

Spin Isotopico – Ipercarica. Simmetrie interne: SU(2) e SU(3).

L. Cimmino (cimmino@dsf.unina.it)

Nel 1931, Birge e Menzel [1], motivarono le discrepanze ottenute nelle misure della massa di idrogeno in campioni di idrogeno naturale, eseguite con la tecnica della spettroscopia di massa, ipotizzando l'esistenza di un nuovo elemento: il Deuterio. Questo doveva avere le stesse caratteristiche dell'idrogeno, ma la sua massa doveva differire approssimativamente del doppio rispetto al primo.

L'elemento fu poi scoperto nel 1932 da Urey [2] attraverso lo studio degli spettri di campioni di idrogeno naturale in tubi a scarica, al quale seguirono esperimenti per la determinazione esatta della sua massa; inoltre, nello stesso anno, Chadwick [3] scopriva una nuova particella: il neutrone¹. Egli interpretò correttamente i risultati ottenuti dai Joliot [4], chiarendo la natura della corrente neutra che si osservava e che fino ad allora era associata ad una presunta radiazione γ scoperta da Bothe e Becker.

Durante quegli anni non c'era chiarezza riguardo la composizione dei nuclei, i quali erano considerati composti da protoni e da elettroni "nucleari" (per distinguerli da quelli atomici), poiché la loro compattezza doveva essere giustificata in virtù della sola forza colombiana; questa ipotesi era avvalorata dall'osservazione dell'emissione di raggi β nei decadimenti nucleari.

Come suggerito da Lord Rutherford già nel 1920², il neutrone era allora visto come uno stato legato del sistema p-e. Da questo assunto, Heisenberg [5] propose di intendere protone e neutrone come stati differenti di una stessa particella: il nucleone. Egli postulò che il neutrone ed il protone interagiscono attraverso una forza che dipende dallo spin e dalla carica, e che, in analogia allo

¹ Gli esperimenti condotti da Chadwick ricalcavano i processi di diffusione eseguiti precedentemente prima da Bothe e Becker (1928) e poi dai coniugi Joliot (1931).

² Durante la lettura Bakeriana, Rutherford riassunse gli studi condotti tra il 1907 ed il 1920 sulla struttura dell'atomo nucleare e sulla diffusione di particella α e β . Gli esperimenti condotti sulla disintegrazione del nucleo nel 1917, lo spinsero ad affermare la possibilità dell'esistenza di una particella neutra da ritenere come un atomo di idrogeno il cui elettrone orbita molto vicino al protone.

ione H_2^+ , i due si scambiano la carica facendo assumere all'interazione il carattere di forza di scambio.

Interazione n-p nello stato legato deutone – Il neutrone ed il protone si possono trovare in uno stato legato, detto deutone (D). L'energia di legame D_1 dei due nucleoni è data dalla differenza tra le masse a riposo del deutone e dei suoi due componenti

$$D_1 = [m_D - (m_p + m_n)]c^2 = 2.23 \text{ MeV}.$$

Questo sistema non ammette teoricamente stati eccitati ed il modulo dello spin S , determinato sperimentalmente, vale 1. Inoltre il modulo del momento angolare orbitale L è nullo, poiché l'incremento di energia prodotto da valori di $L > 0$, disintegrerebbe la particella per effetto della forza centrifuga.

Scriviamo l'equazione di Schrodinger per il deutone nel sistema di riferimento relativo

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (1)$$

dove μ è la massa ridotta del sistema, r è il modulo della distanza tra i due nucleoni ed $E = -D_1$ è l'energia dello stato fondamentale. Integrando la (1) fuori la buca di potenziale di ampiezza r_0 e di profondità $V(r_0)$, otteniamo la soluzione $\Psi(r) = N \exp[-(2\mu D_1/\hbar^2)^{1/2} r]$, dove N è la costante di normalizzazione per la funzione d'onda.

Per $r_0 \rightarrow 0$ si ha una funzione d'onda che è indipendente dalla forma della buca di potenziale; tale approssimazione, che consiste nel fissare il sistema di riferimento del laboratorio a grande distanza dal centro diffusore, ci consente di studiare il sistema dei due nucleoni in maniera approssimativamente indipendente dal potenziale centrale $V(r)$.

Diffusione n-p a basse energie – Nei processi di diffusione di neutroni lenti da parte di protoni, preso l'asse x come direzione del fascio incidente, la funzione d'onda che descrive il sistema n-p, può essere scritta come sovrapposizione di un'onda piana incidente ed un'onda sferica diffusa, ovvero

$$\Psi(\vec{r}) = \exp\left[-i\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{i} \cdot \vec{r}\right] + f(\theta) \exp\left[i\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} r\right] r^{-1}$$

dove la quantità $k = (2\mu E/\hbar^2)^{1/2}$ rappresenta il modulo del vettore d'onda del moto relativo delle due particelle lungo la direzione i . $f(\theta)$ rappresenta l'ampiezza di diffusione ed è funzione dell'angolo di diffusione θ , che è l'angolo formato dalla direzione del fascio incidente e la direzione in cui le particelle sono diffuse. L'ampiezza di diffusione $f(\theta)$ è legata alla sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ dalla relazione $d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$, con $d\Omega$ l'elemento di angolo solido che determina la direzione dell'onda diffusa, da cui si ottiene, integrando i due membri, la sezione d'urto totale del processo.

I fatti che resero possibile la scoperta del neutrone riguardavano l'incongruenza tra i dati sperimentali sulle sezioni d'urto totale ed i risultati attesi. I Joliot per primi, potenziando una apparecchiatura ideata e realizzata da Bothe e Becker che sfruttava la radioattività naturale del Po per stimolare l'emissione di presunti raggi "γ penetranti" da parte di un campione di Be, osservarono l'emissione di protoni nella camera di Wilson da parte di uno strato di paraffina bombardato con la corrente neutra uscente dal Be. Si trattava in pratica di un effetto Compton che non sarebbe dovuto avvenire a causa dell'elevata massa del protone ($m_p = 1840 m_e = 1.67 \times 10^{-27} \text{Kg}$); inoltre, come fece notare Chadwick [3], se si ammetteva la possibilità di una tale descrizione, si sarebbero violate la conservazione dell'energia e quella dell'impulso.

La sezione d'urto totale, per la diffusione da parte di un potenziale centrale, può essere scritta come

$$\sigma = 4\pi \lambda^2 \sum_L (2L+1) \sin^2 \delta_L \quad (2)$$

dove con δ_l si è indicato lo sfasamento subito dalla componente di momento angolare L dell'onda diffusa ad opera del potenziale $V(r)$ e dato che $L = 0$ è assicurato dalla condizione $\lambda > r_0$, allora la (2) diventa

$$\sigma = 4\pi \lambda^2 \sin^2 \delta_0. \quad (3)$$

La soluzione dell'equazione (1), fuori dalla buca, è data dalla funzione d'onda $\Psi(r) = N' \sin(kr + \delta_0) r^{-1}$; se riteniamo, all'atto dell'interazione n-p e nel limite $r_0 \rightarrow 0$, che il sistema si trovi in uno stato legato, allora possiamo imporre la condizione di raccordo al bordo della buca che le derivate logaritmiche delle parti radiali delle funzioni d'onda diffusa e quella dello stato fondamentale del deutone coincidano, ovvero

$$\left. \frac{\frac{d}{dr} e^{-\left(\frac{2\mu D_1}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} r}}{e^{-\left(\frac{2\mu D_1}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} r}} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\frac{d}{dr} \sin(kr + \delta_0)}{\sin(kr + \delta_0)} \right|_{r=r_0}$$

e quindi

$$-\left(\frac{2\mu D_1}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} = k \frac{\cos \delta_0}{\sin \delta_0}$$

da cui, elevando entrambi i membri al quadrato, si ha

$$\sin^2 \delta_0 = \frac{k^2}{\frac{2\mu D_1}{\hbar^2} + k^2}$$

che sostituita nella (3) e tenendo presente che $\lambda = k^{-1}$ e $2\mu = m_p$, ci da

$$\sigma = \frac{4\pi}{\frac{m_p D_1}{\hbar^2} + k^2} = \frac{4\pi \hbar^2}{m_p (D_1 + E)}. \quad (4)$$

Ponendo il raggio nucleare $r_0 = 1.7 \times 10^{-13}$ cm e considerando neutroni di lunghezza d'onda maggiore della distanza d'interazione nucleare ($\lambda > r_0$), quindi dell'ordine di 10^{-11} cm, otteniamo che i neutroni incidenti hanno, nel sistema di laboratorio, energia di 20 MeV e perciò nel sistema relativo hanno energia $E = 10$ MeV. Sostituendo i valori per D_1 , m_p ed E nella (4) otteniamo il valore teorico della sezione d'urto totale $\sigma = 4.27 \times 10^{-24}$ cm², dove invece il valore atteso è dell'ordine di 10^{-23} cm². Anche nel limite $k \rightarrow 0$ risulterebbe una sezione d'urto teorica $\sigma = 2.34 \times 10^{-24}$ cm² contro il valore sperimentale $\sigma = 20.44 \times 10^{-24}$ cm².

Il potenziale fenomenologico – La forte discrepanza tra valori sperimentale e teorico della sezione d'urto totale è dovuta all'aver ignorato in prima analisi i

gradi di libertà interni dei nucleoni. L'assunzione fatta da Heisenberg riguardo alla possibile dipendenza della forza da parte dello spin risulta essere confermata dall'esperienza. Se assumiamo che lo sfasamento prodotto dall'azione del potenziale dipenda non solo da L ma anche dallo spin totale S del sistema, otteniamo nella diffusione n-p che il sistema può trovarsi sia nello stato $S = 0$ (spin antiparalleli) sia in quello $S = 1$ (spin paralleli)³. A queste due configurazioni possibili sono associati pesi statistici differenti e la sezione d'urto totale può essere scritta come $\sigma = \frac{3}{4} \sigma_{S=1} + \frac{1}{4} \sigma_{S=0}$, dove le due sezioni d'urto hanno la forma della (4). In particolare, dato che l'energia dello stato $S = 1$ possiamo prenderla pari all'energia di legame del deutone, se sfruttiamo il valore sperimentale $\sigma = 20.44 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ della sezione d'urto nel limite $k \rightarrow 0$ allora calcoliamo quello che viene definito lo stato virtuale del deutone, ovvero l'energia di legame $D_1' = 0.072 \text{ MeV}$ formalmente associata allo stato $S = 0$. Questo valore ci consente di calcolare con migliore precisione la sezioni d'urto totali a diverse energie per lunghezze d'onda maggiori di r_0 .

Quindi il potenziale che regola l'interazione nucleare dipende non solo dal modulo della distanza r tra le particelle ma anche dall'accoppiamento dei loro spin. Perciò il potenziale centrale $V(r)$ che compare nella (1) deve essere sostituito da $V'(r) = V(r) + V_s(r) \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$, dove \mathbf{s}_i è l'operatore di spin dell' i -esimo nucleone.

Un potenziale che ha questa espressione fornisce valori di sezione d'urto totale confrontabili con i dati sperimentali, ma non spiega la distribuzione angolare delle sezioni d'urto differenziale nei processi di diffusione n-p ad alta energia ($\lambda \ll r_0$). Nei limiti imposti dal caso generale della diffusione di neutroni da parte di protoni, ci si aspetterebbe che le particelle diffuse si concentrino intorno ad angoli retti nel sistema di riferimento del laboratorio. Invece i picchi massimi si trovano uno a piccoli angoli e l'altro ad angoli intorno al angolo piano⁴. Questo comportamento può essere spiegato solo se si assume l'esistenza di una componente di interazione che non deriva ne dai gradi di libertà spaziali ne da quelli di spin.

³ Sperimentalmente si verifica che per il deutone si realizza unicamente lo stato $S = 1$.

⁴ Il fenomeno è comunemente detto backscattering.

Se si rende la teoria simmetrica per scambio simultaneo delle coordinate spaziali e di spin, si deve far dipendere la distribuzione sperimentale per grandi angoli da qualche tipo di interazione direttamente collegata a tale simmetria.

Introduciamo allora il potenziale di scambio $V_{sc} = V_{sc}(\mathbf{r})P_r$, tale che $V_{sc}(\mathbf{r})P_r \Psi(\mathbf{r}) = V_{sc}(\mathbf{r})\Psi(-\mathbf{r})$ e siano $\Psi(\mathbf{r}) = \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ e $\Psi'(\mathbf{r}) = \exp[i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}]$; dato che $d\sigma \propto |\langle \Psi'^*(\mathbf{r}) | V_{sc} | \Psi(\mathbf{r}) \rangle|^2 d\Omega$, si ha

$$d\sigma \propto \left| \int e^{-i|\mathbf{k}+\mathbf{k}'|r} V_{sc}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 d\Omega$$

che risulta apprezzabilmente diversa da zero solo per valori piccoli di $|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|$, ovvero per angoli prossimi a 180° .

Per quanto riguarda la diffusione a piccoli angoli, se trattiamo $V(\mathbf{r})$ non più come potenziale centrale ma come perturbazione e facciamo incidere i neutroni ad alta energia, otteniamo in analogia al caso precedente che la sezione d'urto differenziale $d\sigma \propto |\langle \Psi'^*(\mathbf{r}) | V(\mathbf{r}) | \Psi(\mathbf{r}) \rangle|^2 d\Omega$, da cui risulta che

$$d\sigma \propto \left| \int e^{i|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|r} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2 d\Omega$$

dalla quale, tenendo presente che $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k \sin(\theta/2)$ e che $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| r_0 < 2\pi$, si ha $2 \sin(\theta/2) < \lambda/r_0$, quindi $2 \sin(\theta/2) \ll 1$ ed approssimando il seno con il suo argomento, quindi risulta $\theta \ll 1$.

I due potenziali, quello di scambio e quello dovuto a forze ordinarie, hanno valori confrontabili poiché sperimentalmente si trova che il numero delle particelle diffuse nelle due direzioni sono praticamente uguali. Inoltre, è interessante precisare che la diffusione è causata, in entrambe le direzioni, dall'urto dei neutroni contro i protoni, ma mentre per il potenziale ordinario il protone è semplicemente spinto fuori dal bersaglio, nel caso in cui agiscano forze di scambio il protone rinculato è in origine un neutrone incidente che durante l'interazione è mutato ed è poi rimbalzato indietro.

La simmetria trovata può essere inclusa nella teoria sotto forma di operatore, purché lo stato del sistema dei due nucleoni sia descritto oltre che dalle variabili spaziali e di spin anche dalle coordinate relative al nuovo grado di libertà interno dei nucleoni: lo spin isotopico.

SU(2) e lo spin isotopico – La terza componente del isospin t deve ammettere due possibili valori che poniamo uguali a $\pm 1/2$, relativi ai due stati di base $\xi_{+1/2} \equiv |p\rangle$ per lo stato protone e $\xi_{-1/2} \equiv |n\rangle$ per lo stato neutrone⁵. La funzione d'onda di isospin è sovrapposizione dei due stati di base e quindi può essere scritta come $\xi(t) = c_1 \xi_{+1/2} + c_2 \xi_{-1/2}$, dove c_1 e c_2 sono i coefficienti della combinazione.

Una trasformazione di isospin è una matrice U , di dimensione 2×2 nel campo complesso, tale che la trasformazione $U \xi(t) = \xi'(t)$ conserva la norma e non moltiplica gli stati di base per uno stesso fattore di fase⁶. Il gruppo delle matrici U è detto SU(2). Consideriamo allora le matrici di Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che soddisfano le seguenti proprietà

1. $\tau_i = \tau_i^\dagger$
 2. $[\tau_i, \tau_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \tau_k$
 3. $\tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i = 2\delta_{ij}$
 4. $\text{Tr}(\tau_i) = 0$
 5. $\det(\tau_i) = -1$
- (5)

e mediante le quali definiamo gli operatori di creazione e distruzione della carica

$$\tau_+ = \tau_1 + i \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_- = \tau_1 - i \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che rispettivamente trasformano un neutrone in un protone e viceversa.

Consideriamo i vettori $\boldsymbol{\tau} \equiv (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ed $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, con $\alpha_i \in \mathbf{R}$; dato che U è un operatore unitario fortemente continuo nei parametri α_i e, per la proprietà 5.1, $\boldsymbol{\tau}$ è un operatore autoaggiunto, possiamo rappresentarlo come $U(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(i\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}/2)$. In questo modo possiamo verificare un'analogia formale tra SU(2) ed il gruppo delle rotazioni tridimensionali SO(3)⁷ e far così corrispondere alla trasformazione U una rotazione della funzione di stato del nucleone nel sottospazio della coordinata di isospin.

⁵ Al protone corrisponde il vettore colonna (1 0) ed al neutrone quello (0 1).

⁶ Le due condizioni equivalgono rispettivamente a $U^\dagger U = 1$ e $\det(U) = +1$; inoltre, i parametri reali da cui dipendono le matrici U sono tre, poiché degli otto iniziali, quattro sono vincolati dall'unitarietà della trasformazione ed un altro dalla positività del determinante.

⁷ Vedi Appendice A.

Per un sistema di due nucleoni si ha che l'isospin totale \mathbf{T} , che è somma degli isospin di ogni singolo nucleone ($\mathbf{t}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_i$), vale 0 o 1. Si hanno le configurazioni, rispettivamente antisimmetrica e simmetriche, di singoletto ($T = 0$)

$$\xi_{0,0}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{\xi_{+\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_1)\xi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_2) - \xi_{+\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_2)\xi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_1)}{\sqrt{2}}$$

e di tripletto ($T = 1$)

$$\begin{aligned}\xi_{1,-1}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \xi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_1)\xi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_2) \\ \xi_{1,0}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \frac{\xi_{+\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_1)\xi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_2) + \xi_{+\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_2)\xi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_1)}{\sqrt{2}} \\ \xi_{1,1}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \xi_{+\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_1)\xi_{+\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_2)\end{aligned}$$

che sono autostati simultanei per T^2 e T_3 , dove questa ultima è la proiezione del isospin sull'asse z . La teoria, per un qualunque sistema di nucleoni, risulta invariante per rotazioni nel sottospazio dello spin isotopico, ovvero \mathbf{T} rappresenta un integrale del moto. Inoltre la carica del nucleo è in relazione con la terza componente di \mathbf{T} , parallela all'asse z , attraverso l'espressione

$$Q = T_3 + \frac{N}{2} \quad (6)$$

dove N è il numero barionico.

Sperimentalmente si verifica una discrepanza tra i valori di sezione d'urto differenziale a diversi angoli di diffusione ed a diverse energie tra i sistemi n-p e p-p.⁸ Questa è attribuita in parte agli effetti della forza colombiana che è presente nel sistema di due protoni, ed in parte agli effetti quantistici derivanti dalla possibilità dello stato $T = 0$, che si realizza solo nel sistema n-p. Ma a meno di questi due effetti la teoria sviluppata resta essenzialmente immutata ed è possibile introdurre in essa l'invarianza isotopica sotto forma di operatore di scambio. Tale operatore si sostituisce al potenziale ordinario ed ha l'effetto di scambiare non solo le variabili spaziali, come fatto in precedenza, ma anche quelle di spin delle dei nucleoni; questo ha il nome di operatore di scambio di Heisenberg P_H ed è tale che $V_{sc}(\mathbf{r})P_H \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2) = V_{sc}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1)$. Il potenziale $V'(\mathbf{r})$ diventa così somma del potenziale perturbativo $V(\mathbf{r})$, del

⁸ La discrepanza si manifesta maggiormente ad alte energie, alle quali la dipendenza della sezione d'urto differenziale dall'angolo di diffusione per n-p diventa completamente anisotropa, mentre per p-p resta pressoché costante su tutto l'intervallo di variabilità.

potenziale d'accoppiamento di spin $V_s(r) \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ e del potenziale di scambio $V_{sc}(r) \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2$, ovvero $V'(r) = V(r) + V_s(r) \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + V_{sc}(r) \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2$.

I pioni – Chiariti gli aspetti fondamentali e di maggiore rilevanza teorica relativi ai sistemi di nucleoni, la fisica nucleare si trovava prima del 1935 senza una espressione applicabile dell'interazione nucleare. Nel 1935 Yukawa [6], associando alle forze nucleari delle particelle di massa intermedia tra quella del nucleone e del elettrone, formulò anche se in maniera incompleta la teoria mesonica. I mesoni dovevano essere particelle, mediatrici della forza nucleare tra i nucleoni, di massa uguale e portatrici di carica elettrica a seconda del sistema di nucleoni.

I primi mesoni furono osservati nel 1937 da Anderson ed altri ricercatori studiando la radiazione cosmica, ma non si trattava delle particelle ipotizzate da Yukawa per via delle masse troppo piccole; inoltre, come ebbero modo di verificare Conversi, Pancini e Piccioni durante la seconda guerra mondiale, mentre i mesoni positivi non interagivano con i nuclei, quelli negativi interagivano se i nuclei erano pesanti e si comportavano come particelle libere se i nuclei erano leggeri. Gli esperimenti contraddicevano l'ipotesi fatta poiché i mesoni di Yukawa, oltre a dovere essere suscettibili all'interazione nucleare indipendentemente dalla carica e dal peso dei nuclei, dovevano avere una massa di circa 148 MeV, mentre le particelle rilevate avevano valori di massa di 106 MeV.

Nel 1947 Lattes, Occhialini e Powell [7] osservarono due tipi di mesoni nei raggi cosmici ad alta quota. I primi, i pioni (π), erano particelle di massa 139 MeV, paragonabile a quella attesa dalla teoria mesonica; i secondi, del tipo già osservato e a cui si diede il nome di muoni (μ), venivano prodotti dal decadimento dei primi. I pioni, $\pi^+(139 \text{ MeV})$, $\pi^0(135 \text{ MeV})$, $\pi^-(139 \text{ MeV})$, formano un tripletto di spin isotopico $t = 1$ o analogamente una rappresentazione 3-dimensionale di SU(2). In figura 1 sono riportati i diagrammi dei processi tra nucleoni che implicano pioni.

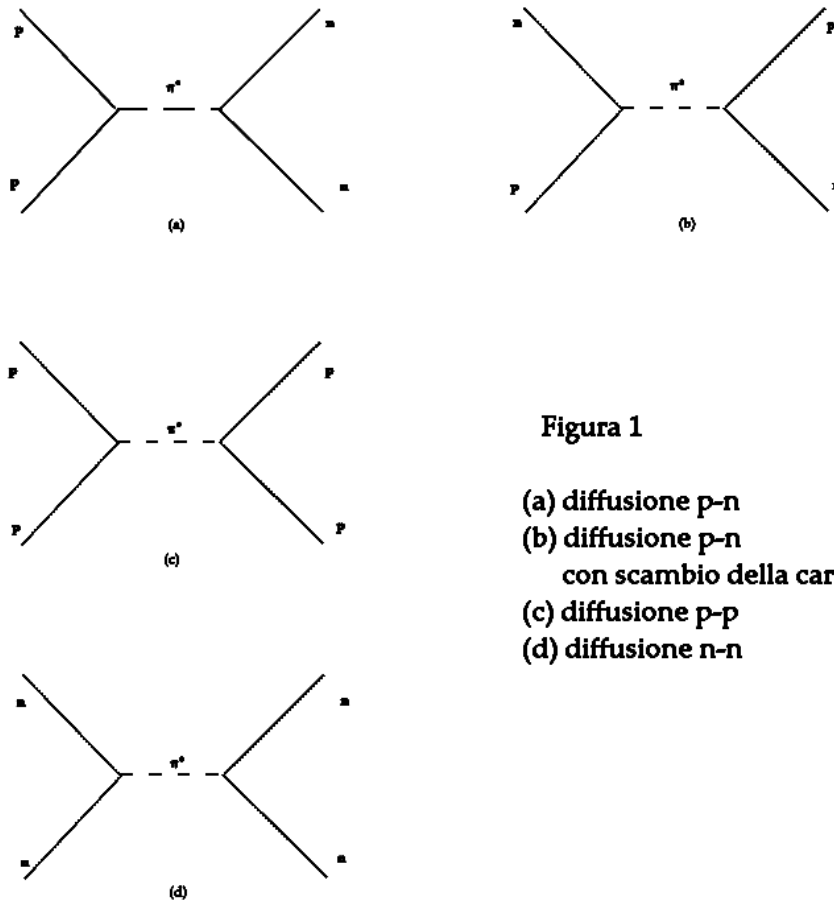


Figura 1

- (a) diffusione p-n**
- (b) diffusione p-n
con scambio della carica**
- (c) diffusione p-p**
- (d) diffusione n-n**

I diagrammi di Feynman in fig.1 hanno una doppia chiave di lettura: una con l'asse dei tempi orientato dal basso verso l'alto e l'altra con il medesimo orientato da sinistra verso destra. La prima, più fisica per quegli anni, vede i due nucleoni interagire scambiandosi un mesone che trasferisce o meno la carica; la seconda vede invece le reazioni che avvengono tra un nucleone ed un antinucleone⁹.

Il secondo caso è di maggiore interesse teorico poiché, dal fatto che i mesoni possono essere osservati in diversi processi di disintegrazione, gli stati relativi ad essi si trasformano in SU(2) come gli stati di un sistema nucleone-antinucleone, cioè come prodotto di due rappresentazioni fondamentali bidimensionali di SU(2): $[2^*] \times [2]$ ¹⁰. La riduzione del prodotto dà luogo ad una configurazione di tripletto (T = 1) ed una di singoletto (T = 0).

⁹ La scoperta delle antiparticelle, ipotizzate per primo da Dirac, e la loro fisica esula dai nostri scopi. Ai fini dell'esposizione assumiamo che un antinucleone è una particella di massa, spin ed isospin medesimo ma di carica opposta in segno rispetto al nucleone corrispondente.

¹⁰ Si noti che nel caso del deutone il prodotto ha la forma $[2] \times [2]$. Vedi [9] Appendice A₁₆ pp 423.

Il numero quantico stranezza ed SU(3) – La situazione seguente la scoperta dei pioni non consente di giustificare il grande numero di particelle che, anche grazie ai moderni acceleratori, furono rilevate tra gli anni '40 e '50 dello scorso secolo. I nucleoni ed i pioni soli non realizzano attraverso l'interazione forte tutta la varietà di particelle scoperte.

Tra queste consideriamo i mesoni K e la particella $\Lambda(1115 \text{ MeV})$, che furono osservate per la prima volta da Rochester e Butler nel 1947. La reazione $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$ è un tipico processo di produzione associata; questa reazione fu determinata a seguito del disaccordo che si riscontra tra i valori sperimentali delle vite medie ed i dati teorici ottenuti dalle sezioni d'urto dei processi $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$ e $K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ [8] [9]. Nel 1953 questa discrepanza, unita al fatto che i processi di decadimento di K^0 e Λ non sono gli inversi dei loro rispettivi processi di produzione, spinse indipendentemente Gell-Mann [10] e Nishijima [11] a postulare l'esistenza di un nuovo numero quantico, la stranezza, che deve risultare conservato nelle interazioni forti. L'introduzione della stranezza in fisica consentì di risolvere processi analoghi a quelli citati e a stabilire quali reazioni potevano realizzarsi o meno per interazione forte.

La stranezza s di una particella vale 0 per particelle come nucleoni o pioni e vale convenzionalmente -1 per particelle come Λ . Se estendiamo gli autostati dell'isospin aggiungendo l'autostato relativo alla stranezza, possiamo considerare funzioni d'onda che risultano essere sovrapposizione dei tre stati di base $|p\rangle$, $|n\rangle$ e $|s\rangle$ ¹¹ tali che

$$\begin{aligned} t_3 |p\rangle &= \frac{1}{2} |p\rangle & s |p\rangle &= 0 \\ t_3 |n\rangle &= -\frac{1}{2} |n\rangle & s |n\rangle &= 0 \\ t_3 |s\rangle &= 0 & s |s\rangle &= -|s\rangle \end{aligned}$$

Consideriamo allora trasformazioni unitarie U che siano matrici 3×3 nel campo complesso tali che $U\psi(t, s) = \psi'(t, s)$, dove $\psi(t, s) = c_1 |p\rangle + c_2 |n\rangle + c_3 |s\rangle$. I parametri reali da cui dipende la trasformazione sono diciotto, ma a questi vanno tolti rispettivamente nove ed uno vincoli derivanti dalle condizioni $U^\dagger U = 1$ e $\det(U) = +1$.

¹¹ Agli autostati corrispondono rispettivamente i vettori colonna $(1 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \ 0)$ e $(0 \ 0 \ 1)$.

Il gruppo delle trasformazioni U è detto SU(3) ed, in analogia ad SU(2), possiamo prendere otto matrici λ_i la cui algebra ne determina le proprietà

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le cui algebra gode delle proprietà fondamentali

1. $\lambda_i = \lambda_i^+$
1. $[\lambda_i, \lambda_j] = i f_{ijk} \lambda_k$
2. $\lambda_i \lambda_j + \lambda_j \lambda_i = \frac{4}{3} \delta_{ij} \mathbf{I} + 2 d_{ijk} \lambda_k$
3. $\text{Tr}(\lambda_i) = 0$
4. $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2 \delta_{ij}$

dove¹²

$$\begin{aligned} f_{ijk} &= \left\{ 1(123), \frac{1}{2}(147), -\frac{1}{2}(156), \frac{1}{2}(246), \frac{1}{2}(257), \frac{1}{2}(345), -\frac{1}{2}(367), \frac{\sqrt{3}}{2}(458), \frac{\sqrt{3}}{2}(678) \right\} \\ d_{ijk} &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}(118), \frac{1}{2}(146), \frac{1}{2}(157), \frac{\sqrt{3}}{3}(228), -\frac{1}{2}(247), \frac{1}{2}(256), \frac{\sqrt{3}}{2}(338), \frac{1}{2}(344), \frac{1}{2}(355), \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}(366), -\frac{1}{2}(377), -\frac{\sqrt{3}}{6}(448), -\frac{\sqrt{3}}{6}(558), -\frac{\sqrt{3}}{6}(668), -\frac{\sqrt{3}}{6}(778), -\frac{\sqrt{3}}{6}(888) \right\} \end{aligned}$$

In analogia a SU(2) possiamo riscrivere la trasformazione U come $U(x) = \exp(i\alpha(x) \cdot \lambda/2)$, con $\lambda \equiv (\lambda_i)$ ed $\alpha \equiv (\alpha_i)$, ma in questo caso non ha senso stabilire alcuna relazione tra SU(3) ed un qualunque altro gruppo.

Conclusioni – L'espressione (6) può essere modificata introducendo il numero quantico stranezza ed aggiungendo al secondo membro la grandezza ipercarica, definita come $Y = N + S$, in modo che sia

$$Q = T_3 + \frac{N + S}{2} = T_3 + \frac{Y}{2}$$

Questa formula rappresenta la definizione operativa di S, infatti postulando la sua conservazione e conoscendo la terza componente dell'isospin totale, il numero barionico e la carica di una data reazione si assegna la stranezza alle

¹² Tra parentesi tonde è riportata la terna di indici che devono essere fatti permutare.

particelle coinvolte nel processo. Ad esempio il decadimento $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$ ha $Q = 0$, $T_3 = 0$, $N = 1$ per la formazione del protone, quindi $S = -1$.

Da quanto visto l'interazione nucleare deve conservare oltre che la parità, lo spin, il numero di nucleoni e la carica, anche l'isospin e la stranezza. Questa interpretazione dell'interazione prima nucleare e poi forte, che culmina nello studio di $SU(3)$ attraverso uno sviluppo storico abbastanza complesso e non privo di errori, ha ispirato la moderna teoria dei quark.

Il gruppo $SU(3)$, così come l'abbiamo introdotto, ad una analisi più approfondita benché renda invariante la teoria per trasformazioni di isospin, dà luogo a multipletti di spin isotopico con valori di massa radicalmente differenti tra i membri della famiglia (violazione di $SU(3)$). Ad ogni modo, il formalismo che sta alla base del primo modello a quark è proprio quello relativo a questo gruppo ed i primi tre quark, di cui non discuteremo le proprietà, furono chiamati u (isospin up), d (isospin down) e s (strange) in maniera analoga a come abbiamo definito i vettori di base della rappresentazione tridimensionale di $SU(3)$.

La descrizione dell'interazione forte attraverso il modello a quark è quella che viene definita una teoria di gauge non commutativa; questa deve però godere al livello quantistico di tre proprietà: i) la teoria deve presentare stati energetici connessi allo stato di vuoto ("mass gap"); ii) gli stati di particella devono essere $SU(3)$ invarianti ("quark confinement"); iii) lo stato di vuoto deve essere invariante solo in un sottogruppo di $SU(3)$ ("chiral symmetry breaking"). La più recente teoria di gauge che descrive come i quark interagiscono per formare gli adroni è la QCD (Quantum Chromo Dynamics); questa si basa su $SU(3)$, ma per non violare la simmetria da esso derivante, ha come rappresentazione di base i tre autostati della particella gluone ovvero i suoi tre colori.

Reference:

- [1] R.T. Birge and D.H. Menzel (1931), Phys. Rev. **37**, 1669(L).
- [2] H.C. Urey, F.G. Brickwedde and G.M. Murphy (1932), Phys. Rev. **39**, 164(L).
- [3] J. Chadwick (1932), "*Possible existence of a neutron.*", Nature **129**, 312.

- [4] F. Joliot-Curie, I. Joliot-Curie, *Oeuvres scientifiques complètes*, Presses universitaires de France, Parigi (1961).
- [5] W. Heisenberg, *ZS. f. Phys.* **77** (1932) 1; **78** (1932) 154; **80** (1933) 587.
- [6] H. Yukawa, "*Interaction of elementary particles*", *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **17** (1935) 48; **19** (1937) 712.
- [7] C.M.G. Lattes, G. Occhialini, C.F. Powell (1947), "*Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsion*", *Nature* **160**, 453.
- [8] E. Segré, *Nuclei e particles*, Benjamin, New York (1977).
- [9] G. Morpurgo, *Introduzione alla fisica delle particelle*, Zanichelli, Bologna (1987)
- [10] M. Gell-Man, K.M. Watson (1954), "*The interaction between π -mesons and nucleons*", *Ann. Rev. Nuc. Sci.* **4**, 219.
- [11] K. Nishijima, *Foundamental particles*, Benjamin, New York (1963).

APPENDICE A

Analogia formale tra SU(2) e SO(3) – Si considerino due terne di assi ortogonali $Oxyz$ e $OXYZ$ aventi il punto d'origine in comune ed un vettore unitario \mathbf{n} passante per l'origine. Una trasformazione R che trasforma i punti p del primo riferimento nei punti P del secondo riferimento, è una matrice R tale che $P = R p$, la quale dipende dagli angoli α, β, γ , dove questi sono gli angoli formati rispettivamente da yOn, zOZ, nOY .

La trasformazione R è definita dalla matrice 3×3

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha & \sin \beta \cos \alpha \\ \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha \\ -\cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

tale che $R^T R = I$ e $\det(R) = \pm 1$; il gruppo formato dalle trasformazioni ortogonali con $\det(R) = +1$ è $SO(3)$.

In caso di rotazioni infinitesime di angolo ε intorno a \mathbf{n} , si può far corrispondere l'operatore $R = I + \delta R$ alla matrice $R_n(\varepsilon)$ e se (x_1, x_2, x_3) e (X_1, X_2, X_3) sono le coordinate dei punti p e P nei rispettivi riferimenti, allora deve essere $(X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3) + \delta R (x_1, x_2, x_3)$. La rotazione infinitesima è composizione di tre rotazioni operate attorno a ciascun asse e le ampiezze di queste rotazioni sono le componenti del vettore $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{n} \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$; si trova che

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} = i \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\rho}$$

dove $\boldsymbol{\rho}$ è il vettore di componenti le matrici hermitiane 3×3 ciascuna delle quali opera rispettivamente la rotazione di angolo infinitesimo ε_i intorno all' i -esimo asse. Quindi si ha $(X_1, X_2, X_3) = (1 + i \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\rho}) (x_1, x_2, x_3)$ e così $R = \exp(i \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\rho})$.

I gruppi $SU(2)$ ed $SO(3)$, per rotazioni infinitesime, godono della stessa algebra di Lie e quindi le trasformazioni U ed R , dipendendo dallo stesso numero di parametri continui reali, sono isomorfe in intorni infinitesimali della trasformazione identica.