Indice

Capitolo 1

Appunti di cinematica (G. De Lellis, a.a. 2004-2005)

1.1 Vettori

Limitiamo la trattazione dei vettori a quelli nello spazio a tre dimensioni ($\mathbb{R}^3$ su campo $\mathbb{R}$).

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su campo $\mathbb{R}$ è l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali (dette vettori) in cui sono state definite due leggi: una applicazione chiamata somma, la quale dati due vettori ve ne associa un terzo, e l'altra applicazione detta moltiplicativa che dati un vettore e uno scalare del campo (in questo caso $\mathbb{R}$) vi associa un altro vettore.

Dati due vettori $\vec{x_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{x_2} = (x_2, y_2, z_2)$, la legge di somma è definita come

$$\vec{x_1} + \vec{x_2} \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

e gode delle seguenti proprietà: associativa, commutativa, esistenza del vettore nullo $(0, 0, 0)$ e di quello simmetrico per ogni vettore dato, ovvero la terna che si ottiene prendendo con segni opposti tutte le componenti.

Dato un vettore $\vec{v}$ di componenti (x, y, z), la legge moltiplicativa per uno scalare reale α è definita come

$$\alpha \cdot \vec{v} \equiv (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

e,$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sono valide le seguenti proprietà:

1. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$
2. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v})$

4. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Verificare le proprietà precedentemente elencate.

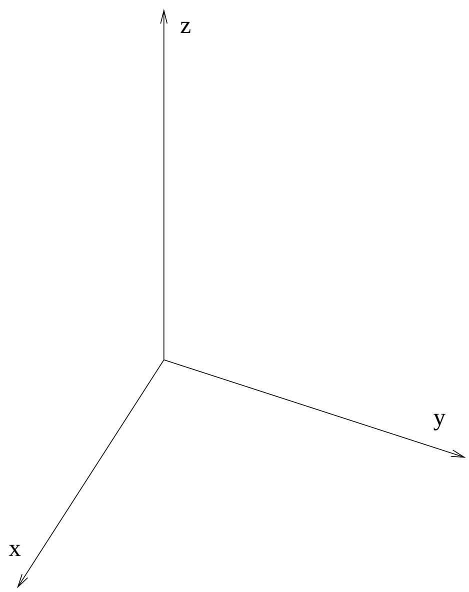

Figura 1.1: Illustrazione di una terna levogira di assi cartesiani.

Una terna di assi cartesiani ortogonali come mostrata in Fig. 1.1 è detta levogira perchè la rotazione di un angolo retto di ciascun semiasse positivo per sovrapporsi al successivo, per esempio il semiasse x nella sovrapposizione a quello y, avviene intorno al terzo asse, quello z nell'esempio, in senso antiorario. Tale terna si dice anche destrorsa.

Richiamiamo ora le definizioni di prodotto scalare e vettoriale tra due vettori. Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è uno scalare che può essere calcolato equivalentemente sia come prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso che come somma dei prodotti delle componenti omologhe, ovvero detto θ l'angolo compreso

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

In base alla definizione, si evince che due vettori ortogonali hanno prodotto scalare nullo. Dunque, la determinazione di un vettore ortogonale ad uno assegnato si ottiene richiedendo che il loro prodotto scalare sia nullo. Dato quindi un vettore, esiste una infinità quadrata di vettori ortogonali al primo. Eventuali altre condizioni fornite ridurranno le ambiguità e consentiranno l'identificazione univoca del vettore richiesto.

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore diretto ortogonalmente al piano che comprende i primi due, di modulo dato dal prodotto dei due moduli per il seno dell'angolo compreso. Il suo verso è tale da vedere il primo vettore sovrapporsi al secondo ruotando in senso antiorario e percorrendo l'angolo più piccolo. La regola della mano destra permette la visualizzazione del risultato del prodotto vettoriale: il dito medio rappresenta il prodotto vettoriale dei due vettori identificati con pollice e indice.

Da tale regola, detti $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ i versori di una terna levogira di assi coordintati x, y e z rispettivamente, discendono le seguenti relazioni:

$$\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \wedge \hat{k} = \hat{i}$$
$$\hat{k} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath}.$$

Se teniamo conto che il prodotto vettoriale è anticommutativo, ovvero $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$, $\forall \vec{a}$, $\vec{b}$, siamo ora in grado di calcolare il prodotto vettoriale di qualunque coppia dei versori, in qualsivoglia ordine siano messi.

Dato il prodotto vettoriale dei versori in un sistema di assi cartesiani levogiro, determiniamo la regola del prodotto vettoriale per componenti di una generica coppia di vettori.

$$\begin{aligned} &\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \wedge (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) = \\ &(a_yb_z - a_zb_y)\hat{\imath} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\jmath} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Il vettore prodotto vettoriale si può anche calcolare come lo sviluppo simbolico del determinante della matrice ottenuta mettendo le componenti dei primi due vettori nelle prime due righe e i versori degli assi nella terza:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

La proprietà del prodotto vettoriale di due vettori assegnati di essere ortogonale al piano che li contiene può essere sfruttata in diversi modi: per esempio per determinare un vettore di caratteristiche richieste (modulo e verso) che sia ortogonale a due vettori dati; oppure complanare ai due vettori assegnati. Nel primo caso basta scegliere un vettore parallelo o anti-parallelo (a seconda del verso richiesto) al prodotto vettoriale mentre nel secondo caso va scelto un vettore ortogonale ad esso.

1. **Siano dati i seguenti vettori:** $\vec{a} = (1, 2, 3)$**,** $\vec{b} = (-1, 0, 1)$**,** $\vec{c} = (-3, 1, 1)$ **e** $\vec{d} = (3, -6, 3)$**. Determinare gli angoli tra loro compresi e quali sono mutuamente ortogonali.**

2. **Determinare quale dei vettori dell'esercizio precedente è parallelo al vettore $\vec{e} = (3, 6, 9)$.**

3. **Dati i vettori dell'esercizio 1, determinare i vettori componenti di $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ nella direzione di $\vec{a}$.**

   Il vettore componente di $\vec{b}$ nella direzione di $\vec{a}$ è un vettore avente la stessa direzione di $\vec{a}$ e modulo pari alla componente di $\vec{b}$ nella direzione di $\vec{a}$ ovvero $\vec{b} \cdot \hat{a}$. Esso è pertanto dato dal prodotto del versore $\hat{a}$ per il prodotto scalare del vettore $\vec{b}$ con il versore $\hat{a}$ stesso.

   Il versore $\hat{a}$ è $\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$. Quindi il vettore componente di $\vec{b}$ e $\vec{c}$ nella direzione di $\vec{a}$ sono entrambi pari a

$$\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, 3)$$

   mentre quello di $\vec{d}$ è nullo essendo ortogonale ad $\vec{a}$.

4. **Determinare la forma generale di un vettore perpendicolare ai seguenti due vettori: $\vec{a} = (2, 1, 0)$ e $\vec{b} = (4, 1, 2)$.**

   Detto $\vec{c}$ il vettore cercato di componenti (x, y, z), l'ortogonalità ad entrambi necessita che i due prodotti scalari, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ e $\vec{c} \cdot \vec{b}$, siano nulli, ovvero in termini di componenti:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 4x + y + 2z &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

   il che costituisce un sistema di due equazioni in tre incognite che come è noto ha una infinità semplice di soluzioni. Infatti, ricavando la y e la z in termini di x si ottiene: $y = -2x$ e $z = -x$ per cui tutti i vettori proporzionali al vettore $(1, -2, -1)$ con qualsivoglia fattore di proporzionalità reale costituiscono la soluzione al nostro problema.

   L'esercizio può anche essere risolto calcolando il prodotto vettoriale tra i due vettori dati che, come è noto, è ortogonale ad entrambi. Il vettore prodotto vettoriale di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è dato da $2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$. Tale vettore è proporzionale con fattore di proporzionalità 2 a quello trovato per altra via, $(1, -2, -1)$.

5. **Individuato un piano mediante i tre punti A = (1,2,2), B = (2,0,-2) e C = (3,1,1), determinare il versore perpendicolare a questo piano.**

6. **Dati due vettori (1,-2,-4) e (2,1,1), determinare l'angolo compreso e l'area del triangolo formato da essi e dal segmento che unisce i loro vertici.**

7. **In figura 1.2 sono rappresentati gli spostamenti successivi di un aeromobile. La posizione iniziale dell'aereomobile è P e la posizione finale è P'. Determinare lo spostamento risultante in modulo, direzione e verso. Oltre che geometricamente, ricavare la risposta anche graficamente, facendo un disegno in scala e misurando a mano il risultante.**

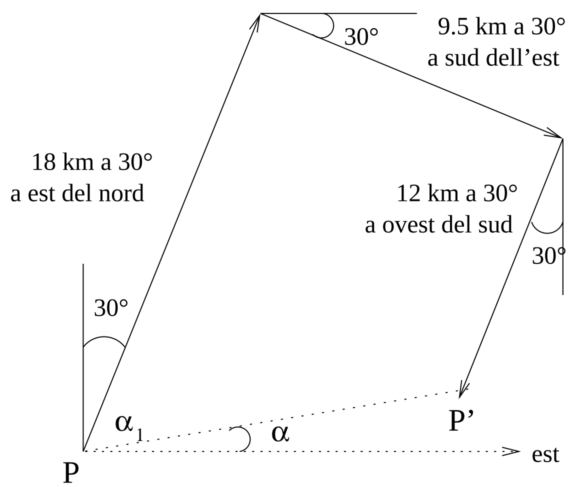

Figura 1.2: Illustrazione dell'esercizio 7.

Il modulo dello spostamento è pari all'ipotenusa del triangolo rettangolo avente un cateto di 9.5km e l'altro di 6km (18km-12km) ed è pertanto 11.2km. L'angolo in P di codesto triangolo rettangolo misura $\alpha_1 = atan\dfrac{9.5}{6}$ e quindi l'angolo che lo spostamento forma con la direzione est è $\alpha = \pi/2 - \pi/6 - \alpha_1 = 0.04$ rad $= 2.3°$. Pertanto diremo che lo spostamento risultate è stato di 11.2km, 2.3° a nord dell'est.

8. **Dati i vettori** $\vec{a} = (0, 3, 4)$ **e** $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ **determinare il vettore di modulo 10 che giace nel piano individuato dai suddetti vettori e che formi con essi lo stesso angolo.**

9. **A un palo telegrafico verticale sono attaccati due fili orizzontali formanti un angolo** $2\alpha = \pi/2$ **e aventi entrambi una tensione nota di modulo** τ**. Per evitare che il palo si fletta,**

in un piano verticale bisecante l'angolo fra i due fili e a partire dallo stesso punto cui fanno capo i due fili, si pone un tirante inclinato di un angolo $\beta = \pi/4$ rispetto all'orizzontale. Trovare la tensione del tirante e la sollecitazione verticale di compressione (carico di punta) del palo.

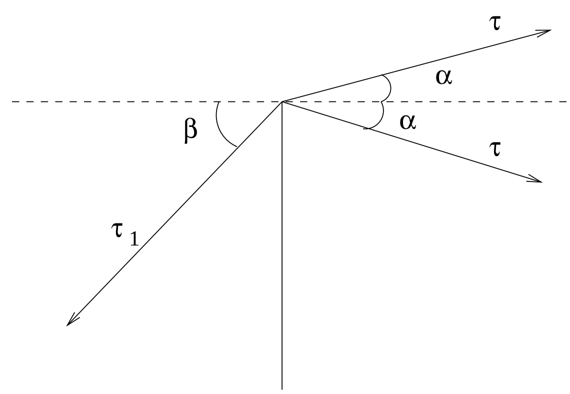

Figura 1.3: Illustrazione dell'esercizio 9.

La figura 1.3 mostra la direzione e il verso delle tre tensioni. Nel piano orizzontale dove sono contenuti i due fili di tensione τ, la risultante delle tensioni deve essere nulla, visto che il tirante è utilizzato proprio per questo scopo. Quindi la componente orizzontale di τ_1 deve equilibrare le due tensioni τ. In formule

$$\tau_1 cos\beta = \tau cos\alpha + \tau cos\alpha$$

da cui segue che $\tau_1 = 2\tau$. Il carico di compressione S è esercitato dalla componente verticale di τ_1 ed è quindi $S = \tau_1 sin\beta = \tau\sqrt{2}$.

10. **Per verificare la regola del parallelogramma per la composizione delle forze si utilizza l'apparecchio mostrato in figura 1.4. Due fili flessibili, di massa trascurabile, passano su due carrucole A e B e recano da un lato, rispettivamente, i pesi $p_1 = 50$g e $p_2 = 30$g e dall'altro sono annodati in un punto P, cui è fissato un terzo peso p_3. Determinare il valore del peso p_3 affinché, in equilibrio, l'angolo fra i due fili in P risulti di 60°. Determinare inoltre gli angoli che i fili formano con la verticale.**

    Nel punto P, il risultante delle forze applicate deve essere nullo. In P agiscono le due tensioni dei due tratti di filo ($\vec{\tau_1}$ da P a p_1 e $\vec{\tau_2}$ da P a

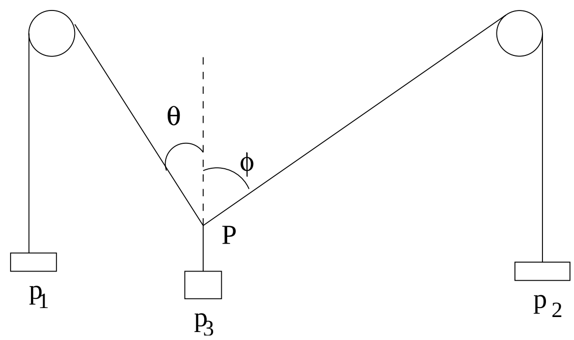

Figura 1.4: Illustrazione dell'esercizio 10.

p_2) e il peso $\vec{p_3}$. La loro somma vettoriale deve essere nulla:

$$\vec{\tau_1} + \vec{\tau_2} + \vec{p_3} = 0. \tag{1.4}$$

Lungo un filo di massa trascurabile la tensione è ovunque uguale e, in condizioni di equilibrio, dovendo i pesi p_1 e p_2 rimanere fermi, le tensioni devono necessariamente uguagliare i pesi, ovvero $\tau_1 = p_1$ e $\tau_2 = p_2$. Scrivendo in termini di componenti l'equazione 1.4 si ottiene

$$\begin{aligned} &p_1 cos\theta + p_2 cos\phi = p_3 \\ &p_1 sin\theta = p_2 sin\phi \\ &\theta + \phi = \pi/3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

dove la terza condizione impone il vincolo richiesto sull'angolo totale. Usando la formula di addizione per il seno, $sin(\pi/3 - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}cos(\theta) - \frac{1}{2}sin(\theta)$, si ottiene

$$tg(\theta) = \frac{\sqrt{3}p_2}{2p_1 + p_2} = \frac{3\sqrt{3}}{13}$$

da cui $\theta = 21.8°$, $\phi = 38.2°$ e $p_3 = 70$g.

11. **Dato il vettore $\vec{A} = \hat{\imath}cos(\omega t) + \hat{\jmath}sin(\omega t)$ dove ω è una costante, se ne determini la sua derivata rispetto a t, $d\vec{A}/dt$, e si dimostri che è perpendicolare ad $\vec{A}$.**

    Si tratta di un vettore di componenti variabili. La derivata si ottiene derivando ciascuna componente rispetto alla variabile t. Per cui

$$d\vec{A}/dt = (-\omega sin(\omega t), \omega cos(\omega t))$$

e il prodotto scalare con $\vec{A}$ è nullo come volevasi dimostrare.

Si noti che il vettore $\vec{A}$ può essere visto come il vettore posizione di un punto che si muove di moto circolare. Infatti il suo modulo è costante mentre la sua direzione descrive una circonferenza. Il vettore $d\vec{A}/dt$ rappresenta la velocità del punto materiale che è ortogonale ad A come si vedrà e ha modulo pari a $\omega|\vec{A}|$.

12. **Detti x' e y' due assi ortogonali ruotati di una angolo θ rispetto alla coppia di assi x e y, determinare la relazione che lega i corrispondenti versori.**

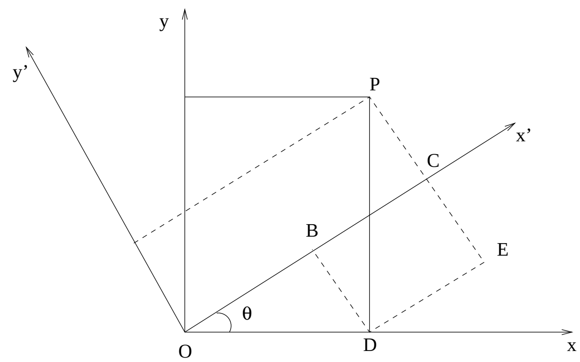

Figura 1.5: Illustrazione della rotazione di un angolo θ di un sistema di assi ortogonali.

Basta ricavare la relazione che lega le coordinate (x, y) di un punto P nel sistema primario con quelle (x', y') nel secondo sistema. Come si evince dalla figura 1.5, si ha

$$\begin{array}{l} y' = \overline{EP} - \overline{EC} = \overline{EP} - \overline{BD} = y cos\theta - x sin\theta \\ x' = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OB} + \overline{DE} = x cos\theta + y sin\theta \end{array} \tag{1.6}$$

Tale trasformazione coincide con una rotazione di un angolo θ del sistema di coordinate intorno ad un asse ortogonale al piano (diciamolo z). In termini matriciali, una tale rotazione si scrive come:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

1.2 Cinematica

A differenza della dinamica, che come vedremo nel prossimo capitolo studia il moto a partire dalle sue cause (le forze), la cinematica prescinde dalle cause che hanno generato il moto e ne studia solo le caratteristiche, mettendo in relazione alcune grandezze fisiche quali velocità, accelerazione, legge oraria e traiettoria.

In particolare, la cinematica studia le relazioni che consentono di ricavare la velocità e l'accelerazione di un moto una volta che sia nota la legge oraria, oppure, andando a ritroso, la legge oraria quando sia nota l'accelerazione e due condizioni iniziali o la velocità e una condizione iniziale.

Chiariremo ora questi concetti, uno per volta. La legge oraria rappresenta una equazione vettoriale del tipo $\vec{r} \equiv \vec{r}(t)$ con cui viene specificato ad ogni istante il vettore posizione di un punto materiale in un certo sistema di riferimento. La traiettoria di un moto è quella curva nello spazio che descrive istante per istante la posizione del punto materiale, ovvero il luogo dei punti descritto dal moto del punto materiale. La traiettoria è specificata quando sono note le sue equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

dove il vettore di componenti $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ altri non è che il vettore posizione $\vec{r}(t)$ e quindi data la legge oraria è nota anche la traiettoria. In alcune applicazioni vedremo come è possibile ricavare l'equazione della traiettoria pur senza conoscere la teoria delle curve.

Si dice velocità media quel vettore che si ottiene dividendo lo spostamento percorso e il tempo impiegato a percorrerlo. Dato uno spostamento $\overrightarrow{AB} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$, la velocità media nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è

$$\vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

La velocità istantanea o semplicemente velocità nell'istante t_1 è il passaggio al limite per $t_2 \to t_1$ della velocità media nell'intervallo $[t_1, t_2]$:

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m(t_1, t_1 + \Delta t).$$

Il vettore velocità $\vec{v}$ è quindi la derivata rispetto al tempo del vettore posizione, ovvero $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$. Esso esprime la rapidità con cui cambia nel tempo la posizione di un punto materiale e quindi la sua velocità. Come già visto, la derivata di un vettore è il vettore che si ottiene derivando ciascuna componente.

L'accelerazione di un punto materiale è la rapidità con cui varia nel tempo la velocità del punto ed è pertanto la derivata rispetto al tempo del vettore velocità, ovvero la derivata seconda rispetto al tempo del vettore posizione:

$$\vec{a}(t) = d\vec{v}(t)/dt = d^2\vec{r}(t)/dt^2.$$

Con procedimento analogo, ma a ritroso, è possibile passare dall'accelerazione alla velocità e alla legge oraria. Vediamo come. È noto dall'analisi che, data una funzione $f(t)$ derivabile e detta $F(t)$ la sua derivata, ovvero $F(t) = df(t)/dt$, se è nota la funzione $F(t)$ e il valore della funzione f in un suo punto, ad esempio $f(t_0) = f_0$, allora si può ricavare $f(t)$ come

$$f(t) = f_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)dt. \tag{1.9}$$

L'equazione 1.9 è immediata conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale. Visto che la derivata di un vettore si ottiene derivando ciascuna componente, questo teorema si applica alle componenti di un vettore e quindi anche ai vettori. Pertanto segue che:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt \tag{1.10}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \tag{1.11}$$

dove, con abuso di notazione, intendiamo con l'integrale di un vettore quel vettore che ha per componenti l'integrale delle componenti del vettore integrando. Risulta pertanto evidente che per ricavare la velocità a partire dall'accelerazione è necessaria e sufficiente una condizione sulla velocità, ovvero conoscere la velocità in un dato istante. Visto che analogamente è necessaria una condizione per ricavare la legge oraria a partire dalla velocità, partendo dall'accelerazione sono necessarie due condizioni per poter ricavare la legge oraria, una sulla velocità e l'altra sulla posizione.

Le relazioni espresse nelle equazioni 1.10 e 1.11 si possono anche ricavare per via geometrica se si parte dalla definizione di velocità e accelerazione media. Ricaviamo la relazione in Eq. 1.10 partendo dalla definizione di velocità media. Se per semplicità consideriamo il moto in una sola dimensione, la velocità media nell'intervallo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ è:

$$v_m(t_0, t_0 + \Delta t) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

da cui si ricava

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v_m(t_0, t_0 + \Delta t)\Delta t.$$

Questa relazione mostra come si possa calcolare la coordinata al tempo $t_0 + \Delta t$ quando la stessa sia nota al tempo t_0 e sia nota la velocità media nell'intervallo considerato. Analogamente si può scrivere

$$x(t_0 + 2\Delta t) = x(t_0 + \Delta t) + v_m(t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t)\Delta t$$

ovvero

$$x(t_0 + 2\Delta t) = x(t_0) + v_m(t_0, t_0 + \Delta t)\Delta t + v_m(t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t)\Delta t.$$

Si può poi predire la posizione al tempo $t_0 + 3\Delta t$ e così via in qualunque

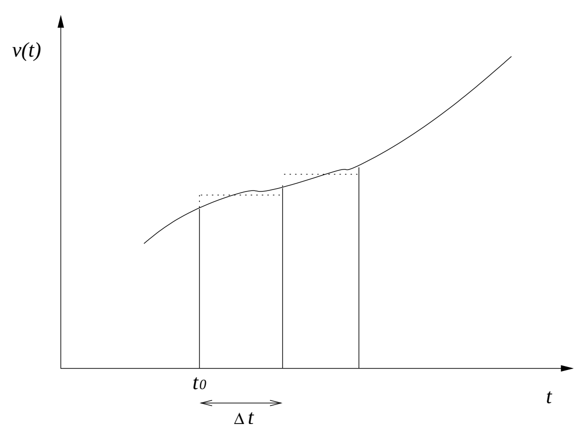

Figura 1.6: Grafico della velocità e soluzione grafica della legge oraria.

istante. La figura 1.6 riporta il grafico della velocità in funzione del tempo. Il valore della velocità media negli intervalli $[t_0, t_0 + \Delta t]$ e $[t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t]$ è rappresentato dalle linee orizzontali tratteggiate. Per ottenere la coordinata al tempo $t_0 + 2\Delta t$, basta aggiungere a $x(t_0)$

l'area dei due rettangoli di base Δt e altezze pari alle velocità medie nei due intervalli. La coordinata ad un generico tempo $t = t_0 + n\Delta t$ si ottiene quindi aggiungendo a $x(t_0)$ l'area del rettangoloide formato da n rettangoli di base Δt e altezze pari alle velocità medie negli n intervalli di tempo, ovvero

$$x(t) = x(t_0) + \sum_{i=1}^{n} \Delta t v_m(t_0 + [i-1]\Delta t, t_0 + i\Delta t).$$

Al tendere a zero di Δt, la velocità media diventa quella istantanea e l'area del rettangoloide diventa quella sotto la curva della funzione velocità che rappresenta appunto l'integrale definito della funzione da t_0 a t, così come espresso dall'Eq. 1.10.

Gli esercizi che seguono sono divisi a seconda della complessità del moto in moti unidimensionali e moti in due o tre dimensioni. In essi applicheremo le relazioni elencate sopra.

1.2.1 Moti unidimensionali

In questo caso la traiettoria è una retta che coicide con l'asse (o una sua parte) lungo il quale giace il moto giace. Si parla in questo caso di moto rettilineo e in particolare si dice moto rettilineo uniforme quando il corpo procede con velocità costante, e uniformemente accelerato quando procede con accelerazione costante.

È abbastanza singolare il caso in cui il moto di un corpo inizia e termina nello stesso punto dopo un intervallo di tempo finito. In tale caso, la velocità vettoriale media è evidentemente nulla perché lo spostamento risultate è nullo. Ciononondimeno, l'oggetto in movimento ha in generale percorso lo spostamento con una velocità istantanea non nulla e dopo un certo percorso è ritornato al punto di partenza. In effetti ciò può accadere anche nei moti a più dimensioni, pensiamo ad esempio ad un moto lungo una circonferenza. È dunque evidente che la velocità istantanea contiene molte più informazioni sul moto che quella media. In taluni casi, per recuperare il senso di rapidità di percorrenza, anche media, ci si chiede quale sia il valor medio del modulo della velocità: esso si ottiene dividendo lo spazio totale percorso per il tempo impiegato a percorrerlo, indipendentemente dal verso di percorrenza. Questo è, per esempio, quello che calcola il tachimetro di un autoveicolo che non si cura del verso di percorrenza della vettura ma solo dei giri della ruota.

13. **Due punti si muovono lungo una retta a partire dall'istante $t = 0$ con leggi orarie date da $x_1(t) = (t^2 + 2t + 1)\hat{\imath}$ e $x_2(t) = (2t^2 - 3t + 7)\hat{i}$. Determinare l'istante di collisione e la velocità di entrambi i punti in quell'istante.**

14. **All'istante $t = 0$ un treno parte con accelerazione scalare iniziale $a_0 = 0.4m/s^2$. L'accelerazione diminuisce linearmente col tempo e si annulla all'istante t^* in cui il treno ha raggiunto la velocità di modulo $v_f = 90$km/h. Si determini lo spazio percorso fino all'istante t^*.**

    Visto che l'accelerazione diminuisce linearmente con il tempo partendo dal valore a_0, possiamo scrivere: $a(t) = a_0 - bt$, dove $b > 0$. Integrando l'espressione dell'accelerazione otteniamo la velocità:

    $$v(t) = v_0 + \int_0^t (a_0 - bt)dt = a_0 t - \frac{b}{2}t^2$$

    dove abbiamo tenuto conto che parte da fermo ($v_0 = 0$). Integrando ancora l'espressione della velocità e considerando come origine del sistema di coordinate il punto di partenza ($s_0 = 0$) otteniamo lo spazio:

    $$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)dt = \frac{a_0}{2}t^2 - \frac{b}{6}t^3.$$

    Imponendo la condizione che l'accelerazione si annulli al tempo t^* e che la velocità nello stesso istante valga v_f, otteniamo $t^* = \frac{a_0}{b}$ e $v_f = v(t^*) = \frac{a_0^2}{2b}$ da cui ricaviamo $b = \frac{a_0^2}{2v_f}$ e $t^* = \frac{2v_f}{a_0} = 125$s.

    Infine $s(t^*) = \frac{a_0^3}{3b^2} = \frac{4v_f^2}{3a_0} = 2083$m.

15. **Un'auto percorre una strada dritta e ad un certo istante, guardando il tachimetro, il guidatore si accorge di procedere con velocità $v_0 = 20$km/h. Dopo aver percorso la distanza $s_1 = 200$m, il tachimetro segna invece la velocità $v_1 = 70$km/h.**

    a) **Supponendo che l'accelerazione sia stata costante tra le due osservazioni, determinare quanto tempo è stato impiegato per percorrere il tratto s_1 e che valore ha l'accelerazione.**

b) **Disponendo di un cronometro di precisione, il conducente verifica che il tempo effettivo di percorrenza è stato di $t_{1eff} = 18$s. Per controllare la precisione del suo tachimetro compie inoltre un tratto di $d_1 = 2$km mantenendo il tachimetro costantemente a 70km/h e verifica che il tempo di percorrenza è $t_2 = 100$s. Calcolare la velocità iniziale e l'accelerazione effettive dell'auto nel tratto di 200m.**

16. **Un'automobile parte da ferma all'istante $t = 0$ accelerando con accelerazione $a_0 = 2m/s^2$ fino al tempo $t_0 = 6s$ dopo di che continua a muoversi con velocità costante. Nell'istante in cui è partita è stata oltrepassata da un camion in moto nella stessa direzione e con lo stesso verso con una velocità $v_0 = 10m/s$. Graficare i diagrammi del moto dei due veicoli. Determinare l'istante in cui l'auto raggiunge il camion e quanto spazio avrà percorso in quell'istante.**

17. **Un'auto supera un incrocio ad una velocità $v_0 = 72$km$/h$ e poi prosegue a velocità costante. Tre secondi dopo, un'auto della polizia parte dallo stesso incrocio al suo inseguimento procedendo con accelerazione costante $a_0 = 3$m$/s^2$. Determinare dopo quanto tempo e a che distanza dall'incrocio la polizia supera l'auto e qual è la velocità dell'auto della polizia al momento del sorpasso.**

    Il moto dell'auto pirata è rettilineo uniforme, pertanto la sua legge oraria è
    $$s_{auto}(t) = v_0 t.$$
    Invece l'auto della polizia procede con moto uniformemente accelerato ma solo a partire dall'istante $t_0 = 3$s. Pertanto la sua velocità è
    $$v_{pol}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le t_0 \\ a_0(t - t_0) & t > t_0 \end{cases} \tag{1.12}$$
    La sua legge oraria è
    $$s_{pol}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le t_0 \\ \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 & t > t_0 \end{cases} \tag{1.13}$$
    Mettendo a sistema le due leggi orarie si ricava l'istante t^* di intersezione
    $$t^* = t_0 + \frac{v_0}{a_0} + \frac{1}{a_0}\sqrt{v_0^2 + 2a_0 v_0 t_0} = 18.856\text{s}$$

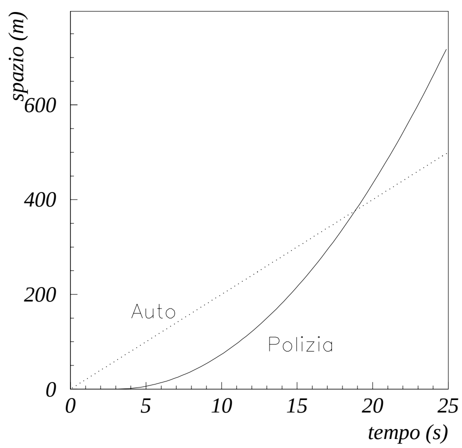

Figura 1.7: Illustrazione delle leggi orarie della polizia (linea continua) e dell'auto pirata (linea tratteggiata) dell'esercizio 17. Il loro punto di intersezione individua l'istante in cui la polizia raggiunge l'auto.

dove abbiamo preso l'unica soluzione effettiva per $t > t_0$. Dal punto di vista matematico le due leggi orarie rappresentano nella variabile temporale una retta e una parabola, come si vede in figura 1.7. Esse hanno dunque due punti di intersezione. La fisica però ci impone di scegliere l'unica soluzione vera che naturalmente è quella che si ha successivamente all'istante di partenza dell'auto della polizia.

Nell'istante t^*, lo spazio percorso è $s = 377.12$m e la velocità dell'auto della polizia è $v_{pol}(t^*) = a_0(t^* - t_0) = 47.57\mathrm{m}/s$ ovvero 171km/h.

18. **Un corpo viene lanciato verso l'alto a partire dal suolo e ricade nel punto di partenza. Sapendo che nell'ultimo secondo di volo percorre uno spazio $d = 20$m, si determini la sua velocità iniziale v_0 e la massima altezza da esso raggiunta trascurando la resistenza dell'aria.**

19. **In un moto unidimensionale, un punto materiale inizialmente in moto con velocità v_0 è soggetto ad una decelerazione costante di modulo a. Determinare la legge con cui la velocità dipende dalla posizione.**

    Presa l'origine del sistema di coordinate nel punto di partenza del punto materiale e l'asse orientato nel verso della velocità iniziale, la legge oraria è

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t \equiv t(x) = \frac{v_0}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{v_0^2 - 2ax}$$

da cui possiamo ricavare la velocità come

$$v(x) = v_0 - at(x) = \pm\sqrt{v_0^2 - 2ax} \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2ax. \tag{1.14}$$

Dobbiamo fare due osservazioni: la prima è che per arrivare nella posizione a distanza x da quella di partenza, il quadrato della velocità iniziale deve almeno essere pari a $2ax$, ovvero $v_0^2 \geq 2ax$. La seconda è che in ciascuna posizione x il punto ci passa con due velocità uguali ed opposte il che corrisponde al moto di andata e di ritorno, rispettivamente prima e dopo la posizione di arresto e inversione del moto che coincide con $x = v_0^2/2a$. Infine è utile osservare che se nel campo gravitazionale, dove $a = g$ se trascuriamo gli attriti, la relazione 1.14 esprime la velocità in funzione della quota che ritroveremo nel prossimo capitolo a partire dalla conservazione dell'energia meccanica. Possiamo per semplicità riscriverla come

$$v^2(h) = v_0^2 - 2gh. \tag{1.15}$$

20. **Un giocoliere lancia cinque palline a intervalli di tempo uguali l'una dall'altra senza interruzione. Se la massima altezza raggiunta dalla palline è $h = 2$m, determinare la posizione delle cinque palline quando una di esse è nella mano del giocoliere.**

21. **Un sasso viene lasciato cadere da fermo da un'altezza $H = 50$m e nello stesso istante un altro sasso viene lanciato verso l'alto sulla stessa verticale da un'altezza $h = 10$m con velocità iniziale v_0. Determinare v_0 se i due sassi si urtano all'altezza $h_1 = 20$m e dire quale velocità hanno i due sassi nel momento dell'urto. Calcolare poi il valore minimo di v_0 per il quale i due sassi si urtano prima di giungere al suolo.**

    Le due leggi del moto si possono scrivere come

$$s_1(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$s_2(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

L'istante t^* in cui il primo sasso giunge all'altezza h_1 è $s_1(t^*) = h_1 \Rightarrow t^* = \sqrt{2(H-h_1)/g} = 2.47$s da cui imponendo che $s_1(t^*) = s_2(t^*)$ possiamo ricavare v_0 ovvero

$$s_1(t^*) = s_2(t^*) \Rightarrow v_0 = (H-h)/t^* = 16.2\text{s}.$$

In questo istante la velocità dei due corpi è $v_1(t^*) = -gt^* = -24.2$m/s e $v_2(t^*) = v_0 - gt^* = -8$m/s.

Per rispondere alla seconda domanda assumiamo che sia $h_0 > 0$ la posizione in cui i due corpi collidono. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} h_0 &= H - \frac{1}{2}gt^2 \\ h_0 &= h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

e, dopo aver ricavato il tempo di collisione dalla prima relazione, lo sostituiamo nella seconda

$$t^2 = \frac{2(H-h_0)}{g} \Rightarrow h_0 = h + v_0\sqrt{\frac{2(H-h_0)}{g}} - H + h_0$$

e ricaviamo la velocità

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{H-h}{\sqrt{H-h_0}}$$

che è una funzione strettamente crescente nella variabile h_0 ($dv_0/dh_0 > 0 \forall h_0 \in [0, H[$) per cui il minimo lo assume in $h_0 = 0$ ed è

$$v_0(0) = \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{H-h}{\sqrt{H}} = 12.5\,m/s.$$

22. **Una palla da tennis è lasciata cadere dal terrazzo di un grattacielo. L'abitante di un appartamento osserva che la palla impiega un tempo $\Delta t = 0.25$s per attraversare tutta la sua finestra di altezza $h = 2.5$m. La palla da tennis cade fino al suolo dove rimbalza elasticamente (ripartendo con la stessa velocità di collisione) e riappare al bordo inferiore della finestra dopo un tempo $\Delta t_1 = 4$s. Determinare quanto tempo impiega per cadere dal terrazzo al suolo e l'altezza H del terrazzo rispetto al suolo trascurando la resistenza dell'aria.**

1.2.2 Moti nel piano o nello spazio

Lo studio dei moti in tre dimensioni si fa proiettando sugli assi di un sistema di riferimento scelto le equazioni vettoriali, generando tre equazioni scalari che quindi riconducono il problema a quello di tre moti unidimensionali. Ciò deriva dall'indipendenza delle componenti del moto. Quindi, se si chiede di ricavare la legge del moto a partire da una data accelerazione, si determineranno le tre componenti dell'accelerazione nel sistema di riferimento scelto, individuando poi, nello stesso sistema, le condizioni iniziali del moto sotto forma delle tre componenti della velocità e della posizione ad un dato istante.

I moti nel piano (due dimensioni) possono essere visti come moti in tre dimensioni in cui sulla terza proiezione l'accelerazione e la velocità iniziale sono entrambe nulle e quindi non c'è moto.

Nei moti piani e nello spazio il concetto di traiettoria è non banale in quanto si tratta in generale di una curva del piano o dello spazio. Pur senza entrare nella teoria delle curve, in alcuni casi ricaveremo l'equazione della traiettoria.

23. **Un aereo in picchiata si muove con velocità costante di modulo $v = 360$km/h mantenendo una inclinazione costante $\alpha = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Ad un'altezza $h = 800$m l'aereo lancia una bomba e dopo un tempo $\tau = 1$s ne lancia una seconda. Trascurando la resistenza dell'area, calcolare la distanza d tra i punti in cui le bombe raggiungono il suolo.**

24. **Un corpo sale lungo un piano liscio inclinato di un angolo $\alpha = \pi/4$ rispetto all'orizzontale. L'altezza $\overline{OB}$ del piano inclinato è $h = 45$ cm e la velocità v_0 che il corpo possiede ai piedi del piano (punto A in figura 1.8) è doppia di quella che gli permetterebbe di arrivare in cima (punto B) con velocità nulla. Si calcoli la lunghezza del segmento $\overline{OC}$.**

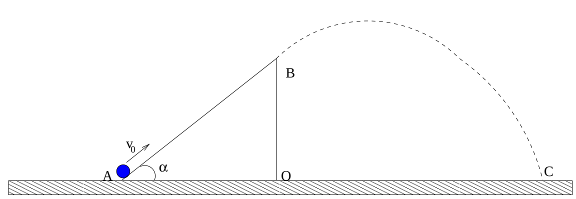

Figura 1.8: Illustrazione dell'esercizio 24

Analizziamo il moto lungo il piano inclinato. La componente dell'accelerazione lungo il piano è $a = -gsin\alpha$. Dunque possiamo studiarlo come moto unidimensionale di accelerazione assegnata a. Possiamo pertanto utilizzare il risultato dell'esercizio 19 che esprime la relazione tra la velocità e lo spazio percorso in un moto uniformemente accelerato. Calcoliamo così la velocità v_1 che consentirebbe al punto materiale di arrivare fermo in cima, ovvero ad una distanza $l = h/sin\alpha$. La dipendenza della velocità in funzione della lunghezza x è $v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2ax}$ cosicché se la velocità si annulla dopo un tratto l, $v(l) = 0$, allora $v_1 = \sqrt{2gsin\alpha l} = \sqrt{2gh}$. Pertanto la velocità iniziale è $v_0 = 2v_1 = 2\sqrt{2gh}$. Data questa velocità iniziale, la velocità del punto materiale nel punto B è $v_f = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{6gh}$.

Da questo istante il moto è puramente bidimensionale. Lo decomponiamo nelle due componenti: orizzontale e verticale. Se prendiamo come istante iniziale, $t = 0$, di questa parte del moto l'istante in cui si trova nel punto B di coordinate $(0, h)$, le condizioni iniziali per la velocità e per la posizione nel sistema di riferimento scelto saranno rispettivamente:

$$\begin{aligned} &v_{0x} = v_f cos\alpha \\ &v_{0y} = v_f sin\alpha \\ &x_0 = 0 \\ &y_0 = h \end{aligned}$$

Nella direzione orizzontale non vi è accelerazione e pertanto il moto è rettilineo uniforme:

$$x(t) = v_f cos\alpha t.$$

Lungo la verticale il corpo è soggetto all'accelerazione gravitazionale g e quindi

$$y(t) = h + v_f sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2.$$

La traiettoria è il luogo dei punti dello spazio (del piano in questo caso) occupati dal punto materiale durante il suo moto. L'equazione della traiettoria è pertanto una equazione che lega le variabili x e y che esprimono le due componenti del moto. Per determinare questa equazione possiamo ricavare il tempo dalla prima equazione invertendola e poi sostituire l'equazione $t(x)$ nella seconda equazione ricavando $y(t(x)) = y(x)$:

$$y = h + xtg\alpha - \frac{g}{2v_f^2 cos^2\alpha}x^2$$

che rappresenta l'equazione di una parabola.

La lunghezza del segmento $\overline{OC}$, detta gittata, si ottiene quindi dall'equazione della traiettoria determinando quel valore x_0 per cui $y(x_0) = 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottengono le due soluzioni

$$x_0 = \frac{tg\alpha \pm \sqrt{tg^2\alpha + \frac{2gh}{v_f^2 cos^2\alpha}}}{g/v_f^2 cos^2\alpha}.$$

dove solo la maggiore è positiva e quindi accettabile. Ricordando che $v_f^2 = 6gh$ si ha

$$x_0 = 6hcos\alpha \left[sin\alpha + \sqrt{\frac{1 + 3sin^2\alpha}{3}} \right] = [3 + \sqrt{15}]h = 3.1\text{m}.$$

25. **Un corpo viene lanciato da un'altezza $h_1 = 10$ m rispetto alla superficie di un lago profondo $h_2 = 5$ m. La velocità iniziale del corpo è $v_0 = 10$ m/s e forma un angolo $\alpha = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, come mostrato in figura 1.9. Supponendo che**

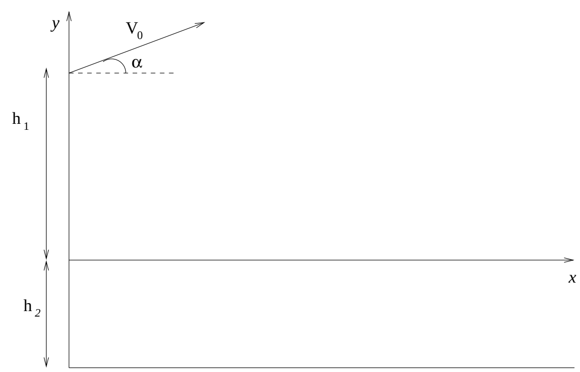

Figura 1.9: Illustrazione dell'esercizio 25

il moto del corpo nell'acqua sia decelerato in entrambe le direzioni ($a_x = -3m/s^2$ e $a_y = -7m/s^2$), calcolare le coordinate del punto di arrivo del corpo sul fondale del lago e il tempo impiegato.

26. **Due dischi di cartone di raggio $r = 20$ cm, distanti $d = 1$ m l'uno dall'altro, sono fissati su un'asta passante per i loro centri e perpendicolare ai due dischi; l'asta, e con essa i dischi, ruota su se stessa con frequenza costante $\nu = 10$ s^{-1}. Un proiettile,**

sparato parallelamente all'asta a distanza r da essa, fora i due dischi proprio al loro bordo. Fermato il moto di rotazione e avvicinati i due dischi senza ruotarli si vede che i due fori non combaciano e l'arco di circonferenza individuato dai centri dei due fori ha lunghezza $s = \pi r/10$. Si calcoli il modulo V della velocità che ha il proiettile quando viaggia tra un disco e l'altro.

27. **Ad un'altezza dal suolo $h = 5$ m si lancia orizzontalmente una pallina di gomma con velocità $v_0 = 10$ m/s come illustrato in figura 1.10.**

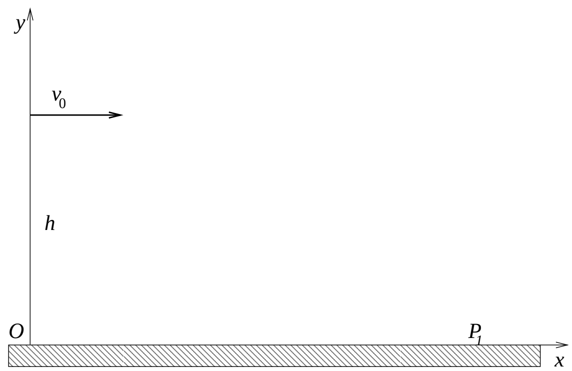

Figura 1.10: Illustrazione dell'esercizio 27

a) **Si calcoli la distanza l_0 dall'origine degli assi cartesiani del punto P_1 nel quale la pallina tocca terra, le componenti secondo gli assi x e y della velocità e l'angolo α che questa forma con l'asse x al momento dell'urto.**

Nell'urto si ha una diminuzione del modulo della velocità: la componente della velocità secondo l'asse x subito dopo l'urto risulta inferiore del 20% al valore subito prima dell'urto mentre la componente secondo l'asse y cambia di segno e in valore assoluto diminuisce del 20%. Si calcoli:

b) **l'altezza massima raggiunta dopo il primo rimbalzo e la distanza l_1 da O del successivo punto di urto della pallina al suolo;**

c) **la distanza complessiva percorsa dalla pallina lungo l'asse x in un tempo molto grande, supponendo che negli urti successivi la sua velocità diminuisca come nel primo urto.**

Analizziamo il moto nel primo tratto. Lungo l'asse orizzontale il moto è rettilineo uniforme e di equazione $x(t) = v_0 t$ mentre sull'asse delle ordinate il moto è uniformemente accelerato, soggetto all'accelerazione di gravità $a = -g$ e pertanto $y = h - \frac{1}{2}gt^2$. L'equazione della traiettoria è $y = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ e quindi l'ascissa del punto in cui tocca terra, ovvero la gittata, è

$$x = l_0 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

La velocità all'istante t^* in cui tocca terra, $t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ha componenti $v_x = v_0$ e $v_y = -gt^* = -\sqrt{2gh}$ e quindi l'angolo che la velocità forma con l'orizzontale è $\alpha = atan\frac{v_y}{v_x} = -atan\frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = -44.7°$.

Dopo il rimbalzo, le componenti della velocità sono $v_{0x} = 4v_0/5$ e $v_{0y} = 4\sqrt{2gh}/5$. Se riazzeriamo il tempo e prendiamo l'origine del sistema di riferimento nel punto di rimbalzo, le equazioni del moto sono $x = v_{0x}t$ e $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$. L'equazione della traiettoria è

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}$$

L'ascissa del punto in cui tocca terra è x_1 tale che $y(x_1) = 0$. Quindi $x_1 = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = 2v_0\frac{16}{25}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2l_0\frac{16}{25}$. La distanza del nuovo punto di contatto a terra dall'origine iniziale è pertanto $l_1 = l_0\left(1 + 2\frac{16}{25}\right)$.

La relazione che lega la componente verticale della velocità alla coordinata verticale (si veda l'esercizio 19) è $v_y^2 = \frac{16}{25}2gh - 2gy$. L'altezza massima h_1 raggiunta è quella in cui la componente verticale della velocità si annulla, $v_y = 0$, ed è pertanto $h_1 = \frac{16}{25}h$.

Si può notare quindi che quando la velocità si riduce ai 4/5 di quella iniziale, gli spazi percorsi (altezza raggiunta e gittata) si riducono con il quadrato, 16/25. Visto che ogni volta che tocca terra la velocità si riduce di 4/5, possiamo ricavare per induzione l'espressione dello spazio percorso orizzontalmente,

$$l = l_0 \left(1 + 2\frac{16}{25} + 2\left(\frac{16}{25}\right)^2 + 2\left(\frac{16}{25}\right)^3 + ... \right)$$

Sappiamo che la serie geometrica di ragione x converge se $x < 1$:

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

l può essere scritto in termini della serie geometrica di ragione 16/25 come

$$l = 2l_0 \left(\frac{1}{1 - 16/25} - \frac{1}{2} \right) = \frac{41}{9} l_0 = 46\text{m}.$$

28. **All'istante $t = 0$ un'automobile si mette in movimento lungo una pista circolare di raggio $r = 100$ m. Nella prima fase del moto lo spazio s percorso lungo la pista dipende dal tempo secondo la legge $s(t) = ct^3$ con $c^{-1} = 120\ s^3/$m. Si calcoli l'istante τ in cui i moduli delle componenti tangenziale e normale dell'accelerazione sono uguali.**

29. **Su una pista circolare di raggio $r = 150$ m, un punto inizialmente fermo si muove con accelerazione tangenziale costante fino all'istante t_1 in cui $\vec{v}$ e $\vec{a}$ formano un angolo $\alpha = \pi/4$. Successivamente mantiene costante la sua velocità. Dall'istante in cui è partito fino a quello in cui completa un giro di pista trascorre un tempo t_2 pari a 2 minuti. Calcolare lo spazio s_1 percorso fino all'istante t_1, la velocità raggiunta in questo istante e l'accelerazione a_t del primo tratto.**

    La legge oraria nell'ascissa curvilinea è

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_t t^2 & t \leq t_1 \\ \frac{1}{2} a_t t_1^2 + a_t t_1 (t - t_1) & t > t_1 \end{cases}$$

    All'istante $t_2 > t_1$ il punto ha percorso tutta la circonferenza, ovvero

$$s(t_2) = \frac{1}{2} a_t t_1^2 + a_t t_1 (t_2 - t_1) = a_t t_1 t_2 - \frac{1}{2} a_t t_1^2 = 2\pi r. \tag{1.17}$$

Dalla condizione che all'istante t_1 l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{a}$ sia $\pi/4$, se ne deduce che la componente tangenziale e quella centripeta dell'accelerazione sono uguali e quindi

$$a_c = \frac{v^2(t_1)}{r} = \frac{a_t^2 t_1^2}{r} = a_t$$

da cui $a_t t_1 = \dfrac{r}{t_1}$ che sostituito nell'equazione 1.17 ci dà

$$2\pi r = a_t t_1 t_2 - \frac{r}{2} = \frac{t_2}{t_1} r - \frac{r}{2}$$

da cui

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{4\pi + 1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2}{4\pi + 1} t_2 = 17.7\text{s}.$$

Quindi possiamo ricavare l'accelerazione del primo tratto, $a_t = \dfrac{r}{t_1^2} = 0.48\ \ \text{m}/s^2$, lo spazio percorso fino all'istante $s(t_1) = a_t t_1^2/2 = 75$ m e la velocità in questo istante $v(t_1) = a_t t_1 = 8.5$ m$/s$.

30. **Un'auto parte da ferma su una pista circolare di raggio $r = 100$ m e comincia a muoversi con accelerazione tangenziale di modulo costante. Ad un certo istante in cui ha raggiunto la velocità $v = 50$ km$/h$ e un'accelerazione totale di modulo $a = 10$ m$/s^2$ comincia a frenare con accelerazione tangenziale costante. Scelto un sistema cartesiano ortogonale con origine nel centro della pista, determinare le componenti del vettore accelerazione dopo l'intervallo di tempo $t_1 = 10$ s da quando è partita, sapendo che ha percorso uno spazio $s = 100$ m.**

1.2.3 Moti relativi

La descrizione di un moto dipende dal sistema di riferimento nel quale lo si studia. Si dice sistema di riferimento assoluto un sistema immobile, convenzionalmente solidale con le stelle cosiddette fisse. Riportiamo di seguito le relazioni tra le grandezze cinematiche più rilevanti (vettore posizione, velocità e accelerazione) nel passaggio da un sistema di riferimento fisso ad uno mobile.

In figura 1.11 è disegnata una terna cartesiana fissa e una mobile contraddistinta dagli assi apiciati. La posizione di un punto P è definita dalle coordinate (x, y, z) nel sistema fisso e (x', y', z') in quello mobile.

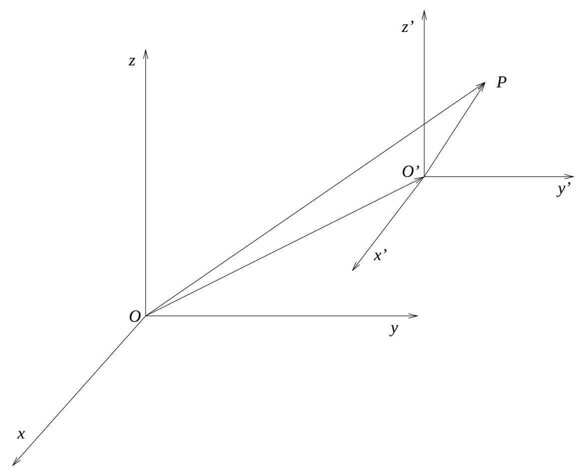

Figura 1.11: Sistemi fissi e mobili.

Dire che il secondo sistema è mobile implica che la sua origine si muova rispetto al sistema fisso di moto qualsiasi e che anche l'orientazione degli assi apiciati rispetto a quelli fissi possa variare nel tempo. La velocità rispetto al sistema fisso del punto solidale con il sistema mobile e che nell'istante considerato coincide con il punto P viene detta velocità di trascinamento. Diremo assolute le quantità misurate nel sistema fisso e relative quelle nel sistema mobile.

Come si evince dalla figura 1.11 stessa, la relazione che lega i vettori posizione nei due sistemi è

$$\vec{r}(t) \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \equiv \vec{r}_{0'}(t) + \vec{r}'(t)$$

da cui derivando segue la relazione tra le velocità

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{tr} + \vec{v}'(t) = \vec{v}_{O'}(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{v}'(t)$$

dove $v_{O'}(t)$ é la velocità dell'origine del sistema mobile, $\vec{\omega}$ è la velocità angolare con cui il sistema mobile ruota rispetto a quello fisso, $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ è la velocità con cui si muove l'estremo libero del vettore ruotante $\overrightarrow{O'P}$, $\vec{v}$ è la velocità assoluta e $\vec{v}'$ quella relativa.

Derivando ulteriormente si ottiene la relazione tra le accelerazioni:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{Co} \tag{1.18}$$

dove

$$\vec{a}_{tr} = \vec{A}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$\vec{a}_{Co} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$\vec{a}_{tr}$ indica l'accelerazione di trascinamento, ovvero quella con cui si muove rispetto al sistema fisso il punto solidale con il sistema mobile e che nell'istante considerato coincide con P. $\vec{a}_{Co}$ prende il nome di accelerazione di Coriolis ed è nulla quando la velocità relativa $\vec{v}'$ è nulla.

31. **Un cannone piazzato sulla costa, su una roccaforte alta $h = 30$ m, spara un proiettile contro una nave che sta procedendo direttamente verso il cannone alla velocità $v = 60$ km/h. All'istante dello sparo, la distanza della nave è $l = 37$ km. La velocità iniziale (velocità alla bocca) del proietile è $v_0 = 600$ m/s e l'angolo che il cannone forma con l'orizzontale (angolo di alzo) è $\alpha = 40°$. Calcolare a quale distanza dalla nave cadrà il proiettile e a quale altezza e con quale velocità rispetto al mare passerà sulla verticale della nave. Trascurare la resistenza dell'aria.**

 Studiamo il moto del proiettile nel sistema mobile solidale alla nave con l'origine sulla spiaggia, ovvero a distanza l dalla nave. In questo sistema di riferimento la posizione iniziale del proiettile è $x_0 = 0$, $y_0 = h$ mentre la sua velocità (relativa) è data dalla sua velocità assoluta sottratta della velocità di trascinamento della nave, ovvero $v_{0x} = v_0 cos\alpha + v$ e $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ essendo la velocità di trascinamento $\vec{v}_{tr} = (-v, 0)$.

 La legge oraria è pertanto

$$\begin{cases} x(t) = & (v_0 cos\alpha + v)t \\ y(t) = & h + v_0 sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

 da cui l'equazione della traiettoria è

$$y = h + \frac{v_0 sen\alpha}{v_0 cos\alpha + v}x - \frac{gx^2}{2(v_0 cos\alpha + v)^2}.$$

 La posizione x^* in cui il proiettile arriva in acqua è data dall'equazione $y(x^*) = 0$ e pertanto

$$x^* = \frac{(v_0 cos\alpha + v)v_0 sen\alpha}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 sen^2\alpha}}\right] = 37487\,\mathrm{m}$$

 dove solo la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado è quella fisica. La differenza dell'ascissa trovata rispetto ad l è la distanza dalla nave richiesta, ovvero 487 m.

Quando il proiettile passa sulla nave, ovvero $x = l$, l'altezza è data da $y(l) = h + \frac{v_0 sen\alpha}{v_0 cos\alpha + v} l - \frac{gl^2}{2(v_0 cos\alpha + v)^2} = 390$ m.

Le componenti della velocità assoluta del proiettile in questo istante sono

$$\begin{cases} v_x = & v_0 cos\alpha \\ v_y = & v_0 sen\alpha - \dfrac{gl}{(v_0 cos\alpha + v)} \end{cases}$$

e quindi il modulo della velocità è

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2 l^2}{(v_0 cos\alpha + v)^2} - \frac{2glv_0 sen\alpha}{v_0 cos\alpha + v}} = 594\,\mathrm{m}/s.$$

32. **Un vaporetto attraversa un lago andando in linea retta dalla città M alla città N distanti 20 km. La sua velocità in assenza di corrente nel lago è costante e pari a $v_b = 10$ km/h. Il lago è sede di correnti che variano con la stagione. Calcolare quanto tempo impiega il vaporetto in un viaggio di andata e ritorno nei seguenti casi: assenza di corrente; la corrente è diretta lungo la retta che congiunge le due città con velocità $u = 5$ km/h; la corrente è diretta ortogonalmente alla congiungente $\overline{MN}$ con velocità $u = 3$ km/h.**

33. **Una nave procede alla velocità di 23 nodi lungo la rotta NE con una corrente di 3 nodi diretta da O a E. Si determini l'angolo di deriva, la rotta reale e la velocità assoluta, esprimendola in m/s.**

34. **Una barca che in acqua stagnante può muoversi con una velocità massima $v_m = 15$ km/h attraversa a pieno regime un fiume largo $d = 80$ m nel quale l'acqua scorre con velocità costante $v_a = 3$ km/h. Si determini la distanza l tra il punto di partenza e quello di approdo della barca nel caso in cui la sua direzione di moto formi un angolo costante α rispetto alla corrente.**

35. **La pioggia cade verticalmente con velocità $v_p = 10$ m/s mentre un uomo cammina con velocità $v_u = 5$km/h. Determinare qual è la migliore inclinazione da dare all'ombrello.**

    Per determinare la direzione dell'ombrello, va determinata la velocità della pioggia nel sistema mobile dell'uomo. La velocità della pioggia è $\vec{v}_p = (0, -v_p)$ mentre quella dell'uomo è $\vec{v}_u = (v_u, 0) = \vec{v}_{tr}$ che coincide con la velocità di trascinamento. La velocità relativa della pioggia è la differenza tra la sua velocità nel sistema assoluto e la velocità di trascinamento $\vec{v}_r = \vec{v}_p - \vec{v}_u = (-v_u, -v_p)$. L'angolo rispetto alla verticale della pioggia è $\alpha = arctg\dfrac{v_u}{v_p} = 7.9°$.

Quando la velocità dell'uomo aumenta, l'angolo di incidenza della pioggia nel sistema relativo aumenta. Questo spiega perché, procedendo in auto a velocità autostradali, sul lunotto posteriore non cade acqua. Il motivo è che l'angolo di incidenza dell'acqua è maggiore dell'angolo di inclinazione del lunotto.

36. **Consideriamo il moto della pioggia e dell'uomo come nell'esercizio 35. Dovendo percorrere un tratto di lunghezza L, determinare qual è la velocità ottimale dell'uomo per bagnarsi il meno possibile.**

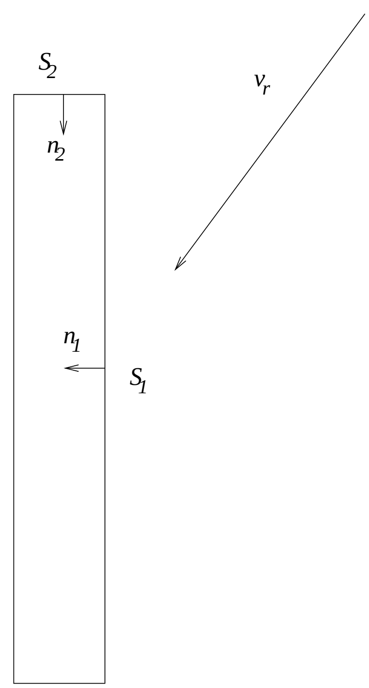

Figura 1.12: Schematizzazione dell'uomo e vettore velocità relativa della pioggia nell'esercizio 36.

Schematizziamo l'uomo con un parallelepipedo di superificie frontale S_1 e superficie superiore S_2 come mostrato in figura 1.12. Calcoliamo il flusso del vettore velocità relativa dell'uomo attraverso l'uomo. Il flusso di un vettore attraverso una superificie è definito come il prodotto scalare del vettore per il versore normale alla superficie, moltiplicato per l'area della superficie. Pertanto, detti $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ i versori normali ad S_1 e S_2, il flusso è $\Phi = v_u S_1 + v_p S_2$. Tale flusso ha le dimensioni di un volume diviso per un tempo, ovvero rappresenta il volume d'acqua che attraversa l'uomo nell'unità di tempo. Dovendo percorrere una distanza L alla velocità v_p, la quantità d'acqua che piove attraverso il corpo dell'uomo è quindi $\dfrac{\Phi L}{v_p} = S_1 L + \dfrac{v_p}{v_u} S_2 L$. Questo risultato indica che aumentando la velocità, il volume d'acqua che piove sull'uomo diminuisce. Purtuttavia, tale volume non diviene mai inferiore a $S_1 L$. Quindi non c'è una velocità ottimale ma conviene comunque andare il più veloce possibile.

37. **Un uomo corre in direzione overst alla velocità $v_1 = 14$ km/h e ha la sensazione che il vento provenga da nord-overst. Riducendo la velocità a $v_2 = 6$ km/h osserva il vento come proveniente da nord. Calcolare la reale direzione e la velocità del vento.**

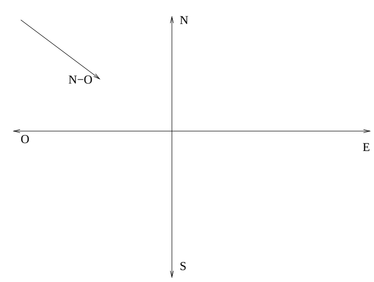

Figura 1.13: Illustrazione della direzione N-O del vento vista dall'uomo nell'esercizio 37.

L'uomo osserva il vento dal suo sistema mobile. Nel primo caso il vento è visto venire da nord-ovest come indicato in figura 1.13, ovvero la sua velocità relativa è $\vec{v}_r = (v, -v)$. Usando la relazione che lega la velocità relativa a quella assoluta si ha: $(v, -v) = \vec{v}_a - \vec{v}_{tr} = (v_x, v_y) - (-v_1, 0)$. Da cui

$$\begin{cases} v_1 + v_x = v \\ v_y = -v \end{cases}$$

e quindi $v_1 + v_x = -v_y$.

Nel secondo caso la velocità dell'uomo (di trascinamento) mantiene la stessa direzione e verso ma si riduce ai 3/7 di quella iniziale mentre il vento proviene da nord e quindi la componente lungo l'asse X della sua velocità relativa è nulla: $\vec{v}_{rx} = 0$. Si ha quindi $v_x + v_2 = 0 = v_x + \frac{3}{7}v_1$. Pertanto abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} v_x + v_1 = -v_y \\ v_x + \frac{6}{14}v_1 = 0 \end{cases}$$

da cui $v_x = -\frac{3}{7}v_1$ e $v_y = -\frac{4}{7}v_1$. Pertanto il modulo della velocità è $v = \frac{5}{7}v_1 = 10$ km/h e la sua direzione è di $\alpha = arctg 3/4 = 36.9°$ a ovest del sud.

38. **Un piroscafo naviga a velocità costante di 12 nodi. Se naviga verso est il vento appare dalla nave come proveniente da nord, mentre se naviga verso sud il vento appare provenire da nord-ovest. Calcolare la velocità e la direzione assoluta del vento.**

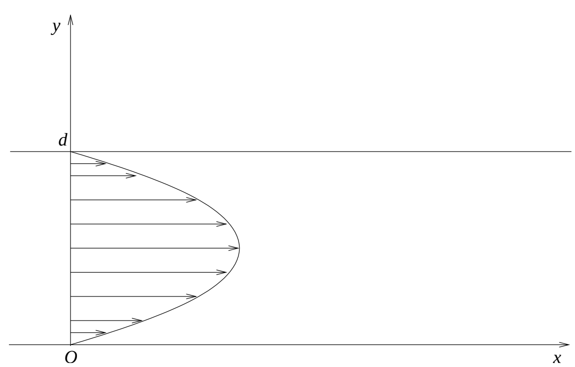

Figura 1.14: Illustrazione dell'esercizio 39.

39. **In un fiume di larghezza $d =$ 50 m l'acqua scorre parallelamente alle rive. La velocità della corrente è nulla sulle rive e mostra una dipendenza quadratica dalla distanza dalla riva inferiore, raggiungendo il suo valore massimo $v_{max} = 5$ m/s al centro del fiume come mostrato in figura. Una barca parte dalla sponda inferiore del fiume nell'origine O del sistema di riferimento indicato. La sua velocità rispetto all'acqua ha modulo $v_0 = 3$ m/s e forma un angolo $\alpha = \pi/6$ con la direzione dell'asse x. Calcolare:**

a) l'espressione della velocità della corrente del fiume in funzione della distanza dalla sponda inferiore;

b) il tempo impiegato a raggiungere l'altra sponda;

c) la posizione di arrivo della barca sull'altra sponda.

La velocità della corrente è parallela all'asse delle ascisse ed è funzione della distanza y della corrente dalla sponda inferiore. La forma funzionale è quella di un polinomio di secondo grado che deve annullarsi sulle sponde, ovvero a $y = 0$ e $y = d$, e assume il suo massimo in $y = d/2$. Pertanto $v_{x-tr} = \frac{4v_{max}}{d^2}y(d-y)$ mentre l'altra componente della velocità della corrente è nulla: $v_{y-tr} = 0$. La velocità della corrente è dunque la velocità di trascinamento.

Essendo nulla la componente y della velocità di trascinamento, tale componente della velocità assoluta coincide con quella relativa ed è $v_y = v_0 sen\alpha$. Quindi la componente del moto lungo l'asse y è rettilineo uniforme:

$$y(t) = v_0 sen\alpha t. \tag{1.19}$$

Questa relazione consente di determinare il tempo di percorrenza t^* imponendo che $y(t^*) = d$ e quindi $t^* = \frac{d}{v_0 sen\alpha} = 33.3$ s.

La relazione 1.19 consente di calcolare la velocità della corrente in funzione del tempo per poi integrarla determinando la legge oraria. Quindi la velocità di trascinamento è

$$\vec{v}_{tr}(t) = \begin{cases} v_{x-tr} = & \frac{4v_{max}}{d^2} v_0 sen\alpha t(d - v_0 sen\alpha t) \\ v_{y-tr} = & 0 \end{cases}$$

mentre quella assoluta è

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x = & v_0 cos\alpha + \frac{4v_{max}}{d^2} v_0 sen\alpha t(d - v_0 sen\alpha t) \\ v_y = & v_0 sen\alpha \end{cases}$$

Quindi la legge oraria del moto lungo l'asse orizzontale è

$$x(t) = v_0 cos\alpha t + \frac{2v_{max}v_0 sen\alpha}{d}t^2 - \frac{4v_{max}v_0^2 sen^2\alpha}{3d^2}t^3$$

quindi l'ascissa del punto di arrivo sull'altra sponda è

$$x(t^*) = \frac{d}{sen\alpha}\left[cos\alpha + \frac{2v_{max}}{3v_0}\right] = 197\,\mathrm{m}$$

40. **Una trave è poggiata sopra un rullo cilindrico di raggio $r =$ 25 cm. Si spinge la nave facendola avanzare di un tratto $d = 4\pi$ m e corrispondentemente il rullo ruota senza scivolare lungo la trave. Si calcoli il numero N di giri fatti dal rullo nei due casi seguenti:**

    a) **il rullo è vincolato a ruotare attorno al proprio asse;**

    b) **il rullo rotola sul suolo senza strisciare.**

41. **In un canale di larghezza $2d = 2$ km/h come mostrato in figura 1.15, la corrente è nulla per $y \leq d$ e invece ha una velocità $v_0 = 10$ km/h diretta nel verso negativo dell'asse X per $y > d$. Un battello parte dal punto A in figura e punta in direzione fissa rispetto all'acqua durante tutto il tragitto, procedendo a velocità costante $v_1 = 20$ km/h. Determinare quale deve essere la direzione della velocità del battello perchè approdi sull'altra sponda nel punto B, ovvero esattamente di fronte al punto di partenza.**

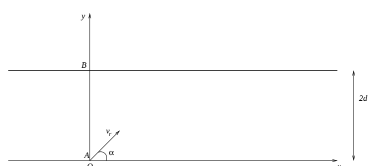

Figura 1.15: Illustrazione del canale dell'esercizio 41.

Scegliamo come sistema di riferimento quello indicato in figura 1.15 con l'origine degli assi nel punto A. Il battello ha una direzione che forma un angolo α da determinare con l'asse delle ascisse. La corrente ha velocità nulla lungo l'asse y e pertanto la componente y della velocità assoluta e di quella relativa coincidono: $v_{ay} = v_{ry} = v_1 sen\alpha$. Pertanto

$$y(t) = v_1 sen\alpha t.$$

La discontinuità nella velocità della corrente (di trascinamento) quindi può essere utilmente vista in funzione del tempo piuttosto che della coordinata y come data. Visto che $y \leq d$ se $t \leq t_1 = \dfrac{d}{v_1 sin\alpha}$.

Quindi possiamo scrivere per la componente orizzontale della velocità di trascinamento:

$$v_{x-tr} = \begin{cases} 0 & t \leq t_1 \\ -v_0 & t > t_1 \end{cases}$$

e quindi la componente x della velocità assoluta:

$$v_x = \begin{cases} v_1 cos\alpha & t \leq t_1 \\ v_1 cos\alpha - v_0 & t > t_1 \end{cases}$$

da cui la legge oraria

$$x(t) = \begin{cases} v_1 cos\alpha t & t \leq t_1 \\ v_1 cos\alpha t_1 + (v_1 cos\alpha - v_0)(t - t_1) & t > t_1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora imporre che al tempo t_2 tale che $y(t_2) = 2d$, l'ascissa sia nulla come all'istante di partenza, ovvero $x(t_2) = 0$. Dalla relazione $y(t_2) = 2d$ si ricava $t_2 = 2t_1$.

Dalla relazione $x(t_2) = 0$ segue che

$$cos\alpha = \frac{v_0}{2v_1} = \frac{1}{4}$$

da cui $\alpha = 75.5°$ e $t_2 = 2t_1 = \dfrac{2d}{v_1 sen\alpha} = 372$ s.

42. **Il moto piano di un punto materiale è descritto in coordinate polari dalle seguenti equazioni: $r(t) = at$, $\theta(t) = bt$ con a e b costanti positive. Si calcolino:**

    a) **le componenti radiali e trasversali della velocità e dell'accelerazione;**

    b) **le componenti cartesiane della velocità e dell'accelerazione;**

    c) **i moduli del vettore velocità e accelerazione sia a partire dalle componenti cartesiane che da quelle polari verificando che i due risultati coincidono.**

43. **Un punto si muove di moto armonico su una retta che ruota uniformemente, con la stessa frequenza, intorno ad un asse passante per il centro del moto e ad essa normale. Determinare il moto assoluto del punto e verificare, in questo caso particolare, le formule di trasformazione della velocità e dell'accelerazione nei moti relativi.**

44. **Una piattaforma ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale. All'istante $t = 0$, una pallina viene lanciata orizzontalmente con velocità v_0 dal centro della piattaforma. L'attrito che la pallina incontra è trascurabile,**

cosicché essa si muove rispetto a terra di moto rettilineo uniforme con velocità v_0. Si determini l'accelerazione della pallina, ad un generico istante, rispetto ad un rifermineto solidale alla piattaforma.

45. **In prossimità della superficie terrestre un corpo si muove, per il solo effetto del peso, con accelerazione costante diretta verso il basso e di modulo pari all'accelerazione di gravità g. In un sistema di riferimento, formato da un asse x orizzontale e da un asse y verticale rivolto verso l'alto, studiamo il moto di caduta libera del corpo. Questo parte da una quota $y = y_0$ con velocità avente componenti $v_x = v_0$ e $v_y = 0$. Si ricavino in ogni istante t la componente tangenziale e normale dell'accelerazione, nonché il raggio di curvatura.**

    Le equazioni del moto sono:

    $$\begin{cases} x(t) = & v_0 t \\ y(t) = & h - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

    mentre la velocità è

    $$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

    L'accelerazione di gravità verticale ha una componente tangente e una ortogonale alla traiettoria. Per determinare la componente tangente basta proiettare l'accelerazione $\vec{g}$ nella direzione della velocità che è tangente alla traiettoria, ovvero

    $$a_T = \vec{g} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{g v_y}{|\vec{v}|} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

    La componente normale si trova per differenza tenendo conto che la somma in quadratura delle due componenti è pari al modulo quadro del vettore, ovvero $g^2 = a_T^2 + a_n^2$ e quindi

    $$a_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

    Vediamo ora come si calcola il raggio di curvatura di una traiettoria fisica in un suo punto P. Siano dati i punti P e P' appartenenti alla traiettoria. Esiste ed è unica la circonferenza passante per P e P' e tangente alla traiettoria in P. Al tendere di P' a P tale circoferenza prende il nome di cerchio osculatore e il suo raggio si dice raggio di curvatura nel punto P. Analogamente a quanto succede in un moto circolare l'accelerazione normale è inversamente proporzionale al raggio di curvatura e direttamente proporzionale al modulo quadro della velocità. Pertanto possiamo ricavare il raggio di curvatura dalla relazione

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{g v_0}.$$

Soluzioni di Cinematica

1.1 $\vartheta_{ab} = 67.8°$, $\vartheta_{ac} = 80.7°$, $\vartheta_{bc} = 31.5°$, $\vartheta_{cd} = 119.5°$. Il vettore $\vec{d}$ è ortogonale sia al vettore $\vec{a}$ che a quello $\vec{b}$.

1.2 Il vettore $\vec{e}$ ha componenti proporzionali al vettore $\vec{a}$ dell'esercizio precedente con coefficiente di proporzionalità pari a 3.

1.5 $\hat{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{62}}(2, 7, -3)$.

1.6 $\theta = 69.12°$, area $= \frac{1}{2}\sqrt{110}$.

1.8 $h_x = 6.39$, $h_y = -7.06$ e $h_z = -3.03$ a meno del segno.

1.13 $t^* = 2$, $v_1 = 6$, $v_2 = 5$ nelle unità arbitrarie scelte.

1.15 a) $t_1 = 16$ s, $a = 0.868$ m$/s^2$.
b) $v_{0eff} = 8$ km$/h$, $a_{eff} = 0.988$ m$/s^2$.

1.16 $t_1 = 18$ s, $s(t_1) = 180$ m.

1.18 $v_0 = 24.9$ m$/s$, $h_{max} = 31.6$ m.

1.20 $h_1 = 0$ m, $h_2 = h_5 = s(2v_0/5g) = 8v_0^2/25g = 16h/25 = 1.28$ m, $h_3 = h_4 = s(4v_0/5g) = 12v_0^2/25g = 24h/25 = 1.92$ m.

1.22 $t = 3.14$ s, $H = 48.5$ m.

1.23 $d \simeq 54$ m.

1.25 $x_f \simeq 20$ m, $t_{tot}2.3$ s.

1.26 $V = 200$ m$/s$.

1.28 $\tau = 20$ s.

1.30 $a_x \simeq 0.4$ m$/s^2$, $a_y = -0.8$ m$/s^2$.

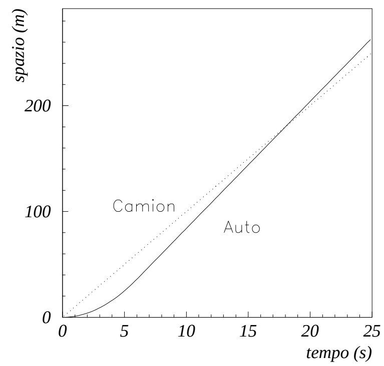

Figura 1.16: Illustrazione delle leggi orarie dell'auto (linea continua) e del camion (linea tratteggiata) dell'esercizio 1.16. Il loro punto di intersezione individua l'istante di sorpasso dell'auto ai danni del camion.

1.32 $t_1 = 4\ h$, $t_2 = 5^h 20^m$, $t_3 = 4^h 11.6^m$.

1.33 $\theta_{der} = -4.8°$, $\phi = 40.2°$ a nord dell'est, $v = 25.2$ nodi $= 13$ m$/s$. (1 nodo $= 1.86$ km$/h$)

1.34 $l = \dfrac{19.2\,\mathrm{m}}{sen\alpha}\sqrt{18.06 + 6.94 cos\alpha}$.

1.38 $\phi = 63.4°$ a sud dell'est, $v = 26.8$ nodi.

1.40 a) $N = 8$; b) $N = 4$.

1.42 a) $v_\rho = a$, $v_\eta = abt$, $a_\rho = -ab^2 t$, $a_\eta = 2ab$;

b) $\begin{cases} v_x = & acos(bt) - abtsen(bt) \\ v_y = & asen(bt) + abtcos(bt) \end{cases}$ $\begin{cases} a_x = & -2absen(bt) - ab^2tcos(bt) \\ a_y = & 2abcos(bt) - ab^2tsen(bt) \end{cases}$

c) $|\vec{v}(t)| = \sqrt{a^2 + a^2b^2t^2}$, $|\vec{a}(t)| = \sqrt{4a^2b^2 + a^2b^4t^2}$.

1.43 $\begin{cases} r(t) = & A|sen\omega t| \\ \theta(t) = & \omega t \end{cases}$ $\begin{cases} v_r(t) = & \dot{r} \\ v_\theta(t) = & r\dot{\theta} = \omega r \end{cases}$ $\begin{cases} a_r(t) = & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2\omega^2 r \\ a_\theta(t) = & r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\omega\dot{r} \end{cases}$

1.44 $a_x = -2\omega v_0 sen(\omega t) - v_0\omega^2 tcos(\omega t)$, $a_y = -2\omega v_0 cos(\omega t) + v_0\omega^2 tsen(\omega t)$.

Indice analitico