s$  (da PDG 2010, QCD review).

è tuttavia quella di far riferimento, piuttosto che a  $\Lambda$ , a  $\alpha_s(M_Z^2)$  cioè al valore di  $\alpha_s$  alla scala  $\mu = M_Z$  abbastanza grande da giustificare l'approccio perturbativo..

La costante  $\alpha_s(Q^2)$  è stata ricavata da un gran numero di risultati sperimentali. La sua determinazione è, però, in generale meno accurata di quella della costante di struttura fine, in particolare a basse energie, quando non è possibile un approccio perturbativo ed i calcoli di QCD sono molto più problematici.  $\alpha_s$  si ricava, per esempio, dalla probabilità (proporzionale ad  $\alpha_s$ ) di osservare un terzo jet nell'annichilazione  $e^+e^-$  in adroni, dalla deviazione del rapporto  $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$  dal valore  $R = 3 \sum Q_f^2$ , dalla violazione dell'invarianza di scala nella diffusione profondamente anelastica di leptoni su nucleoni.

Nella figura 9.9 è mostrato l'andamento di  $\alpha_s$  ricavato da alcuni processi realizzati ad energie comprese tra 1 e 200 GeV. La banda grigia rappresenta l'incertezza teorica. Il valore di  $\alpha_s$  ad alcune centinaia di MeV è intorno a 10 mentre è meno di 1 già a 1 GeV.

## 9.5 La simmetria approssimata di chiralità

Nel limite di massa nulla dei quark, la QCD presenta *simmetria chirale*. Essa riguarda trasformazioni tra quark di diverso sapore piuttosto che di diverso colore come accade per  $SU(3)_C$ . Riprendiamo la 9.4 limitatamente ai soli tre quark  $u$ ,  $d$  e  $s$ , che possiamo considerare veramente leggeri (ossia, per i quali

possiamo assumere  $m = 0$ )

$$\mathcal{L} = \sum_{f=u,d,s} \bar{\psi}_\alpha^f i\gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta^f$$

Questa lagrangiana è simmetrica per rotazioni nello spazio del sapore. Essa lo sarebbe anche se fossero presenti termini di massa del tipo  $m\bar{\psi}\psi$ , tuttavia, nel limite di massa nulla, la lagrangiana si separa in due parti, una scritta in termini delle componenti sinistrorse dei campi e l'altra di quelle destrorse, ognuna delle quali possiede separatamente tale simmetria

$$\mathcal{L} = \left( \bar{\psi}_\alpha^f \right)_L i\gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu)_{\alpha\beta} \left( \psi_\beta^f \right)_L + \left( \bar{\psi}_\alpha^f \right)_R i\gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu)_{\alpha\beta} \left( \psi_\beta^f \right)_R$$

(sottintendendo la somma per  $f = u, d, s$ ). Questo non sarebbe accaduto se vi fossero stati termini di massa. Tale lagrangiana ha dunque una simmetria  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  di sapore detta *simmetria chirale*. Le correnti conservate sono

$$J_{\mu,\delta}^L = \bar{\psi}_L \gamma_\mu t_\delta \psi_L \quad \text{e} \quad J_{\mu,\delta}^R = \bar{\psi}_R \gamma_\mu t_\delta \psi_R$$

ove, ora,

$$\psi_{L(R)} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{L(R)}$$

e i  $t_\delta$  ( $\delta = 1, \dots, 8$ ) sono i generatori del gruppo  $SU(3)_f$  che agiscono sugli indici di sapore. Alternativamente si possono considerare come correnti conservate le *correnti vettoriale e assiale*, ottenute sommando e sottraendo le due precedenti,

$$J_{\mu,\delta}^V = \bar{\psi} \gamma_\mu t_\delta \psi \quad \text{e} \quad J_{\mu,\delta}^A = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 t_\delta \psi$$

$$\partial_\mu J_{\mu,\delta}^V = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu J_{\mu,\delta}^A = 0$$

Queste, però, sono correnti riferite a trasformazioni di quark che, come sappiamo, non sono osservabili come particelle libere. A livello sperimentale osserviamo processi legati a correnti di transizione di adroni. Per capire il legame tra le correnti degli adroni e le precedenti, apriamo una parentesi considerando le correnti coinvolte nel decadimento beta del neutrone anche se nel caso specifico si tratta di un processo debole. Nel decadimento  $\beta$  del neutrone è coinvolta sia una corrente vettoriale che una corrente assiale e tali correnti sono le stesse di quelle conservate dalla simmetria di chiralità. Per la transizione  $n \rightarrow p$  l'elemento di matrice della corrente vettoriale (la quale coinvolge un operatore di salita nello spazio dell'isospin) si può scrivere in modo del tutto generale come

$$\langle p | J_\mu^V(0) | n \rangle = \bar{u}_p [f_1^V(q^2) \gamma_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu f_2^V(q^2)] u_n$$

ove

$$q = p_n - p_p$$

In accordo con la conservazione di  $J^V$ , il prodotto scalare di tale elemento di matrice con  $q_\mu$  dovrebbe risultare nullo. Si ha

$$q^\mu \langle p | J_\mu^V(0) | n \rangle = f_1^V(q^2) \bar{u}_p \gamma_\mu (p_n^\mu - p_p^\mu) u_n = f_1^V(q^2) (m_n - m_p) \bar{u}_p u_n$$

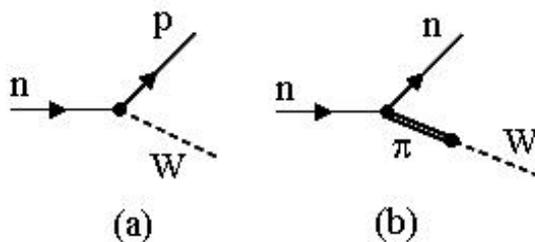


Figure 9.10: (a) Vertice  $n-p-W$ . (b) Correzione al vertice  $n-p-W$  dovuta alle interazioni forti.

essendo, per l'equazione di Dirac,

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) = 0$$

Si vede, così, che tale prodotto è effettivamente nullo nel limite  $m_n = m_p$ , che è quanto ci si aspetta nell'approssimazione chirale in base alla quale i quark  $u$  e  $d$  hanno massa nulla e sono, quindi, degeneri.

Anche l'elemento di matrice della corrente assiale può essere scritto in termini di due fattori di forma

$$\langle p | J_\mu^A(0) | n \rangle = \bar{u}_p [f_1^A(q^2) \gamma_\mu \gamma^5 + i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma^5 f_2^A(q^2)] u_n \quad (9.9)$$

Questa volta il prodotto scalare per  $q^\mu$  fornisce

$$q^\mu \langle p | J_\mu^A(0) | n \rangle = -(m_n + m_p) f_1^A(q^2) \bar{u}_p \gamma^5 u_n$$

Esso sarebbe nullo solo se fosse  $f_1^A(q^2) = 0$ ; sappiamo, però, che non è vero. Infatti, la corrente adronica coinvolta nel decadimento beta del neutrone è del tipo

$$\bar{u}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma^5) u_n$$

ove  $C_A \simeq 1$  e  $C_A = -1,26$  e  $C_A \equiv f_1^A(q^2 \rightarrow 0)$ . Sembrerebbe dunque che, nonostante la simmetria chirale sia almeno per il doppietto  $u, d$  abbastanza buona, la divergenza di  $J_\mu^A$  sia tutt'altro che zero. In realtà se tiene conto del contributo delle interazioni forti, al semplice vertice  $n-p-W$  (figura 9.10a) possiamo aggiungere almeno un contributo del tipo rappresentato in figura 9.10b, nel quale il neutrone emette un pione trasformandosi in protone e il pione a sua volta converte in  $W$ . L'ampiezza di questo processo aggiuntivo può essere calcolata come prodotto di tre termini:

- l'ampiezza del processo forte  $n \rightarrow p + \pi$ ,
- il propagatore del pione,
- l'ampiezza del  $\pi$  che si trasforma in  $W$ .

La prima ampiezza, che è di tipo pseudoscalare, può essere scritta in termini di una teoria di campo come

$$ig_{\pi N} \bar{u}_p \gamma^5 u_n$$

dove  $g_{\pi N}$  è una costante di accoppiamento effettiva. Il propagatore del pione è  $i/(q^2 - m_\pi^2)$ . In quanto alla transizione debole  $\pi \rightarrow W$ , essendo il pione uno pseudoscalare, la corrente di transizione è assiale ed il suo elemento di matrice (che è lo stesso che si incontra nel decadimento leptonic del pione, è semplicemente

$$\langle 0 | J_\mu^A | \pi \rangle = i f_\pi q_\mu$$

Tale elemento di matrice è infatti un vettore e l'unico vettore al quale esso può essere proporzionale è il quadrimomento del  $\pi$ , ossia  $q_\mu$ . La costante di proporzionalità  $f_\pi$  è definita per  $q^2 = m_\pi^2$  (in generale è una funzione di  $q^2$  per un pione virtuale). Mettendo insieme i tre fattori otteniamo l'ampiezza

$$-f_\pi g_{\pi N} \frac{q_\mu}{q^2 - m_\pi^2} \bar{u}_p \gamma^5 u_n$$

L'ampiezza complessiva è la somma di questa e della 9.9. Nel limite di validità dell'approssimazione chirale, essendo conservata la corrente assiale, ci aspettiamo allora che il prodotto di tale ampiezza complessiva per  $q_\mu$  risulti nullo, ovvero, considerando nulla la massa del pione,

$$[-(m_p + m_n) C_A - f_\pi g_{\pi N}] \bar{u}_p \gamma^5 u_n = 0$$

avendo posto  $f_1^A(q^2) = C_A$  nel limite di piccoli valori di  $q^2$ . Perché l'uguaglianza sia verificata si deve annullare il coefficiente in parentesi quadra, ovvero deve valere la relazione

$$C_A = -\frac{f_\pi g_{\pi N}}{m_p + m_n}$$

nota come relazione di Goldberger-Treiman. Le costanti  $f_\pi$  e  $g_{\pi N}$  come pure  $C_A$  sono misurate: Si trova che la relazione di Goldberger-Treiman è verificata entro qualche percento<sup>5</sup>. La corrente assiale si può dunque considerare approssimativamente conservata (PCAC: partially conserved axial current).

## 9.6 Masse dei quark e degli adroni

Finora abbiamo assunto che i quark abbiano massa nulla cosicché la lagrangiana di QCD gode di simmetria chirale e simmetria rispetto al sapore. La simmetria di sapore è presumibilmente rotta spontaneamente così che i quark acquistino massa con il meccanismo di higgs elettrodebole e/o da effetti non perturbativi della rottura spontanea della simmetria chirale. Poiché si suppone che, con l'eccezione del top<sup>6</sup>, i quark non esistano liberi, le loro masse non sono masse nel senso usuale della grandezza per la quale è stabilito un preciso processo di misura ma devono essere considerate semplicemente come parametri della lagrangiana da determinarsi in base a risultati di esperimenti. Tuttavia, mentre nella teoria delle perturbazioni il propagatore di un quark ha un polo a  $p^2 = m^2$ , nella teoria esatta presumibilmente non ha alcun polo. Così i calcoli perturbativi sono accettabili in regioni cinematiche corrispondenti a momenti trasferiti ed energie grandi in confronto a  $m$ , che può quindi essere trascurata. Le masse dei quark devono, allora, essere determinate essenzialmente da studi in regime non

<sup>5</sup>Vedi, per esempio, M. Nagy et al. arXiv:hep-ph/0406009v1, sett. 2004.

<sup>6</sup>Si veda il capitolo 8 per il significato di questa eccezione.

perturbativo. Si trova (vedi PDG 2010, al quale si rimanda per i diversi metodi di estrazione delle masse)

$$\begin{aligned}
 m_u &= 1,7 \div 3,3 MeV \\
 m_d &= 4,1 \div 5,8 MeV \\
 m_s &= 101_{-21}^{+29} MeV \\
 m_c &= 1,27_{-0,09}^{+0,07} GeV \\
 m_b &= 4,19_{-0,06}^{+0,18} GeV \\
 m_t &= 172,0 \pm 0,9 \pm 1,3 GeV \quad (\text{da osservazione diretta di eventi top})
 \end{aligned}$$

Vediamo da questa tabella che tre quark,  $c$ ,  $b$  e  $t$ , hanno masse più grandi di  $\Lambda_{QCD}$ , quindi per la determinazione della loro massa bisogna operare in una regione di energia dove  $\alpha_s$  è sostanzialmente minore di 1 al contrario di quanto avviene per i tre quark più leggeri. Come conseguenza, la massa dei quark più pesanti è meno sensibile di quella dei quark leggeri ai dettagli dei calcoli teorici che devono essere fatti per estrarla dai risultati sperimentali. Questo spiega la differenza nelle incertezze riportate in tabella.

### 9.6.1 Masse degli adroni

Per quanto riguarda le masse degli adroni, il loro calcolo a partire dalla QCD costituisce un problema di grande difficoltà proprio perché le masse degli adroni fatti di quark  $u$ ,  $d$  e  $s$  appartengono ad una regione di energia dove non sono possibili calcoli perturbativi. Infatti il calcolo è fatto con metodi numerici ricorrendo alla cosiddetta QCD su reticolo. Allo scopo sono necessari computers dedicati con enormi potenze di calcolo che attualmente sono dell'ordine delle decine di teraflops (1 teraflop equivale  $10^{12}$  operazioni a virgola mobile al secondo).

Qui vogliamo soltanto fare un semplice ragionamento sulla massa del nucleone per capire l'essenza della sua origine. La massa di un sistema di particelle interagenti è determinata dalla massa delle singole particelle e dall'energia associata ai campi di interazione. Consideriamo, per esempio, l'atomo di idrogeno. L'energia potenziale dell'elettrone nel campo coulombiano del protone è negativa e il suo modulo aumenta al diminuire della distanza dal protone. Il principio di indeterminazione determina la distanza media dell'elettrone dal protone e, quindi, le dimensioni dell'atomo di idrogeno. Infatti, ad una più ristretta localizzazione della funzione d'onda dell'elettrone corrisponde una più grande indeterminazione dell'impulso dell'elettrone stesso e, quindi, una sua maggiore energia cinetica media. Il raggio atomico è la distanza alla quale la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale ha un minimo. La massa dell'atomo è la somma delle masse del protone e dell'elettrone più il lavoro delle forze del campo per spostare i costituenti in una posizione nella quale l'interazione si annulli, ossia, nel caso presente, per portarli ad una distanza infinita. Questo lavoro, nel caso dell'atomo di idrogeno vale  $-13,6 eV$  ed è perciò di gran lunga più piccolo delle masse dei costituenti. Nel caso del protone, considerato come un sistema a tre quark si applica lo stesso concetto. I tre quark aggiustano le loro posizioni reciproche in modo che le distanze medie minimizzino l'energia e possiamo assumere questa distanza come raggio del protone ( $\sim 0,8 fm$ ). La massa del protone sarà la somma delle masse dei tre quark più il lavoro che occorre fare

sul sistema per portare i quark in una configurazione di non interazione. Questa volta, però, tale configurazione corrisponde a quella in cui i quark sono molto vicini l'uno all'altro e il lavoro è positivo<sup>7</sup> e rappresenta il contributo maggiore alla massa del protone. La scala della differenza di energia tra una interazione tra quark intensa ed una trascurabile è proprio  $\Lambda$ , che alla massa del protone vale  $\Lambda \simeq 300 \div 400 \text{ MeV}$ ; si ha perciò  $m_p \approx 3\Lambda \approx 1 \text{ GeV}$ . Facciamo anche una stima del raggio del protone. Possiamo scrivere l'energia del sistema dei tre quark come

$$E \sim 3p + kr$$

ove  $3p$  è l'energia cinetica dei tre quark (trascuriamo la loro massa) e  $kr$  è l'energia potenziale confinante<sup>8</sup>. Il principio di indeterminazione dà  $pr \approx 1$  e, quindi,  $p \sim 1/r$  per cui

$$E \sim \frac{3}{r} + kr$$

Il raggio del protone è il valore  $r_p$  di  $r$  che rende minima  $E$

$$\left( \frac{dE}{dr} \right)_{r_p} = -\frac{3}{r_p^2} + k = 0 \quad \longrightarrow \quad r_p \sim \sqrt{\frac{3}{k}}$$

$k$  possiamo stimarlo imponendo che l'energia minima sia pari alla massa del protone  $m_p \sim 1 \text{ GeV}$ , trovando  $k \sim (1/12) \text{ GeV}^2$ , pertanto

$$r_p \sim \sqrt{\frac{3}{k}} = 6 \text{ GeV}^{-1} \quad \longrightarrow \quad r_p \sim 1,2 \text{ fm}$$

Questo risultato pur essendo circa 1,5 volte il raggio misurato è piuttosto buono se si considera l'estrema semplificazione del modello di calcolo.

Le considerazioni fatte per il protone, e che ci dicono che la quasi totalità della sua massa (e, quindi, di tutta la materia ordinaria) è determinata dall'energia del campo di colore, portano a risultati simili per tutti gli adroni che hanno i quark  $u$  e  $d$  quali quark di valenza. Nel caso sia  $s$  il quark di valenza si ha un contributo apprezzabile dalla massa del quark, mentre quando il quark di valenza è  $c$  o  $b$  questo contributo diventa dominante.

## 9.7 Test sperimentali della QCD (file QCD\_test.pdf)

### 9.7.1 Sezione d'urto $e^+e^-$ in adroni

Ad energie abbastanza grandi da localizzare il processo primario in un piccolo volume nello spazio-tempo, l'adronizzazione segue dopo un tempo troppo grande per influire sulla probabilità di produzione di  $q\bar{q}$ .

Per  $\sqrt{s} \ll M_z$  domina  $\gamma$  nel canale  $s$  e, all'ordine perturbativo più basso (fig. 9.11),

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum Q_q^2$$

<sup>7</sup>Si ricordi l'analogia con la molla usata per descrivere la forza tra quark che cresce con la separazione. Avvicinare i quark equivale alla molla che si scarica e cede energia.

<sup>8</sup>Si ricordi il corso di Particelle Elementari.

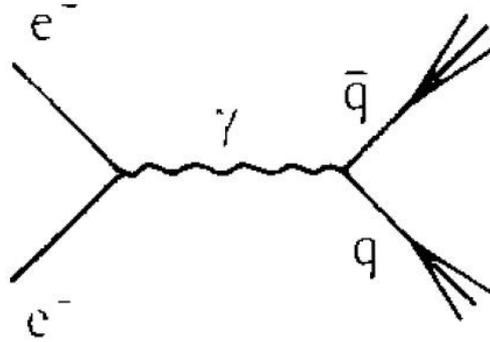


Figure 9.11: Grafico fondamentale per la produzione di adroni nell'interazione  $e^+e^-$  per  $\sqrt{s} \ll M_Z$ .

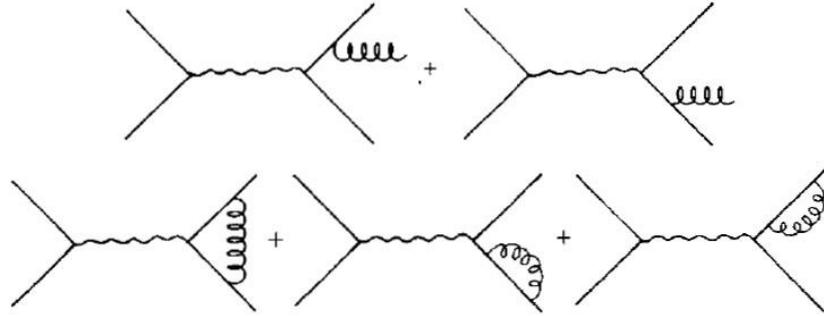


Figure 9.12: Correzioni  $O(\alpha_s)$  alla sezione d'urto  $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$ .

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

A  $\sqrt{s} = 34\text{GeV}$  (u, d, s, c, b) si ha

$$R_{\text{aspettato}} = \frac{11}{3} = 3,67$$

$$R_{\text{mis}} = 3,9 > \frac{11}{3}$$

La correzione elettrodebole, dovuta allo scambio di  $Z^0$  invece del fotone, è  $\Delta R_Z \sim 0,05$  non sufficiente per giustificare la discrepanza, che rimane comunque dell'ordine del 5%. Bisogna tener conto delle correzioni di QCD rappresentate in fig. 9.12.

Si trova così (nello schema  $\overline{MS}$  e trascurando la correzione elettrodebole)

$$R = 3 \sum_q Q_q^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\sqrt{s})}{\pi} + 1,41 \left[ \frac{\alpha_s(\sqrt{s})}{\pi} \right]^2 + O(\alpha_s^3) \right\}$$

Il confronto con dati è mostrato in fig. 9.13.

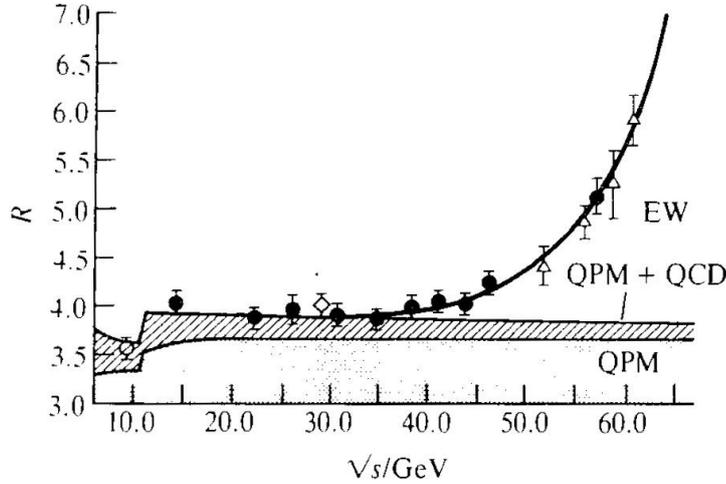


Figure 9.13: Dati: CESR, PETRA, PEP, TRISTAN. Curva: fit con correzioni QCD e con contributo elettrodebole.

Usando la predizione QCD ordine  $\alpha_s^2$  e tenuto conto anche della correzione elettrodebole è stato trovato

$$\alpha_s(34\text{GeV}) = 0,158 \pm 0,020$$

corrispondente a

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} = 440_{-200}^{+320} \text{MeV}$$

Il processo  $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$  può manifestarsi ad alta energia con la produzione di due o, anche, tre jet attraverso  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g \Rightarrow 3 \text{ jet}$ ; questo processo è soppresso di un fattore  $\alpha_s$  rispetto a  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ . La frazione

$$R_3 = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow 3 \text{ jet})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}$$

può essere misurata ed è utile per la determinazione di  $\alpha_s$ . Dati relativi a  $R_3$  sono mostrati in fig. 9.14.

La dipendenza di  $R_3$  da  $\sqrt{s}$  è determinata da quella di  $\alpha_s$  e dimostra chiaramente il running di  $\alpha_s$ .

Da un'analisi di OPAL degli eventi a tre jet si trova

$$\alpha_s(M_Z) = 0,118 \pm 0,008$$

### 9.7.2 Violazioni dello scaling nella diffusione profondamente anelastica

La diffusione profondamente anelastica di leptoni su adroni (grafico in figura 9.15) è un

- potente strumento di test di pQCD e permette una
- misura precisa di  $\alpha_s$ .

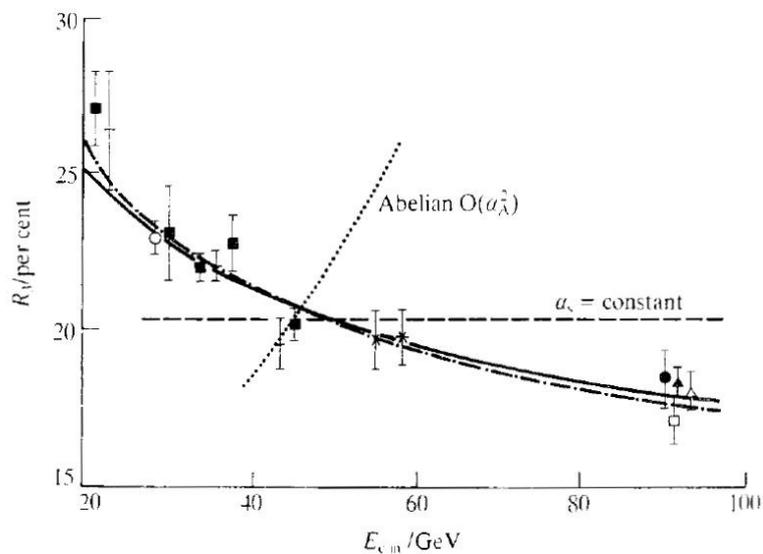


Figure 9.14:  $R_3$  (a  $y = 0,08$ ). Dati da JADE, TASSO, Mk-II, AMY, VENUS, OPAL, DELPHI, L3, ALEPH. Linee: fit QCD (continua  $\mu^2 = s$ ,  $\Lambda = 255MeV$ ; tratto e punto  $\mu^2 = 0,0017s$ ,  $\Lambda = 111MeV$ )

Si tratta di un processo inclusivo per il quale

- non c'è alcun problema di "jet definition" e
- non esiste il problema del collegamento di  $\sigma_{partoniche}$  con  $\sigma_{adroniche}$  misurate.

Dai dati si ricavano distribuzioni in momento di quark e gluoni.

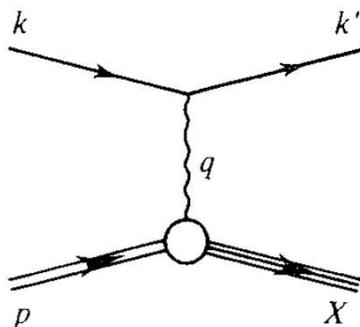


Figure 9.15: Grafico per lo scattering profondamente anelastico leptone-adrone.

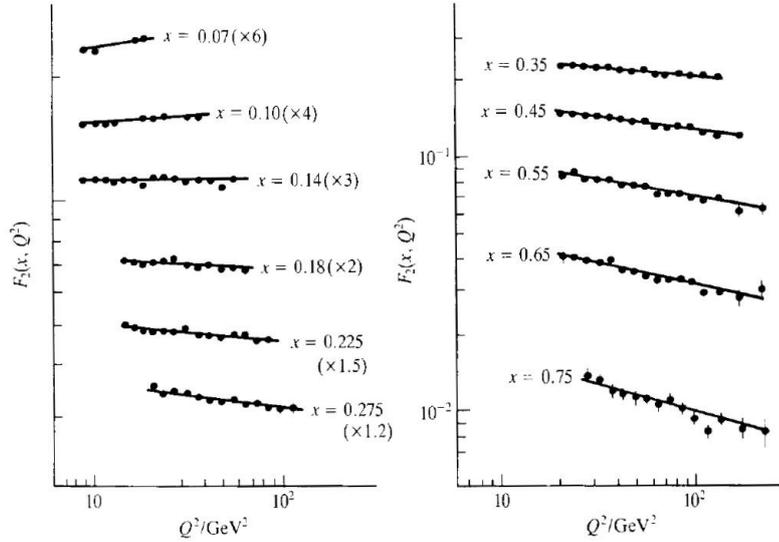


Figure 9.16:  $F_2^{em}(x, Q^2)$  per  $\mu p$  (dati BCDMS). urve: fit QCD next-to-leading order.

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \sigma_{lept\_carichi} &= \sigma(F_1, F_2) & \sigma_\nu &= \sigma(F_1, F_2, F_3) \\ F_i &= F_i(x, Q^2) & Q^2 &= -q^2 & x &= \frac{Q^2}{2p \cdot q} \end{aligned}$$

Lo scaling di Bjorken comporta

$$F_i(x, Q^2) \longrightarrow F_i(x)$$

Si osservano sistematiche violazioni dello scaling; in particolare (fig. 9.16)  $F_2^{em}(x, Q^2)$

- cresce al crescere di  $Q^2$  per piccoli valori di  $x$
- decresce al crescere di  $Q^2$  per grandi valori di  $x$

Le correzioni di QCD al grafico 9.15 permettono di rendere conto di tali violazioni. Il fit dei dati in figura 9.16 dà

$$\Lambda^{(4)}_{\overline{MS}} = 205 \pm 22 \pm 60 \text{ MeV}$$

corrispondente a

$$\alpha_s(Q^2 = 100 \text{ GeV}^2) = 0,156 \pm 0,004 \pm 0,011$$

La ragione per le violazioni dello scaling sta nel fatto che i quark sono stati considerati come particelle senza struttura non interagenti mentre, invece, l'interazione c'è e i grafici principali che la descrivono sono quelli in figura 9.17:

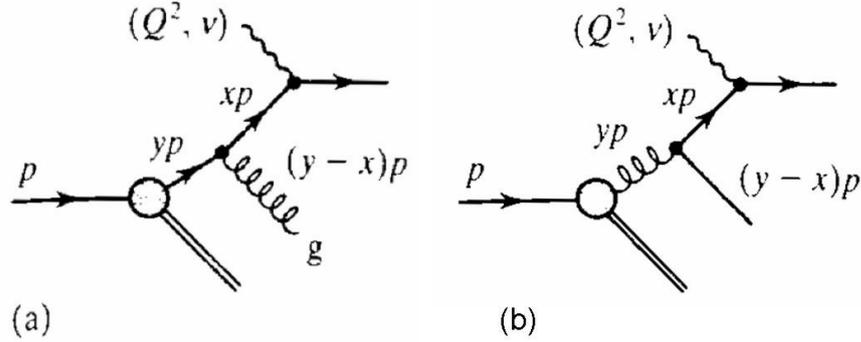


Figure 9.17: Correzioni di QCD al semplice modello a partoni.

- il grafico in fig 9.17a) implica che (almeno per  $x \geq 0,3$ ) la distribuzione dei quark devia verso valori più piccoli di  $x$  al crescere di  $Q^2$ ,
- il grafico in fig 9.17b) deriva dalla presenza di gluoni con funzione di distribuzione  $G(x, Q^2)$ . La creazione da parte di un gluone di una coppia  $q\bar{q}$  alimenta la distribuzione di quark,  $q^f(x, Q^2)$ , di sapore  $f$ ; allora, particolarmente a valori piccoli di  $x$ , la funzione di distribuzione cresce al crescere di  $Q^2$ .

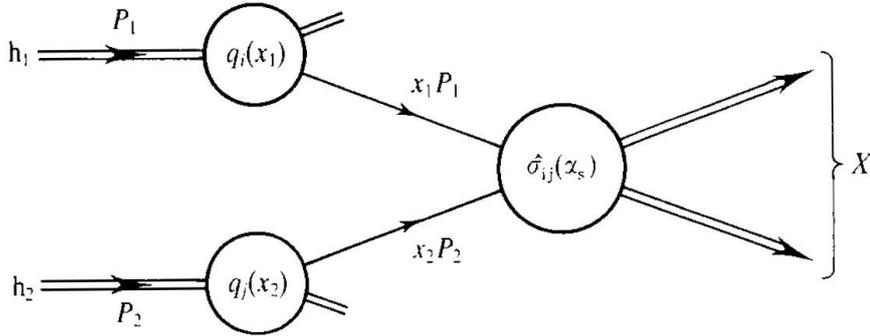
L'evoluzione delle funzioni di distribuzione di quark e gluoni, al variare di  $Q^2$ , è descritta dalle equazioni di Altarelli-Parisi<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dq^f(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q^f(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &\quad + G(y, Q^2) P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)] \\ \frac{dG(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [\sum_f q^f(y, Q^2) P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &\quad + G(y, Q^2) P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)] \end{aligned}$$

Le funzioni  $P_{ij}$  ("splitting functions") hanno un significato probabilistico. Per esempio  $P_{gq}(x/y)$  è la probabilità che un quark di momento  $yp$  emetta un gluone riducendo il suo momento a  $xp$ .

Le  $P_{ij}$  sono scritte (Altarelli-Parisi) come sviluppo perturbativo in  $\alpha_s$ . Se  $q^f(x, Q^2)$  e  $G(x, Q^2)$  sono note sul range completo di  $x$  a un particolare valore di  $Q^2$ , possono essere determinate ad un qualunque altro valore di  $Q^2$  grazie alle equazioni di Altarelli-Parisi.

<sup>9</sup>Le violazioni dello scaling sono state predette teoricamente da Y. L. Dokshitzer (1977), V. N. Gribov e L. N. Lipatov (1975), G. Altarelli e G. Parisi (1977) e le equazioni di evoluzione delle funzioni di distribuzione sono note più in generale come "DGLAP evolution equations".


 Figure 9.18: Diagramma schematico per un processo ad alto  $p_T$  tra due adroni.

### 9.7.3 Processi Drell-Yan e produzione di $W/Z$

Un adrone nel modello a partoni è assimilato ad un "sciame" di costituenti (quark di valenza, quark del mare, gluoni) che si muovono con distribuzioni di momento caratteristiche. L'assunzione fondamentale del modello è che le distribuzioni dei partoni siano universali (non dipendano dal processo)

Un processo di scattering "duro" tra due adroni avviene come schematizzato nella figura 9.18 La sezione d'urto è

$$\sigma(P_1, P_2) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 q_i(x_1, \mu) q_j(x_2, \mu) \hat{\sigma}_{ij}[p_1, p_2, \alpha_s(Q)] \quad (9.10)$$

ove:

- $p_1 = x_1 P_1$        $p_2 = x_2 P_2$
- $\hat{\sigma}_{ij}$  sezione d'urto elementare calcolata (ad alta energia) con la teoria delle perturbazioni,
- $q_i(x_1, \mu)$  funzione di distribuzione del partone  $i$ -esimo alla scala di fattorizzazione  $\mu$ , identificata semplicemente con la scala di rinormalizzazione che entra in  $\alpha_s(Q)$
- $Q$  scelta con una certa libertà intorno alla "scala naturale" del processo (per es.  $m(W/Z)$  per  $h_1 + h_2 \rightarrow W/Z + X$ )

Un cambiamento di scala è compensato dal cambiamento di  $\sigma_{ij}$  ma solo se  $\sigma_{ij}$  è esatta

Un processo di hard-scattering tra i più semplici è il processo alla Drell-Yan (visto a suo tempo)

$$h_1 + h_2 \rightarrow l_1 + l_2 + X$$

attraverso lo scambio di un  $\gamma$  virtuale nel canale  $s$ . In questo caso

$$\hat{\sigma}_{ij}(q\bar{q} \rightarrow l^+ + l^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} \frac{1}{N_c} e_{q_i}^2$$

ove

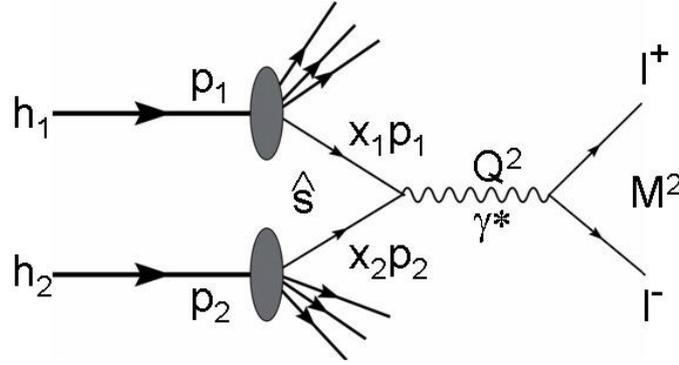


Figure 9.19: Processo Drell-Yan.

$$\hat{s} = x_1 x_2 s$$

$N_c = n^\circ \text{ colori}$  (un particolare  $q$  può annihilare solo con un  $\bar{q}$  di colore appropriato in modo da produrre la coppia non colorata  $l^+l^-$ )

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dM^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3M^2} \frac{1}{N_c} e_{q_i}^2 \delta(\hat{s} - M^2) \quad (9.11)$$

$$M = m(l^+l^-)$$

Allora, in accordo con la 9.10,

$$\frac{d\sigma}{dM^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3N_c M^2} \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 x_2 s - M^2) \times \left\{ \sum_i e_{q_i}^2 [q_i(x_1, Q) \bar{q}_i(x_2, Q) + \bar{q}_i(x_1, Q) q_i(x_2, Q)] \right\}$$

Esperimenti a bersaglio fisso e agli ISR hanno ottenuto risultati che hanno permesso di stabilire la validità del modello a partoni per processi DY. Da essi sono emerse alcune importanti proprietà:

- nei processi su nuclei  $\sigma(A)$  dipende linearmente da  $A$  ( $n^\circ$  di massa);
- la distribuzione angolare delle coppie di leptoni nel CM è essenzialmente  $1 - \cos^2 \theta$ ;
- le sezioni d'urto differenziali mostrano almeno approssimativamente di scalare (la QCD introduce variazioni logaritmiche)
- $\sigma(\pi^\pm N)$ ,  $\sigma(K^- N)$  e  $\sigma(\bar{p}N)$  risultano significativamente maggiori di  $\sigma(K^+ N)$  e  $\sigma(pN)$  il che mostra che lo scattering valenza-valenza domina sullo scattering valenza-mare.

Al grafico di annichilazione  $q\bar{q}$  (fig. 9.19) occorre però aggiungere termini derivanti dal contenuto gluonico degli adroni. Al NLO si hanno i grafici in figura 9.20 La sezione d'urto diventa allora

$$d\sigma_{NLO}^{DY} = K(s, M^2) d\sigma_{LO}^{DY}$$

ove  $K$

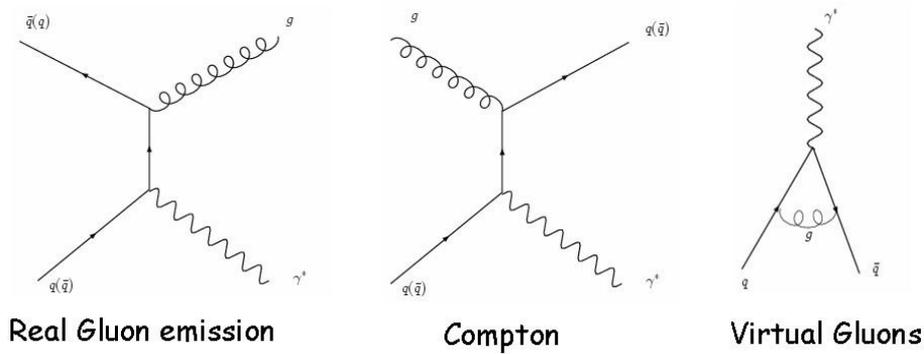


Figure 9.20: Grafici NLO per processo DY.

- dipende da  $\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{M^2}{s}}$
- è  $\sim$  costante eccetto per bassi valori di  $\sqrt{\tau}$  (Es.  $\sqrt{s} = 27\text{GeV}$ ,  $\sqrt{\tau} > 0,2 \Rightarrow K \simeq 1,8$ ).

Nella figura 9.21 si vede come sia buono l'accordo tra risultati sperimentali e NLO\_QCD

### Produzione di W e Z in interazioni adroniche

La sezione d'urto di produzione di W e Z in interazioni adroniche si calcola in modo analogo a  $\sigma^{DY}$  (vedi paragrafo 4.3.1 degli appunti)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(q\bar{q}' \rightarrow W) &= 2\pi |V_{qq'}|^2 \frac{G}{\sqrt{2}} M_W^2 \delta(\hat{s} - M_W^2) \\ \hat{\sigma}(q\bar{q}' \rightarrow Z) &= 8\pi \frac{G}{\sqrt{2}} \left[ (g_V^q)^2 + (g_A^q)^2 \right] M_Z^2 \delta(\hat{s} - M_Z^2) \end{aligned}$$

Le correzioni QCD  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  sono le stesse di DY calcolate a  $Q^2 = M_{W/Z}^2$  e comportano una crescita dell'ordine del 30% della sigma al LO. La figura 9.22 mostra le sezioni d'urto di produzione di W ( $\rightarrow e\nu$ ) e Z ( $e^+e^-$ ), misurate da UA1, UA2 e CDF, confrontate con le previsioni teoriche. Queste hanno un errore di  $\sim 30\%$  dovuto a

- incertezze nella correzione QCD  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ,
- incertezze nelle PDF (parton distribution function),
- correzioni elettrodeboli di ordine più elevato.

L'accordo alle due energie costituisce:

- un buon test del modello a partoni in configurazioni dinamiche complesse (le sezioni d'urto dipendono quadraticamente dalle PDF)

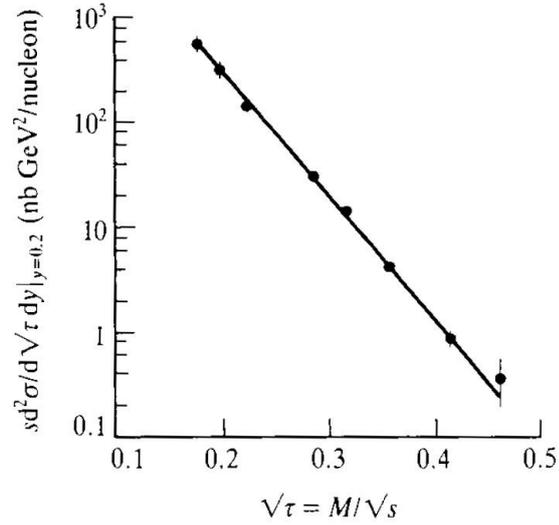


Figure 9.21: Sezione d'urto differenziale per la produzione inclusiva di  $\mu^+\mu^-$  in  $pN \rightarrow \mu^+\mu^-X$  (esp. E605 al Fermilab). La curva è il risultato di calcoli al NLO di QCD.

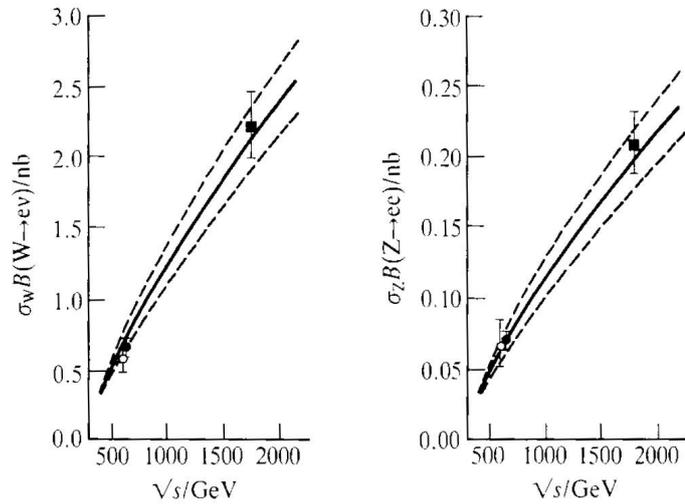


Figure 9.22: Sezione d'urto di produzione di  $W(\rightarrow e\nu)$  e  $Z(e^+e^-)$ , misurata da UA1 ( $\circ$ ), UA2 ( $\bullet$ ) e CDF ( $\blacksquare$ ), confrontata con le previsioni teoriche.

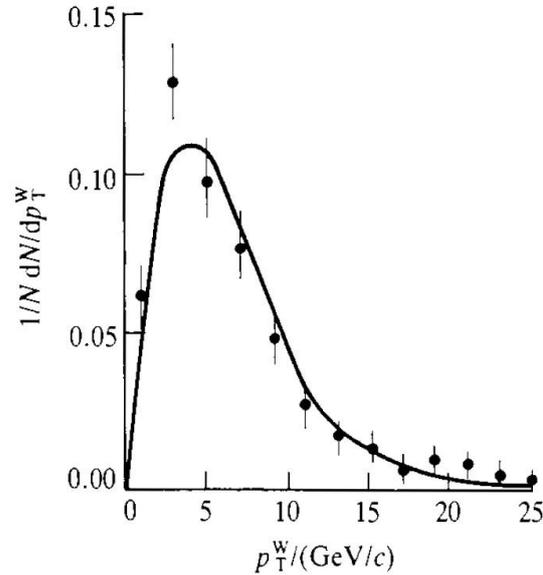


Figure 9.23: Distribuzione di  $p_T^W$ . Dati di UA1 confrontati con previsioni QCD (Albajon et al. Z. Phys. C44(15) 1989).  $\langle p_T \rangle \approx 8 \text{ GeV}$  a  $\sqrt{s} = 639 \text{ GeV}$

- un buon test dell'evoluzione delle PDF, valutate ad un  $Q^2$  molto più elevato di quello relativo ai dati di scattering profondamente anelastico dai quali sono derivate.

La figura 9.23 mostra il  $p_T$  del  $W$ .  $p_T^W$  dovrebbe essere 0 nel semplice modello a partoni (i due partoni collidono collinearmente);  $p_T \neq 0$  deriva da effetti radiativi di QCD. La QCD (calcoli di Altarelli et al., Nucl. Phys B245(12)1985, Z. Phys. C27(617)1985, Phys. Lett. B151(457)1989) rende conto bene della distribuzione di  $p_T$ .

#### 9.7.4 Processi "duri" (grande momento trasf.) in $pp$ e $p\bar{p}$

Test di QCD molto importanti sono stati condotti presso colliders  $pp$  e  $p\bar{p}$  ad energia sempre crescente ( $\sqrt{s} = 63 \text{ GeV}$  ISR,  $630 \text{ GeV}$   $p\bar{p}$ -collider,  $1, 8 \text{ TeV}$  Tevatron). Le principali osservazioni sperimentali per test di QCD riguardano:

- produzione di jet,
- produzione di  $\gamma$  ad alto  $p_T$ ,
- produzione di sapori pesanti.

Sebbene la maggior parte della sezione d'urto adrone-adrone sia dovuta a processi forti di lunga distanza non calcolabili perturbativamente, ad alta energia è possibile isolare, in determinate zone cinematiche, eventi imputabili a processi ad alto  $p_T$  tra costituenti degli adroni quali scattering quark-quark e quark-gluone (si vedano i grafici in figura 9.24), le cui sezioni d'urto partoniche

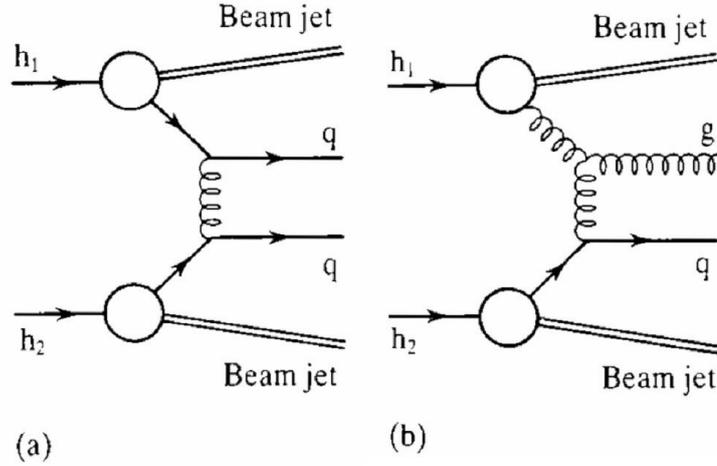


Figure 9.24: Scattering quark-quark (a) e quark-gluone (b) nell'interazione ad alto  $p_T$  tra due adroni.

possono essere calcolate con la QCD perturbativa. Normalmente si assume che il centro di massa partone-partone si muova lungo un asse, diciamo  $z$ , del sistema di riferimento del CM adrone-adrone. E' allora conveniente usare variabili che si trasformino in modo semplice sotto un boost lungo l'asse  $z$ . Sono:

- la rapidità  $y$ ,
- l'impulso trasverso  $p_T$ ,
- l'angolo azimuthale  $\phi$ .

In termini di esse il quadrimomento di una particella è

$$p \equiv (E, p_x, p_y, p_z) = \left( \sqrt{(p_T^2 + m^2)} \cosh y, p_T \sin \phi, p_T \cos \phi, \sqrt{(p_T^2 + m^2)} \sinh y \right)$$

La rapidità è definita da

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \quad (9.12)$$

Sotto un boost di Lorentz con velocità  $\beta$  lungo l'asse  $z$  si ha:

$$y \longrightarrow y' = y + \Delta y \quad \text{con } \Delta y = \tanh^{-1} \beta$$

ovvero

$$y \longrightarrow y' = y + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \quad (9.13)$$

Il differenziale della rapidità è dunque invariante per trasformazioni di Lorentz longitudinali in quanto un cambiamento di sistema di riferimento, avente  $\beta$  lungo l'asse  $z$ , cambia  $y$  di una quantità  $\Delta y$  indipendente dal quadrivettore  $p$  della particella. La sezione d'urto

$$\frac{d^2\sigma}{dp_T dy}$$

è così invariante per trasformazioni di Lorentz longitudinali. E', pertanto, possibile definire la sezione d'urto invariante

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \frac{d^3\sigma}{d^2p_T dy} = \frac{1}{2\pi p_T} \frac{d^2\sigma}{dp_T dy}$$

Nella pratica  $y$  è sostituita dalla pseudorapidità  $\eta$

$$\eta = -\ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (9.14)$$

( $\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{p}$  e  $z$ ).  $\eta$  e  $y$  coincidono nel limite  $m \rightarrow 0$ .  $\eta$  è antisimmetrica attorno a  $\theta = \pi/2$

$$\eta \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \eta(\pi - \theta) = -\eta(\theta)$$

$\eta$  (e  $y$ ) variano rapidamente per piccoli angoli

$$d\eta = -\frac{d\theta}{\sin \theta}$$

$$\eta(40, 4^\circ) = 1 \quad \eta(15, 4^\circ) = 2 \quad \eta(5, 7^\circ) = 3 \quad \eta(2, 1^\circ) = 4$$

La pseudorapidità  $\eta$  è più facile da misurare di  $y$  in quanto dipende solo da  $\theta$ . E' usata in tutti i casi in cui  $m \ll E$  (o, comunque, quando  $m$  non è nota. In particolare in letteratura si trova spesso

$$\frac{d^2\sigma}{dp_T d\eta} \simeq \frac{d^2\sigma}{dp_T dy}$$

Un tipico rivelatore a un collider usa un calorimetro adronico per misurare l'energia degli adroni e un calorimetro e.m. per misurare l'energia degli elettroni e dei fotoni. Tali calorimetri sono normalmente segmentati in torri (celle) proiettive (che puntano verso la zona d'interazione). La segmentazione è fatta in termini dell'angolo azimuthale  $\phi$  e della pseudorapidità  $\eta$ . Un tipico jet interessa in generale più di una torre. Tipicamente (per es. CDF) un jet è definito come un cluster di *energia trasversa*  $E_T$  nel cono di raggio

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta\eta)^2 + (\Delta\phi)^2}$$

$E_T$  è definita in termini dell'energia misurata dalle torri incluse nel cono e dell'angolo  $\theta$  del centro del cluster

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n E_i & \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \\ \sin \theta &= p_T / |\mathbf{p}| & E_T &= E \sin \theta \end{aligned}$$

Nel caso di CDF la somma è estesa alle torri nel cono con una energia  $E_T > 100 \text{ MeV}$ . Un esempio di jet di CDF è mostrato in fig. 9.25 La linea chiusa intorno ai depositi di energia indica il limite del cono.

Le osservazioni sperimentali sono confrontate con le previsioni della QCD ottenute usando la costante di accoppiamento  $\alpha_s$  e le densità partoniche, ottenute dagli esperimenti di scattering profondamente anelastico ed evolute con le equazioni di Altarelli-Parisi. I calcoli di QCD partono con le sezioni d'urto dei processi di base tra i costituenti. Due esempi sono riportati nelle figure 9.26 e 9.27, la prima relativa alla produzione inclusiva di jet ad alta energia trasversa  $E_T$  e la seconda relativa alla distribuzione angolare degli eventi a due jet.

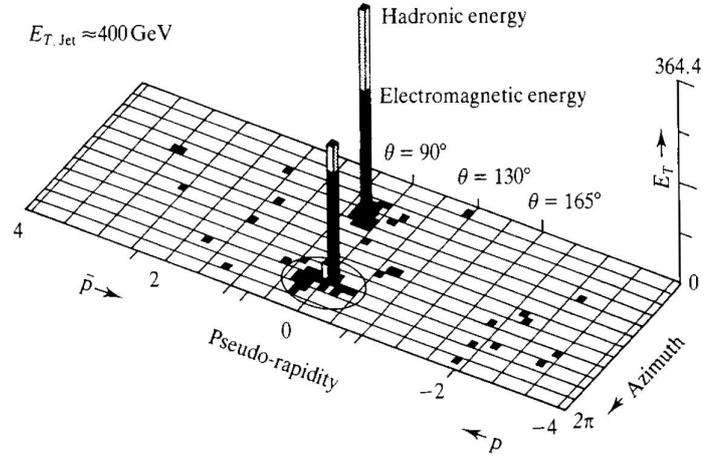
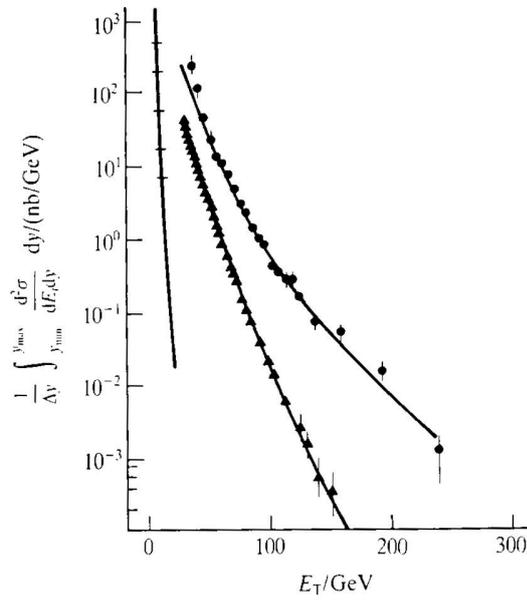


Figure 9.25: Esempio di un evento a due jet di CDF.

Figure 9.26: Produzioni inclusive di jet a grande  $E_T$  misurate agli ISR, al  $p\bar{p}$  - collider del e al Tevatron. Le curve sono predizioni QCD (Altarelli G., Ann. Rev: Nucl. Phys. 39 (376) 1989).

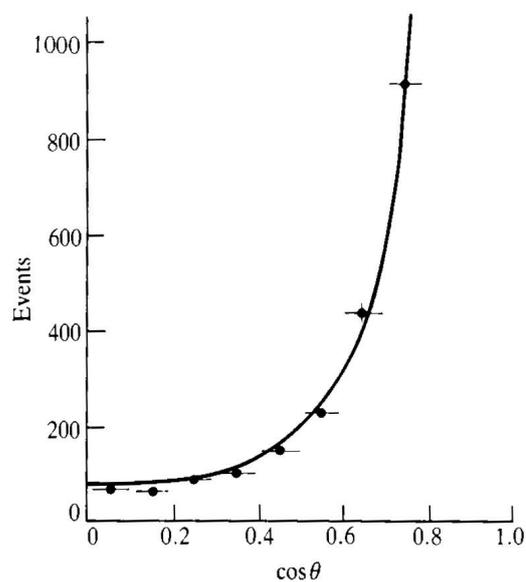


Figure 9.27: Distribuzione angolare degli eventi a due jet misurata da UA1. L'andamento ha la caratteristica forma  $1/\sin^4 \theta/2$  dovuto allo scambio di un gluone vettoriale senza massa ed è consistente con il potenziale QCD di corto raggio del tipo  $V(r) \sim 1/r$ . (Arnison G. et al. Phys. Rev. Lett. 158B (494) 1985).

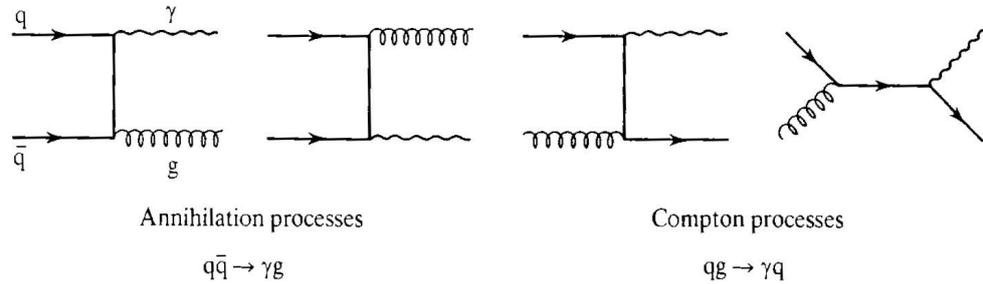


Figure 9.28: Grafici LO per la produzione di fotoni diretti.

### Produzione di fotoni diretti ad alto $p_T$

Produzione direttamente correlata a quella dei jet ad alto  $p_T$ .

Il confronto con la QCD è agevolato da:

- migliore risoluzione dei calorimetri em rispetto a quelli adronici,
- minima necessità di algoritmi partone-adrone in quanto il fotone non frammenta.

I processi LO per la produzione di  $\gamma$  ad alto  $p_T$  sono riportati in figura 9.28. Il processo Compton  $qg \rightarrow q\gamma$  domina a  $\sqrt{s}$  relativamente bassa e a  $p_T^\gamma$  medi (ordine qualche decina di  $GeV$ ), fornendo una importante sonda della funzione di struttura gluonica del protone.

La produzione di  $\gamma$  di alto  $p_T$  è stata misurata a ISR,  $p\bar{p}$ -collider del CERN e Tevatron, ottenendo dati in accordo con QCD NLO. Si veda, per esempio, la figura 9.29 con dati di UA1 e UA2.

### Produzione di sapori pesanti

Il suo studio fornisce un test non triviale della QCD e la sua comprensione è importante per lo studio della fisica del top e per la ricerca di nuova fisica (ove la produzione di quark pesanti costituisce il fondo principale). I processi partonici di interesse al LO ( $\alpha_s^2$ ) sono illustrati in figura 9.30. Importanti anche i contributi ordine  $\alpha_s^3$ .

Negli esperimenti a bersaglio fisso la resa di  $b$  è molto piccola. Comunque il primo evento di  $b$  fu osservato proprio in uno di tali esperimenti (WA75 al CERN) usando un fascio di  $\pi^-$  di  $350 GeV/c$  (vedi fig. 9.31). La sezione d'urto è ben più grande ai collider  $p\bar{p}$  del CERN e del Fermilab. ove è stato possibile studiare la produzione di  $b$  in canali con segnature piuttosto chiare e, quindi, con poco fondo. UA1, per esempio, ha usato muoni di alto  $p_T$  come tag di jet di sapore pesante (per esempio, decadimenti semileptonici ("semimuonici") di  $B$  o  $B \rightarrow J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$ ). Tuttavia occorre discriminare i muoni da altri processi:

- processi DY che producono coppie isolate  $\mu^+\mu^-$ ,
- decadimento  $W \rightarrow \mu\nu$ ,
- decadimenti di  $J/\psi$  e  $\Upsilon$  in  $\mu^+\mu^-$ ,

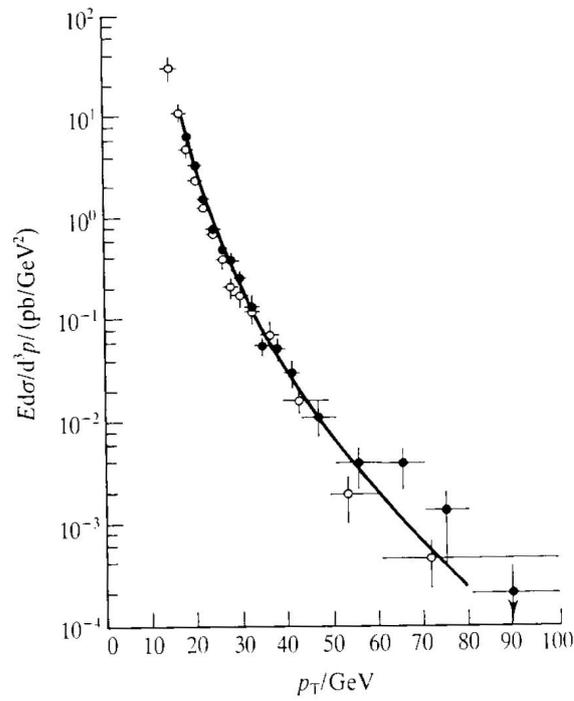


Figure 9.29: Sezione d'urto inclusiva per la produzione di fotoni diretti in  $p\bar{p} \rightarrow \gamma X$  misurata da UA1 ( $\bullet$ ) e UA2( $\circ$ ) a  $\sqrt{s} = 630\text{GeV}$ , confrontata con la predizione QCD. (Aurenche P. et al., Nucl. Phys. B297 (661) 1988).

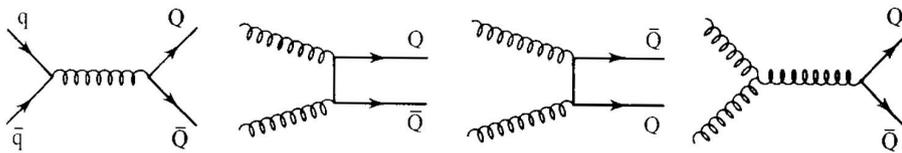


Figure 9.30: Processi partonici LO per la produzione di coppie di quark pesanti.

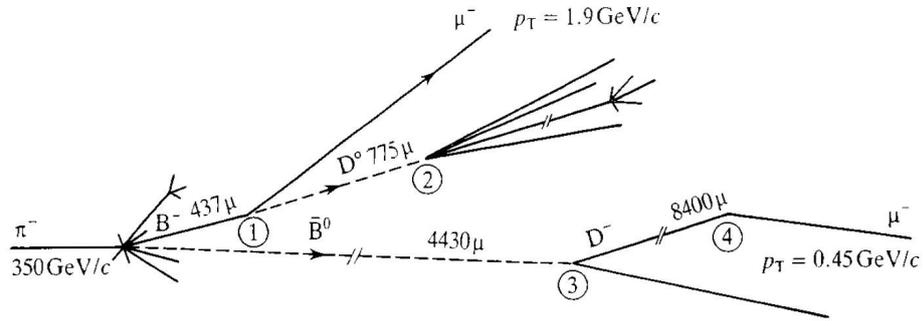


Figure 9.31: Rappresentazione schematica dell'evento di  $b$  registrato in emulsioni nucleari da WA75 al CERN.

- decadimenti semimuonici del charm  $c \rightarrow s\mu\nu$ ,
- decadimenti in volo di  $\pi$  e  $K$ .

La figura 9.32 mostra la distribuzione di  $p_T^\mu$  per eventi contenenti muoni associati a jet con  $E_T > 10\text{GeV}$  (dopo aver applicato tagli sulla massa trasversa di  $\mu\nu$  ( $m_T^{\mu\nu}$ ) per rimuovere i decadimenti  $W \rightarrow \mu\nu$ ). La curva è la predizione QCD ottenuta con un programma MC, considerando anche la correzione per il fondo dovuto al decadimento in volo di  $\pi$  e  $K$ . I contributi del meccanismo Drell-Yan e di decadimento di  $W$ ,  $Z^0$ ,  $J/\psi$  e  $Y$  sono piccoli. C'è un ragionevole accordo tra dati e predizione MC.

UA1 ha misurato la sezione d'urto per la produzione di  $b$  nelle collisioni  $p\bar{p}$  nel range di rapidità  $|y| < 1,5$ , integrata per  $p_T^b$  maggiore di una soglia  $p_T^{\text{min}}$ . Essa è mostrata in figura 9.32 in funzione di  $p_T^{\text{min}}$  (triangoli pieni). Nella stessa figura è anche mostrata (circolo pieno) la sezione d'urto derivata dalla misura di  $B \rightarrow J/\psi + X$ ; la curva è, invece, la predizione QCD basata sulle distribuzioni partoniche. Per la selezione dei muoni provenienti dal decadimento  $b \rightarrow \mu$  è stato fatto ricorso alla cinematica. Infatti, nel decadimento di un quark pesante, il momento trasverso massimo del muone è proporzionale al Q-valore del decadimento stesso, che è molto più grande nel caso di  $b \rightarrow \mu$  che nel caso  $c \rightarrow \mu$ . A questo fine, UA1 ha usato la distribuzione del momento del muone,  $p_T^{\text{rel}}$ , perpendicolare all'asse del jet associato (vedi figura 9.33). Nella figura 9.34 è mostrata la distribuzione misurata (punti) di  $p_T^{\text{rel}}$ . La curva è il risultato del fit fatto combinando le distribuzioni MC relative a: a) muoni da  $b\bar{b}$ , b) muoni da  $c\bar{c}$ , c) muoni da decadimento in volo di  $\pi$  o  $K$ . Dal fit risulta che la frazione di muoni proveniente da  $b$  è  $(33 \pm 4)\%$ .

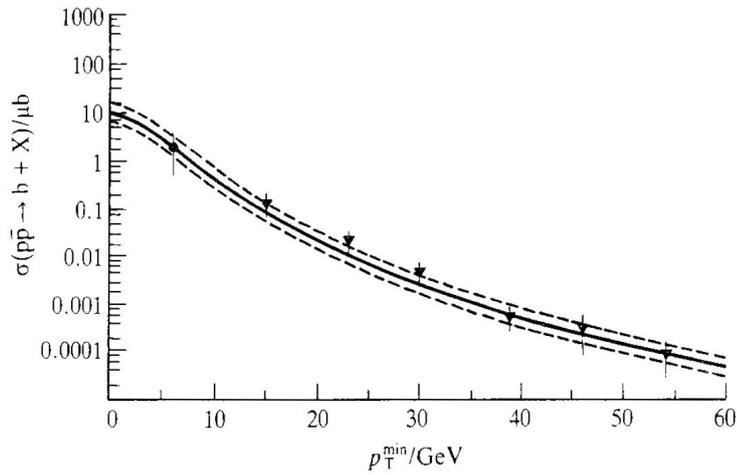


Figure 9.32: UA1. Sezione d'urto per la produzione di  $b$  nelle collisioni  $p\bar{p}$  nel range di rapidità  $|y| < 1,5$ , integrata per  $p_T^b$  maggiore di una soglia  $p_T^{\min}$  (triangoli pieni). Mostrata con circolo pieno la sezione d'urto derivata dalla misura di  $B \rightarrow J/\psi + X$ . La curva è la predizione QCD basata sulle distribuzioni partoniche.

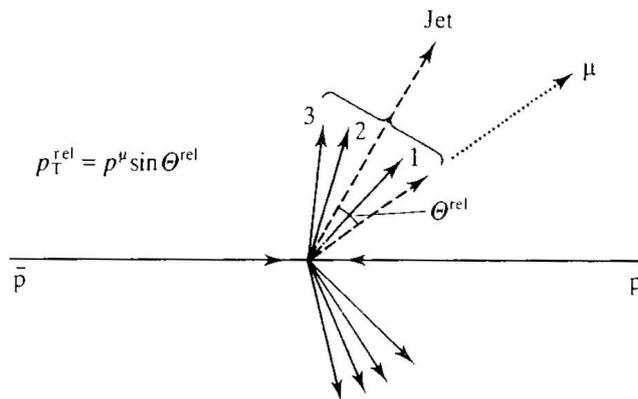


Figure 9.33: Definizione della variabile  $p_T^{\text{rel}}$  usata da UA1.

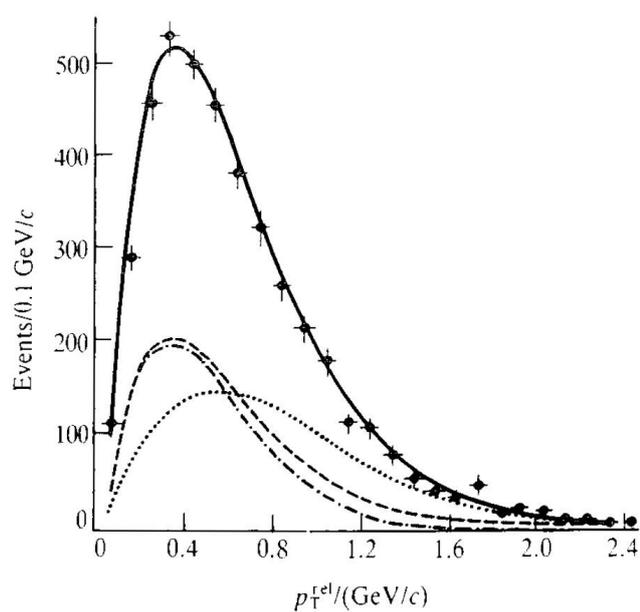


Figure 9.34: Distribuzione di  $p_T^{rel}$ . Le curve sono predizioni MC per:  $b\bar{b}$  (punti),  $c\bar{c}$  (tratto e punto), fondo da decadimenti in volo di  $\pi$  e  $K$  (trattini), tutti i processi (linea continua).