Capitolo 3

Dinamica dei sistemi

Nella risoluzione degli esercizi di sistemi di punti materiali utilizziamo sempre le due equazioni cardinali:

$$\vec{F}^E = \frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_{CM} \tag{3.1}$$

$$\vec{M}^E_\Omega = \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}. \tag{3.2}$$

La prima dice che il risultante delle forze esterne è responsabile della variazione della quantità di moto totale del sistema che si può esprimere come il prodotto della massa totale e della velocità del centro di massa per cui il risultante delle forze esterne produce l'accelerazione del centro di massa. La seconda equazione invece dice che il momento risultante delle forze esterne produce una variazione del momento angolare del sistema ovvero genera accelerazioni angolari. Pertanto possiamo dire che le forze sono responsabili delle traslazioni mentre i momenti generano delle variazioni degli stati rotazionali di un sistema.

3.1 Corpi rigidi

Un corpo rigido è un particolare sistema di punti materiali in cui la distanza tra i punti rimane invariata nel tempo. Questo fa sì che la seconda equazione cardinale possa essere scritta come

$$\vec{M}^E_\Omega = \frac{dI_\Omega\vec{\omega}}{dt} = I_\Omega\vec{\alpha} \tag{3.3}$$

dove I_Ω è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse passante per il polo Ω, $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione angolare del corpo. Altro risultato notevole è quello che lega l'energia cinetica di un corpo rigido al suo momento di inerzia:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

dove il primo termine $M v_{CM}^2/2$ descrive la parte traslazionale dell'energia cinetica e il termine contenente il momento di inerzia descrive la parte rotazionale intorno al baricentro.

1. **Due punti materiali di masse m_1 e $m_2 = m_1/2$ sono collegati aattraverso una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza l; sul sistema non agiscono forze esterne e all'istante $t = 0$ la situazione è quella riportata in figura 3.1 con $v_1 = 2v_2$. Si determinino le posizioni dei due punti materiali all'istante τ tale che $3v_1\tau/2l = \pi$.**

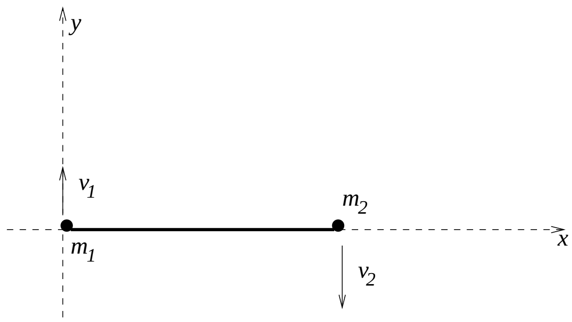

Figura 3.1: Illustrazione dell'esercizio 1.

Non essendoci forze esterne il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme con velocità data da quella iniziale ovvero solo lungo l'asse y e pari a:

$$v_{Gy} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{3m_2 v_2}{3m_2} = v_2.$$

Pertanto dopo il tempo τ il centro di massa arriva a

$$y_G = v_{Gy}\tau = \frac{\pi}{3} l.$$

L'assenza di forze esterne comporta l'assenza di momenti delle forze esterne e quindi la conservazione del momento angolare rispetto, per esempio, al centro di massa. In particolare la conservazione della componente z del momento angolare implica che:

$$L_0 = m_1 v_1 \frac{l}{3} + m_2 v_2 \frac{2l}{3} = m_1 v_1 \frac{l}{2} = I_{CM}\omega = \left(\frac{m_1 l^2 + 4 m_2 l^2}{9} \right) \omega = m_1 \frac{l^2}{3}$$

da cui $\omega = 3v_1/2l$. L'angolo di cui è ruotata l'asta é $\theta = \omega t = \pi$ per cui l'asta è parallela all'asse delle ascisse e le due masse si trovano a $x_1 = 2l/3$ e $x_2 = -l/3$ mentre la loro ordinata è pari a quella del centro di massa.

2. **Due sfere di massa $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono fissate all'estremità di un'asta di lunghezza $l = 80$ cm e massa trascurabile. L'asta è incernierata in un punto distante $l/3$ dalla sferetta di massa m_1 ad un asse orizzontale attorno al quale può ruotare con attrito trascurabile. L'asta, lasciata libera con velocità nulla nella posizione orizzontale, sotto l'azione della forza peso ruota attonro all'asse di sospensione. Si calcolino i moduli v_1 e v_2 delle velocità delle sfere all'istante in cui l'asta passa per la posizione verticale.**

3. **Un corpo rigido omogeneo è appoggiato con attrito su una guida rettilinea inclinata di un angolo $\alpha = 20°$ rispetto all'orizzontale e viene abbandonato in quiete in una certa posizione iniziale. Il corpo comincia a rotolare. Si supponga l'attrito radente sufficientemente intenso da impedire lo strisciamento e quello volvente trascurabile. Studiare il moto del centro di massa G nei casi in cui il corpo omogeneo ha le seguenti forme: sfera, disco giacente nel piano verticale contenente la guida, e anello di sezione trascurabile e costante giacente sempre nel piano verticale contenente la guida. In particolare calcolare il tempo impiegato da G per arrivare ad una distanza $x = 170$ cm dalla posizione iniziale nonché la velocità e l'accelerazione con cui vi arriva. Calcolare inoltre il rapporto tra i moduli della forza di attrito e quella peso.**

4. **Un filo inestensibile di massa trascurabile è avvolto attorno ad un cilindro di raggio r e lunghezza trascurabile. Si tiene ferma l'estremità libera del filo e si lascia il cilindro libero di cadere sotto l'azione della forza peso. Si determini l'accelerazione a dell'asse del cilindro.**

5. **Un tuffatore di massa m, alto $l = 1.8$ m, sta in piedi sul bordo di un trampolino in equilibrio instabile quando si lascia cadere con le braccia lungo i fianchi rimanendo rigido. Egli esegue dapprima una rotazione rispetto al bordo di $\pi/2$ rad e poi abbandona il trampolino. Calcolare l'altezza L del trampolino rispetto al pelo d'acqua in modo che il tuffatore entri nell'acqua con la testa e il corpo sia verticale. Si schematizzi l'uomo come un'asta rigida di momento d'inerzia rispetto al suo baricentro pari a $I = ml^2/12$.**

   Il moto si può dividere in due parti. Nella prima l'uomo è assimilabile ad una sbarra che ruota di 90° rimanendo incernierata nell'estremo in basso. Durante tale fase, non essendoci forze dissipative, l'energia meccanica si conserva. Detto I il momento di inerzia dell'uomo rispetto all'asse ortogonale all'uomo e passante per il punto in cui è incernierato, l'energia cinetica si può scrivere con un termine puramente rotazionale:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}\right)\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

Utilizziamo ora il teorema delle forze vive: il lavoro compiuto dalla forza peso, $mg\frac{l}{2}$ pari alla forza peso per lo spostamento verticale del centro di massa va eguagliato all'energia cinetica acquisita:

$$\frac{1}{6}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2}$$

da cui $\omega^2 = 3g/l$. Da qui si ricava inoltre la velocità $v_0 = \omega l/2$ del centro di massa dell'uomo quando questi è orizzontale, ovvero quando lascia la piattaforma.

A questo punto inizia la seconda fase del moto caratterizzata dalla caduta libera del centro di massa dovuta alla forza peso. Tale forza però non ha momento rispetto al centro di massa per cui, a norma della seconda equazione cardinale, la velocità angolare attorno al centro di massa rimane quella ω già ricavata. Affinché l'uomo entri di testa e in posizione verticale, il centro di massa deve scendere di una distanza $d = L - l/2$ e contemporaneamente l'uomo deve aver ruotato di $\pi/2$.

La rotazione di un quarto di giro avviene in un tempo τ dato da $\omega\tau = \pi/2$ mentre la discesa del centro di massa nello stesso tempo è:

$$v_0\tau + \frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{\omega l\tau}{2} + \frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{\pi l}{4} + \frac{\pi^2 l}{24} = d$$

da cui si ricava

$$L = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{12}\right).$$

6. **Un cilindro omogeneo di massa M e raggio $r = 6$ cm può ruotare senza strisciare lungo una guida di raggio $R = 45$ cm come mostrato in figura 3.2. Calcolare:**

   a) il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile;

b) il valore dell'accelerazione $\vec{A}$ che deve avere la guida affinché il cilindro, posto inizialmente a riposo con $\phi = 40°$ ci rimanga. Calcolare il periodo T delle piccole oscillazioni attorno a questa nuova posizione di equilibrio stabile.

c) l'accelerazione $\vec{A}$ della guida affinché il cilindro, posto inizialmente a riposo nella posizione specificata da $\phi = 0°$ raggiunga la posizione $\phi = 90°$ con energia cinetica nulla.

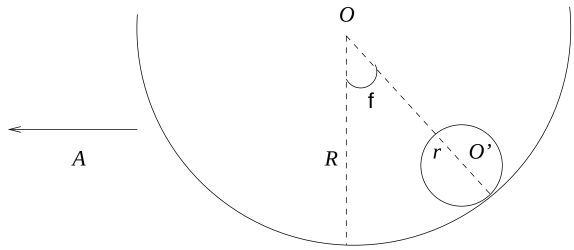

Figura 3.2: Illustrazione dell'esercizio 6.

7. **Il sistema riprodotto in figura 3.3 viene lasciato libero di muoversi sotto l'azione della forza peso: inizialmente il corpo A di massa $m_A = 2$ kg è al suolo, il corpo B, di massa $m_B = 4$ kg si trova ad altezza $h = 3$ m dal suolo. L'energia dissipata per attrito tra il file (di massa trascurabile) e la carrucola è trascurabile. Si calcoli il modulo v della velocità con cui il corpo B giunge al suolo nei due casi seguenti:**

   a) il momento di inerzia I della carrucola rispetto all'asse di rotazione è nullo;

   b) $I = 0.02$ kg m^2 e il raggio della carrucola è $r = 0.1$ m.

8. **Un disco omogeneo di raggio $R = 0.6$ m e massa $M = 3$ kg può ruotare senza attrito intorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Un bordo rialzato e liscio, di massa trascurabile, è posto lungo un quarto della sua circonferenza. A $t = 0$ un corpo praticamente puntiforme di massa $m = 50$ g viene a contatto con il disco, con velocità orizzontale $v_0 = 2$ m/s tangente dall'interno all'inizio del bordo e alla superificie del disco. Da questo momento la massa m, vincolata dal bordo, inizia a strisciare sul disco con corfficiente di attrito dinamico pari a $\mu = 0.5$. Calcolare:**

   a) la velocità angolare posseduta dal disco qunado il corpo puntiforme si arresta su di esso;

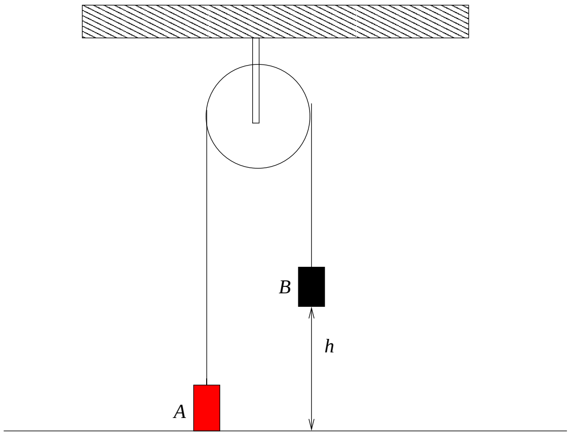

Figura 3.3: Illustrazione dell'esercizio 7.

b) il cammino percorso sul disco da m prima di arrestarsi.

3.2 Urti

Quando due corpi vengono in contatto si generano delle forze interne di breve durata (dell'ordine dei *ms* o inferiori) e di elevatissima intensità che prendono il nome di forze impulsive. Visto che la durata di queste forze è di un tempo infinitesimo, qualsiasi forza esterna che non sia impulsiva in questo intervallo di tempo non crea alcuna apprezzabile variazione di quantità di moto che quindi può di norma essere considerata come una quantità conservata durante gli urti. Lo stesso può dirsi per la variazione del momento angolare durante un intervallo infinitesimo di tempo che può considerarsi nulla e quindi il momento angolare conservato durante un urto. L'urto poi si dice elastico se l'energia cinetica durante l'urto è conservata, anelastico in caso contrario. In particolare un urto è completamente anelastico se uno dei due corpi si conficca nell'altro formando un unico corpo.

9. **Un carrello di massa $m = 200$ Kg si trova sopra un piano inclinato di un angolo $\alpha = \pi/6$ rispetto all'orizzontale e sul carrello c'è una persona di massa $m_1 = 50$ Kg. Opportuni ceppi impediscono al carrello di scivolare verso il basso senza impedire un suo eventuale moto verso l'alto. La persona salta giù dal carrello in un tempo praticamente nullo e subito dopo il salto la sua velocità v è parallela al suolo: la persona tocca nuovamente il piano inclinato in un punto situato più in basso rispetto**

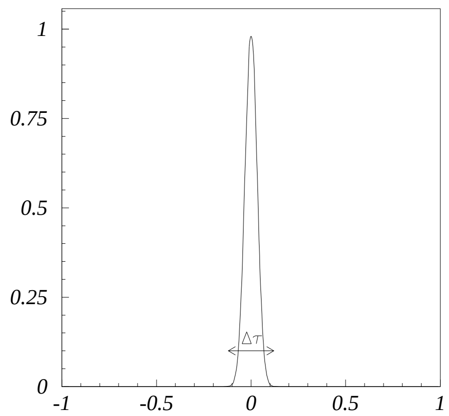

Figura 3.4: Intensità delle forze interne in un urto di durata $\Delta\tau$.

alla posizione iniziale di un tratto $h = 3.2$ m. Si calcoli il modulo V della velocità del carrello subito dopo il salto.

10. **Un carrello di massa $m = 600$ Kg è fermo sopra due binari orizzontali e rettilinei che presentano attrito trascurabile. Sopra il carrello si trovano tre persone, ognuna di massa $m_1 = 50$ Kg. Si considerino i due casi seguenti:**

    a) le tre persone saltano a terra dalla stessa parte rispetto al carrello, una dopo l'altra, ognuna con velocità relativa al carrello parallela ai binari e di modulo $|u| = 5$ m/s;

    b) le tre persone saltano a terra contemporaneamente con uguale velocità u rispetto al carrello.

    Si calcoli il modulo V della velocità finale del carrello nei due casi.

11. **Un rullo cilindrico di massa $m = 100$ Kg è mantenuto in quite alla base di un pinao inclinato fissato sopra un carrello A in movimento su una superficie orizzontale liscia con modulo della velocità $v_0 = 4.4$ m/s come mostrato in figura 3.5. La massa complessiva del carrello e del piano inclinato, escluso il rullo, è $m_A = 500$ Kg. Il carrello va ad urtare contro un secondo carrello B, fermo sopra la superficie orizzontale, di massa $m_B = 500$ Kg: i due carrelli dopo l'urto restano uniti mentre il rullo, che**

al momento dell'urto è lasciato libero di muoversi, sale lungo il piano inclinato fino all'altezza massima h rispetto alla posizione di partenza. Trascurando l'energia persa dal rullo per attrito, calcolare h.

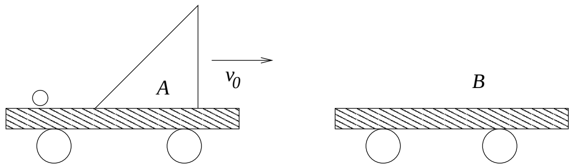

Figura 3.5: Illustrazione dell'esercizio 11.

Applichiamo la conservazione della quantità di moto per calcolare la velocità v_c del centro di massa e la velocità v_1 immediatamente dopo l'urto del sistema formato dai due corpi A e B, osservando che subito dopo l'urto la velocità del rullo è la stessa che prima dell'urto, ovvero v_0:

$$(m+m_A)v_0 = (m+m_A+m_B)v_c = mv_0 + (m_A+m_B)v_1.$$

A partire da dopo l'urto, l'energia meccanica si conserva. Visto che quando il rullo arriva in cima l'energia cinetica è solo quella del centro di massa, l'energia cinetica attorno al centro di massa appena dopo l'urto viene tutta dissipata a spese dell'energia potenziale, ovvero dal lavoro contro la forza peso. Scriviamo l'energia cinetica attorno la centro di massa, ovvero a norma del teorema di Koenig, l'energia cinetica totale sottratta dell'energia del centro di massa, come la somma delle energie cinetiche relative ovvero:

$$K_r = \frac{1}{2}m(v_0-v_c)^2 + \frac{1}{2}(m_A+m_B)(v_1-v_c)^2 =$$

$$\frac{mv_0^2m_B^2}{2(m+m_A+m_B)^2} + \frac{(m_A+m_B)v_0^2}{2}\left(\frac{m_A}{m_A+m_B} - \frac{m+m_A}{m+m_A+m_B}\right)^2 =$$

$$\frac{mv_0^2m_B^2}{2(m+m_A+m_B)^2} + \frac{m^2v_0^2m_B^2}{2(m+m_A+m_B)^2(m_A+m_B)} =$$

$$\frac{mv_0^2m_B^2}{2(m+m_A+m_B)(m_A+m_B)}.$$

Quando il rullo arriva in cima, tutti i corpi viaggiano alla stessa velocità che pertanto è pari a quella del centro di massa. Quindi l'energia cinetica è $K_f = \frac{1}{2}Mv_c^2$ dove $M = m+m_A+m_B$. Subito dopo l'urto invece l'energia cinetica è $K_i = K_f + K_r$ dove K_r è l'energia cinetica attorno al centro di massa e quindi, per il teorema delle forze vive:

$$\mathcal{L} = K_f - K_i = -K_r = -mgh$$

da cui si ricava

$$h = \frac{m_B^2 v_0^2}{2gM(m_A + m_B)} = 0.22\,\text{m}.$$

12. **Nell'esercizio 11, i due carrelli dopo l'urto non restino uniti e sia $h = m_A v_0^2/[2(m+m_A)g]$: si calcoli il modulo v_B della velocità che possiede il carrelo dopo l'urto.**

13. **Nell'esercizio 11, il carrello B procede inizialmente con velocità v_B andando incontro al carrello A. Assegnata la quota h che il rullo raggiunge dopo l'urto, determinare v_B.**

14. **Un'asta rigida di massa $M = 0.27$ kg e lunghezza $L = 0.8$ m è appoggiata senza attrito su un piano orizzontale ed é inizialmente in quiete. Una sferetta assimilabile ad un punto materiale P, di massa $m = 0.18$ kg arriva ad urtare l'asta in un suo punto A con velocità di modulo $w = 7.5$ m/s, orizzontale e perpendicolare all'asta. L'urto è perfettamente anelastico. Studiare il moto dopo l'urto per una generica distanza b fra A e il punto di mezzo B dell'asta. Trovare poi il particolare valore b_0 di b per cui il modulo della velocità angolare dopo l'urto risulta massimo. Calcolare tale modulo massimo e l'energia meccanica persa nell'urto in questo caso.**

 Nell'urto di conserva la quantità di moto e quindi il baricentro di muove lungo la coordinata perpendicolare all'asta. Pertanto la coordinata del baricentro longitudinale all'asta risulta fissa e pari a $x_G = mb/(m+M)$. Il momento di inerzia del sistema asta e punto materiale rispetto al nuovo centro di massa dopo l'urto è

$$I_G = M\frac{L^2}{12} + Mx_G^2 + m(b-x_G)^2 = M\frac{L^2}{12} + M\frac{mb^2}{m+M}.$$

 Nell'urto si conserva anche il momento angolare: lo calcoliamo rispetto ad x_G prima e dopo l'urto e li eguagliamo.

$$L_0 = mw(b - x_G) = \frac{mM}{m+M} wb = I_G \omega$$

 da cui

$$\omega(b) = \frac{12mwb}{12mb^2 + (m+M)L^2}$$

Il punto di massimo si ottiene imponendo nulla la derivata e verificando che ciò si verifichi nell'intervallo $[0, L/2]$ di b che ha senso fisico. La condizione di derivata nulla implica

$$(m+M)L^2 = 12mb^2 \ \Rightarrow b_0 = \sqrt{\frac{m+M}{12m}}L = 0.365\,\mathrm{m}$$

a cui corrisponde la velocitá angolare

$$\omega(b_0) = \sqrt{\frac{3m}{m+M}}\frac{w}{L} = 10.27s^{-1}.$$

L'energia dissipata nell'urto è pari alla variazione tra l'energia del sistema dopo l'urto e quella del punto materiale prima dell'urto:

$$E = \frac{1}{2}(m+M)v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 - \frac{1}{2}mw^2$$

dove la velocità v_G del centro di massa soddisfa la relazione $mw = (m+M)v_G$ che indica la conservazione della quantità di moto. Quindi l'energia dissipata diventa:

$$E = -\frac{mM}{4(m+M)}w^2 = -1.52J.$$

15. **Due masse puntiformi m_1 e $m_2 = 2m_1$ in quiete su un asse orizzontale liscio sono unite tra loro da una molla di costante elastiche k e lunghezza a riposo l_0. Una terza massa m_3 in moto con velocità v_0 lungo l'asse colpisce la massa m_2 rimanendovi attaccata; l'urto avviene in un tempo trascurabile. Si determini la contrazione massima δ_{max} della molla.**

16. **Una sferetta praticamente puntiforme di massa $m_1 = 20$ g cade lungo la verticale e urta elasticamente una semisfera rigida liscia di massa $m_2 = 100$ g, nel punto A di figura 3.6 dove $\alpha = \pi/4$; il modulo della velocità posseduta dalla sferetta subito prima dell'urto è $v_0 = 11$ m/s. La semisfera prima dell'urto è in quiete su un piano orizzontale privo di attrito. Si calcolino le componenti q_x e q_z della quantità di moto della sferetta subito dopo l'urto.**

17. **Un cubo omogeneo di spigolo $l = 0.2$ m è poggiato con una faccia sopra un piano orizzontale e si muove rispetto a questo con velocità v. Il cubo rimane incastrato con lo spigolo anteriore ad una sottile fenditura del piano intorno alla quale ruota senza attrito: si calcoli il valore v_{max} tale che se $v > v_{max}$ il cubo si ribalta in avanti.**

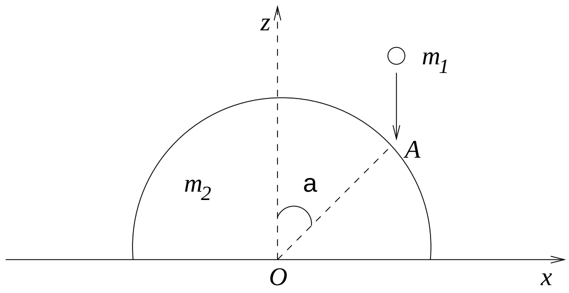

Figura 3.6: Illustrazione dell'esercizio 16.

18. **Una sfera piena omogenea di raggio $r = 10$ cm è inizialmente in quiete sulla superficie liscia di un lago ghiacciato. Con un colpo orizzontale impartito a un'altezza $h = 5$ cm al di sopra della superficie del lago, il centro della sfera acquista una velocità $v_0 = 1$ m/s. Si calcoli la velocità angolare della sfera rispetto al suo centro di massa immediatamente dopo il colpo e il verso di rotazione. Dopo aver percorso un certo spazio, la sfera arriva su ghiaccio ruvido dove il coefficiente di attrito è $\mu = 0.01$. Si ricavi la velocità del centro della sfera all'istante t^* in cui la sfera raggiunge lo stato di moto di rotolamento puro e il valore di t^*.**

Per mettere in movimento la biglia è stata applicata una quantità di moto incognita P che possiamo ricavare conoscendo la velocità con cui parte la biglia e imponendo la conservazione della quantità di moto e del momento angolare rispetto al centro di massa, visto che il risultante delle forze esterne e del momento delle forze esterne rispetto al centro di massa della sfera sono entrambi nulli.

$$\begin{cases} P = mv_0 \\ L_0 = P(r-h) = I\omega_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

da cui

$$\omega_0 = \frac{mv_0(r-h)}{I} = \frac{5v_0(r-h)}{2r^2} = 12.5s^{-1}.$$

La quantità di moto applicata, oltre a mettere in moto il baricentro, ha un momento che produce la rotazione, visto che non viene applicata lungo la retta orizzontale passante per il baricentro. Inoltre, essendo applicata più in basso rispetto al baricentro, il verso di rotazione è all'indietro, ovvero se la biglia si sta muovendo verso sinistra, la rotazione è in senso orario e quindi la velocità angolare è negativa secondo la convenzione adottata. Quando la biglia arriva nella zona di attrito, il momento della forza di attrito si oppone alla rotazione iniziale fino a far cambiare verso alla rotazione, condizione necessaria per raggiungere la condizione di rotolamento.

La velocità del centro di massa diminuisce a causa dell'attrito con la legge $v(t) = v_0 - g\mu t$. Si genera inoltre, a causa del momento della forza di attrito stessa, l'accelerazione angolare α data dalla relazione $M = mg\mu r = I\alpha$, da cui $\alpha = \frac{5g\mu}{2r}$. Applicando la condizione di rotolamento puro, $\vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = 0$, si ha

$$v_0 - g\mu t = r(\omega_0 + \alpha t) = r(\omega_0 + \frac{5g\mu}{2r}t) = \omega_0 r + \frac{5}{2}g\mu t$$

da cui $t^* = \frac{2}{7}\frac{v_0 - \omega_0 r}{\mu g} = 6.56$ s e la corrispondente velocità del centro di massa è $v(t^*) = v_0 - g\mu t^* = 0.36$ m/s.

3.3 Sistemi discreti di punti materiali

19. **Un carrello di massa $m = 300$ kg può scorrere senza attrito su due binari rettilinei orizzontali. Il carrello è fermo e su di esso è seduta una persona di massa $m_1 = 50$ kg. La persona si alza in piedi, cammina sopra il piano del carrello in direzione dei binari e poi si siede nuovamente: rispetto al suolo la posizione finale dalla persona dista $d_1 = 6$ m da quella iniziale. Si calcoli lo spostamento d del carrello e si dica se la persona ha compiuto lavoro e contro quali forze.**

20. **Due anelli di uguali masse $m_1 = m_2 = m$ possono scorrere senza attrito lungo una sbarra orizzontale come mostrato in figura 3.7. Gli anelli sono collegati da un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza l nel cui punto medio è appeso un corpo di massa $m_3 = 2m$. Inizialmente gli anelli sono fermi a distanza relativa $l\sqrt{3}/2$. Gli anelli vengono lasciati liberi di muoversi lungo la sbarra: si calcoli il modulo U della loro velocità relativa quando arrivando ad urtarsi.**

    La conservazione dell'energia meccanica fornisce la seguente relazione:

    $$\frac{1}{2}m_3 v_3^2 + m_1 v_1^2 = m_3 g \frac{l}{4}$$

    dove abbiamo tenuto conto del fatto che le velocità dei due punti materiali sulla guida sono uguali per la conservazione della quantità di moto lungo l'orizzontale. Siccome nel punto più basso la velocità del corpo m_3 è nulla (il verso del moto si invertirebbe se le due masse potessero attraversarsi), si ha:

    $$v_1 = \sqrt{\frac{m_3 g l}{4 m_1}}$$

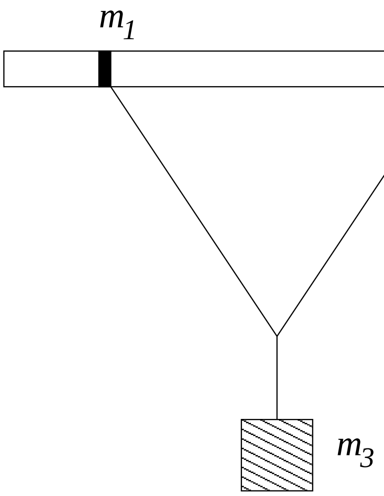

Figura 3.7: Illustrazione dell'esercizio 20.

e quindi la velocità relativa è la somma delle due velocità assolute ovvero $U = 2v_1 = \sqrt{2gl}$.

21. **I due corpi rappresentati in figura 3.8 sono collegati da un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza l; il corpo di massa m_1 può scorrere senza attrito lungo un'asta orizzontale. I due corpi vengono lasciati liberi di muoversi con velocità iniziali nulle in corrispondenza al valore $\alpha = \alpha_0$ dell'angolo che il filo forma con la verticale. Si calcoli l'ampiezza A del moto oscillatorio del corpo di massa m_1 e i moduli v_1 v_2 delle velocità che i corpi possiedono quando si trovano allineati lungo la verticale.**

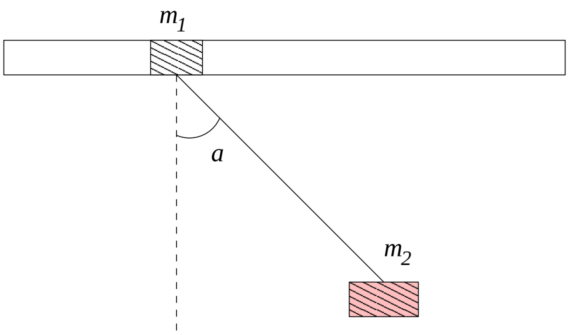

Figura 3.8: Illustrazione dell'esercizio 21.

22. **Su un piano orizzontale senza attrito due carrelli di masse $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 4$ kg sono vincolati da una molla di lunghezza a riposo l_0 e costante elastica k. Originariamente i due carrelli si muovono sul piano con velocità $v_0 = 1$ m/s nel verso che va da m_1 a m_2; la molla è mantenuta compressa a una lunghezza $l_0/2$. In $t = 0$ la molla viene sbloccata. Determinare:**

    - **una coppia di valori (l_0, k) tali che in $t = 1$ s il carrello di massa m_1 sia fermo nel sistema del laboratorio;**
    - **l'equazione del moto di m_2 nel sistema di riferimento solidale a m_1.**

Scriviamo la legge di Newton per i due corpi:

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 + l_0)$$

da cui

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m_1}l_0$$
$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{k}{m_2}l_0$$

e quindi sottraendo membro a membro si ha:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(x_2 - x_1) + kl_0\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

da cui definendo la massa ridotta $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e la coordinata di x_2 rispetto a quella x_1, $z = x_2 - x_1$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{\mu}(z - l_0)$$

che tenendo conto delle condizioni iniziali, $z(0) = l_0/2$ e $\dot{z}(0) = 0$, visto che entrambi procedono inizialmente con la stessa velocità e quindi con velocità relativa nulla, si ha:

$$z(t) = l_0 - \frac{l_0}{2}cos\omega t$$

dove $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$.

Dalla definizione di centro di massa ricaviamo

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = (m_1 + m_2)x_G$$
$$x_2 - x_1 = z$$

$$x_1 = x_G - \frac{m_2}{M} z = v_0 t - \frac{m_2 l_0}{M}\left[1 - \frac{1}{2} cos\omega t\right]$$

avendo usato il fatto che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme con la velocità iniziale v_0 e avendo posto $M = m_1 + m_2$. Ricaviamo la velocità del primo carrello e quindi

$$\dot{x}_1(t) = v_0 - \frac{m_2 l_0 \omega}{2M} sen\omega t$$

da cui imponendo che a t^* la sua velocità si annulli si ottiene

$$2Mv_0 = m_2 l_0 \omega sen\omega t^*.$$

Fissiamo k in modo che il seno sia positivo, per esempio, a $k = 16/3$ N/m ottenendo $\omega = 2$ rad/s e ricaviamo il valore di $l_0 = 1.65$ m. La coppia (k, l_0) trovata garantisce che il primo carrello si fermi istantaneamente dopo un secondo. L'unico vincolo è stato quello di mantenere positivo il seno.

23. **Due carrelli A e B di masse m_A e m_B collegati da una molla di costante elastica k possono muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Sul carrello A si trova una persona di massa m: il sistema è in quiete e la molla ha lunghezza uguale a quella di riposo l. All'istante $t = 0$ la persona salta giù dal carrello A, dalla parte opposta a B e la sua velocità u relativa ad A è parallela al piano di terra. Si calcoli:**

    a) **le velocità v_A, v_B e v rispetto al suolo dei carrelli e della persona subito dopo il salto;**

    b) **il lavoro L compiuto dalla persona per effettuare il suo salto;**

    c) **la compressione massima δ della molla;**

    d) **la legge oraria del moto del carrello A.**

24. **Nel sistema in figura 3.9, il blocco di massa $m = 2$ kg, altezza $h = 44$ cm e inclinazione $\alpha = \pi/4$ rad, si trova su un piano orizzontale lungo il quale può scorrere. Una sferetta di massa $m_1 = \gamma m$, $\gamma = 0.1$, è appoggiata all'estremità della molla di costante elastica k e lunghezza a riposo $l = \overline{AB}/2$. Inizialmente il sistema è in quiete e la molla è compressa di un tratto $\delta_0 = l/2$. Si eliminano i vincoli chhe tengono compressa la molla e si lascia il sistema libero di muoversi. La sferetta arriva al suolo nel punto di ascissa $x^* = -107$ cm. Trascurando gli attriti si calcoli l'ascissa $\bar{x}$ della sferetta quando essa passa per il vertice A e corrispondentemente i moduli v e v_1 delle velocità della sferetta e del blocco rispetto a terra. Si calcoli inoltre la costante elastica della molla.**

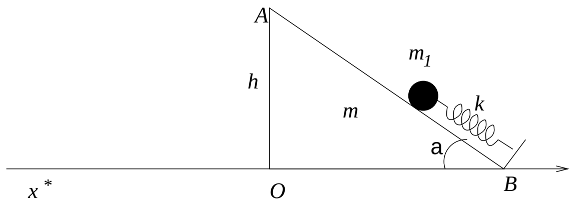

Figura 3.9: Illustrazione dell'esercizio 24.

Visto che lungo l'orizzontale non ci sono forze esterne, la quantità di moto si conserva. Essendo inizialmente nulla, rimane nulla. In particolare, il baricentro ha velocità nulla e conserva la sua coordinata orizzontale:

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + mx}{m_1 + m} = \frac{m_1 x_1' + mx'}{m_1 + m} = x_G'$$

da cui $m_1 \Delta x_1 = -m\Delta x$. Se teniamo conto del fatto che $\Delta x = \bar{x}$ e $\Delta x_1 = \bar{x} - \frac{3h}{4tg\alpha}$, si ha:

$$\bar{x} = \frac{3hm_1}{4tg\alpha(m_1 + m)} = \frac{3h\gamma}{4tg\alpha(1+\gamma)}.$$

Conoscendo la gittata, $s = \bar{x} - x^*$, la relazione che lega s alla velocità $\vec{v}_1$ della sferetta al momento del salto fornisce una equazione nella velocità incognita. È necessaria una seconda equazione per determinare la velocità visto che essa giace nel piano. Essa si ricava dalla geometria, visto che il punto materiale si muove lungo il piano inclinato fino al salto e quindi è nota la direzione della velocità. Purtuttavia devo ricavare la relazione tra la velocità assoluta e quella relativa, visto che solo di quest'ultima conosco la direzione, che coincide appunto con il piano inclinato.

Dalla cinematica si ha:

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_{1x}' + v \\ v_{1y} &= v_{1y}' \end{aligned}$$

da cui, se teniamo conto della conservazione lungo l'orizzontale della quantità di moto, $m_1 v_{1x} + mv = 0$, si ha $v_{1x}' = v_{1x}(1+\gamma)$ e quindi

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{1y}'}{v_{1x}'}(1+\gamma) = tg\alpha(1+\gamma).$$

Possiamo legare la gittata s alla velocità secondo l'equazione:

$$v_{1x}^2 [h + (1+\gamma)tg\alpha s] = \frac{g}{2}s^2$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{gs^2}{2\,[h+(1+\gamma)tg\alpha s]}\,[1+tg^2\alpha(1+\gamma)^2]} = 2.82 m/s$$

e

$$v = \gamma v_{1x} = \gamma s\sqrt{\frac{g}{2\,[h+(1+\gamma)tg\alpha s]}} = 0.19 m/s.$$

Dal teorema delle forze vive, applicato tra l'istante iniziale e quello del salto, ricaviamo la costante elastica. La forza elastica compie lavoro positivo mentre la forza peso fa lavoro resistente mentre il punto sale di un tratto $3h/4$ e quindi:

$$\frac{1}{2}k\delta_0^2 = \frac{3}{4}m_1 gh + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

da cui $k = 122$ N/m.

25. **Un blocco di massa $M_1 = 10$ kg è a riposo su un piano orizzontale senza attrito ed è appoggiato ad una molla di costante elastica $k = 4$ N/m, solidale con una parete. Sul blocco M_1 è poggiato un blocchetto di massa $m = 0.8$ kg come mostrato in figura 3.10. Il coefficiente di attrito dinamico fra m e M_1 è $\mu_1 = 0.3$. Un proiettile di massa $m_p = 0.2$ kg e velocità $v_p = 20$ m/s urta anelasticamente il blocchetto m e vi rimane conficcato. Calcolare gli spostamenti x_m e x_{M_1} rispettivamente di m e M_1 dopo $t = 0.5$ s dall'urto rispetto al riferimento in figura 3.10. Calcolare inoltre le rispettive velocità.**

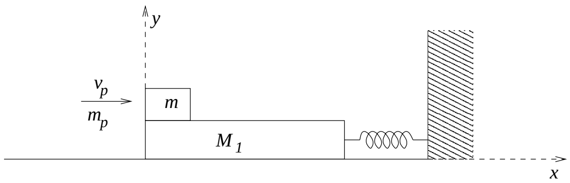

Figura 3.10: Illustrazione dell'esercizio 25.

3.4 Esercizi di rassegna

26. **Un satellite di massa $m_1 = 500$ kg ruota su un'orbita circolare di raggio $R = 10^7$ m intorno alla terra. Durante il suo moto urta un corpo di massa $m_2 = m_1$ nell'istante in cui quest'ultimo, lanciato dalla terra, si trova**

in quiete rispetto ad esso. Si calcoli la distanza minima dal centro della terra raggiunta dalle due masse che, dopo il loro incontro, costituiscono un solo satellite.

27. **Un proiettile puntiforme di massa $m = 0.1\,kg$ e velocità $v = 25\,m/s$ si va a conficcare in un disco omogeneo di massa $M = 2$ Kg, centro C e raggio $R = 0.2$ m con parametro d'urto $b = 3R/4$. Il disco, inizialmente fermo, è incernierato nel punto A ($AC = R/2$) e può ruotare senza attrito intorno ad un asse verticale passante per A come mostrato in figura. Calcolare:**

    (a) **l'impulso esercitato dall'asse passante per A durante l'urto;**

    (b) **l'energia dissipata nell'urto.**

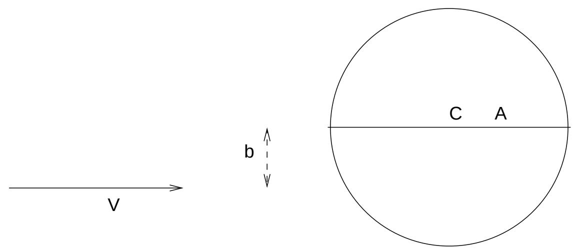

Figura 3.11: Illustrazione dell'esercizio 27.

Questo esercizio chiarisce la differenza tra la conservazione della quantità di moto e del momento angolare in un urto anelastico. La reazione vincolare dell'asse non può essere considerata una forza non impulsiva durante l'urto, sicchè non vale la conservazione della quantità di moto, mentre il suo momento è comunque nullo e pertanto si conserva il momento angolare rispetto ad un polo passante per l'asse. Il fatto che la reazione vincolare è impulsiva, risulta evidente se si pensa ad un proiettile che si conficca nel disco con parametro nullo. In questo caso l'asse deve assorbire tutta la quantità di moto iniziale del proiettile nella brevissima durata dell'urto e di qui la natura impulsiva della reazione.

Dalla conservazione del momento angolare si ha:

$$mvb = I\omega$$

dove, a norma del teorema di Huygens-Steiner,

$$I = \frac{R^2}{4}(3M + 5m + m\sqrt{7})$$

e quindi la velocità angolare dopo l'urto è

$$\omega = \frac{3mv}{R(3M+5m+m\sqrt{7})} = 5.54s^{-1}.$$

Da qui si calcola l'energia dissipata, come differenza dell'energia cinetica del proiettile e di quella del sistema:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{9m^2v^2}{8(3M+5m+m\sqrt{7})} = 30.21\,\mathrm{J}.$$

La distanza del centro di massa dopo l'urto dall'asse di rotazione è

$$d = \frac{R}{2}\sqrt{1+\frac{4m^2}{(m+M)^2}+\frac{m\sqrt{7}}{m+M}} = 0.1065\,\mathrm{m}$$

e quindi la quantità di moto subito dopo l'urto è

$$(m+M)\omega d\hat{\imath}$$

dove il versore $\hat{\imath}$ ha componenti $(sin\beta, -cos\beta)$ nel sistema di riferimento con origine in C, asse X parallelo alla velocità iniziale del proiettile e asse Y orientato verso l'alto, con $tan\beta = \dfrac{3}{2+\sqrt{7}+2M/m}$ e quindi $\beta = 3.8°$.

L'impulso esercitato dall'asse si ricava dalla variazione della quantità di moto:

$$I_x = (m+M)\omega d sin\beta - mv = -2.42N\cdot s$$

$$I_y = -(m+M)\omega d cos\beta = -1.24N\cdot s.$$

28. **Un satellite artificiale, in orbita circolare intorno alla terra a distanza $d = 300$km dalla sua superficie, esplode frammentandosi in due parti di uguale massa. Uno dei due frammenti viene emesso con angolo $\theta = \pi/6$ rispetto alla direzione del satellite, mentre l'altro ha il modulo della velocità pari a 3 volte quello del primo, ovvero $|\vec{v}_2| = 3|\vec{v}_1|$. Determinare:**

    a) i moduli delle velocità di entrambi i frammenti subito dopo l'esplosione;

    b) stabilire se il primo frammento impatta sulla terra e, in caso affermativo, calcolarne la velocità di impatto.

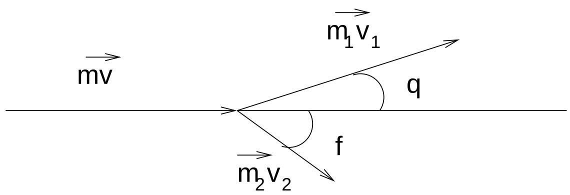

Figura 3.12: Illustrazione della conservazione della quantità di moto nell'esercizio 28.

Durante l'esplosione, non essendoci forze esterne in gioco, si conserva la quantità di moto. La figura 3.12 illustra schematicamente la conservazione della quantità di moto. Si noti che i tre vettori giacciono nello stesso piano altrimenti non potrebbe essere garantita la conservazione. Pertanto le equazioni non banali sono solo due:

$$mv = m_1 v_1 cos\theta + m_2 v_2 cos\phi$$

$$m_1 v_1 sin\theta = m_2 v_2 sin\phi.$$

Essendo $\theta = \pi/6$, $m_1 = m_2 = m/2$ e $v_2 = 3v_1$, si ha $v_1 = \dfrac{4v}{\sqrt{35}+\sqrt{3}}$ e $v_2 = 3v_1$ dove la velocità v del satellite si ricava dall'orbita circolare: $v^2 = \dfrac{GM_T}{r_T + d}$.

A partire da subito dopo lo scoppio possiamo applicare ad entrambi i frammenti tanto la conservazione del momento angolare che dell'energia meccanica, vista l'assenza di successive dissipazioni e di momenti di forze esterni. Per determinare se il primo frammento arriva a terra, ricaviamo il punto di minima distanza dal centro della terra dell'orbita del satellite. Se questo punto avrà distanza inferiore al raggio terrestre, possiamo concludere che il frammento cadrà a terra, altrimenti no. Dalla conservazione del momento angolare e dell'energia meccanica si ha:

$$m_1 v_1 (r_T + d) cos\theta = m_1 v_A r_A$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{G m_1 M_T}{r_T + d} = \frac{m_1 v_A^2}{2} - \frac{G m_1 M_T}{r_A}$$

avendo denotato con A il punto di minima (o massima) distanza e con r_A la sua distanza dal centro della terra. Risolvendo si ottengono le due soluzioni (massima e minima distanza):

$$r_A = \frac{(\sqrt{35}+\sqrt{3})^2 \pm \sqrt{(\sqrt{35}+\sqrt{3})^4 - 24(\sqrt{35}+\sqrt{3})^2 + 192}}{2[(\sqrt{35}+\sqrt{3})^2 - 8]}(r_T + d)$$

di cui la più piccola, pari a circa $0.11(r_T + d)$, è inferiore ad r_T e quindi conferma l'effettivo impatto del frammento a terra. La velocità con cui impatta, v_T, si ottiene imponendo nuovamente la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{GM_T}{r_T + d} = \frac{v_T^2}{2} - \frac{GM_T}{r_T}.$$

Da qui si ricava

$$v_T^2 = v_1^2 + \frac{2GM_T}{r_T + d}\frac{d}{r_T} = \frac{GM_T}{r_T + d}\left[\frac{16}{(\sqrt{35}+\sqrt{3})^2} + \frac{2d}{r_T}\right]$$

da cui segue che $v_T = 4.69$ km/s.

3.5 Fluidi