

# Diffusione Elettrone – Protone: Cut-off e Regolarizzazione Dimensionale.

L. Cimmino ([cimmino@na.infn.it](mailto:cimmino@na.infn.it))

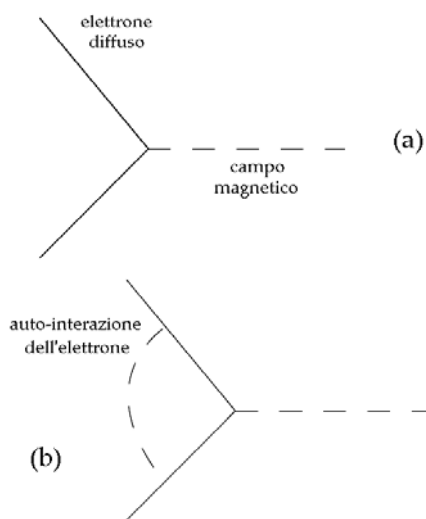
Lo scattering elastico di elettroni da parte di protoni, nel caso non relativistico, potrebbe essere introdotto prendendo inizialmente in considerazione gli esperimenti condotti a Manchester, tra il 1907 ed il 1920, da Lord Rutherford; tra questi, alcuni riguardavano la diffusione di particelle  $\beta$  da parte di nuclei pesanti. Benché, ai fini di una descrizione esaustiva del fenomeno, questa rappresenta una introduzione dal punto di vista storico, solo in un secondo momento si tratterà lo scattering e-p classicamente, ovvero alla maniera di Lord Rutherford; si preferisce, invece, introdurre il fenomeno ricorrendo ad una descrizione intuitiva dei processi che lo realizzano, alla maniera di Feynman.

Nel 1983, Feynman tenne un ciclo di quattro lezioni al Caltech che dovevano esprimere tutti i concetti e la teoria di base dell'elettrodinamica quantistica; queste lezioni furono raccolte e pubblicate, qualche anno dopo, nel celebre libro intitolato QED [1]. In queste si mostra che l'elettrodinamica quantistica spiega le interazioni tra elettroni e fotoni prendendo in considerazione due processi fondamentali la propagazione di fotoni ed elettroni nello spazio-tempo e l'emissione o l'assorbimento di un fotone da parte di un elettrone.

Basandosi su questi presupposti, l'elettrodinamica quantistica descrive i fenomeni calcolando le ampiezze di probabilità associate a ciascuno dei processi elementari che li compongono. La determinazione di queste ampiezze è legata alla possibilità che una data particella si propaghi da un punto A ad uno B nello spazio-tempo ed il loro valore dipende dalla differenza tra la distanza temporale e quella spaziale dei due punti e da un numero che per il momento indichiamo con  $n$ . Inoltre, l'incrocio di tre linee rappresenta l'accoppiamento e- $\gamma$  e l'ampiezza associatagli è un numero  $j$  che non dipende da nessuna grandezza, infatti viene convenzionalmente chiamata costante di accoppiamento.

Il calcolo viene svolto prendendo inizialmente in considerazione il minimo percorso eseguito da una particella tra due punti dello spazio-tempo ed

associando a questo tratto una ampiezza  $P_1$ . Questa però è solo una prima, e forse grossolana, approssimazione di quello che accade nella realtà; per migliorare il calcolo dobbiamo ipotizzare che la particella non viaggi seguendo il minimo percorso ma che devii la propria direzione in un punto qualunque dello spazio-tempo per poi raggiungere il punto di arrivo. Tutte le possibili deviazioni intermedie (o vertici) tra l'evento iniziale e quello finale sono equiprobabili e non si hanno condizioni a priori che ne limitino la scelta; inoltre il numero di punti visitati dall'elettrone può anche essere infinito. Ad ogni modo,  $P_1$  comprende la somma delle ampiezze di tutti questi infiniti modi in cui può trovarsi la particella, ovvero la formula che esprime  $P_1$  è la somma di tutti i possibili modi in cui la particella può muoversi tra due punti dati.



Le particelle a cui ci si riferirà nel seguito sono elettroni e fotoni, alle quali ne verrà aggiunta un'altra, il positrone, che possiamo intendere come coniugata dell'elettrone. Per ora limitiamoci a capire cosa accade ad un elettrone che si propaga tra due punti e che interagisce con un fotone. Il caso storico ci riporta a Dirac, che calcolò il momento magnetico

Figura 1 dell'elettrone servendosi di un processo

che può essere rappresentato da un diagramma composto da due linee elettroniche ed una fotonica come illustrato in figura 1.a , e che si riferiva alla risposta di un elettrone in un campo magnetico esterno. Benché il valore calcolato risultasse vicino al valore misurato sperimentalmente più tardi, comunque differiva da esso significativamente. Il valore teorico che risultò compatibile con il valore sperimentale fu calcolato da Schwinger [2] nel 1948 e fu migliorato indipendentemente da Tomonaga [3] e da Feynman [4]; questo correggeva il grafico di base come riportato in figura 1.b. In questo processo l'elettrone, prima di interagire con il campo esterno, emette un fotone che riassorbe solo dopo l'accoppiamento con il fotone esterno. Poiché le due

alternative sono sperimentalmente indistinguibili, le ampiezze relative a ciascun diagramma vanno sommate ed altrettanto accade per ordini correttivi superiori a questo.

A titolo di esempio, per calcolare l'ampiezza del processo rappresentato dal diagramma 1.a, bisogna moltiplicare tra loro le ampiezze relative ad ogni linea e data la presenza di un vertice bisogna moltiplicare anche per un  $j$ . Inoltre, il vertice tra due linee elettroniche cela un termine  $n^2$  legato alle ampiezze delle due linee che in esso confluiscono, le quali sono riferite alla stessa particella e che quindi hanno uguale  $n$ . Il numero  $n$  non compare nel computo dell'ampiezza delle linee fotoniche, poiché per i fotoni si pone  $n = 0$ . Se si calcola l'ampiezza relativa al diagramma 1.b, quindi come prodotto di ampiezze e di numeri<sup>1</sup>  $n$  e  $j$ , e si somma a questa l'ampiezza già calcolata per 1.a, si ha la prima correzione del diagramma.

**Scattering Coulombiano** – Per un elettrone in moto in un campo elettrico esterno possiamo tracciare il diagramma illustrato in figura 2, dove si assume che il campo, prodotto dalla presenza di una particella massiva di carica opposta all'elettrone, sia statico.

La diffusione di raggi  $\beta$  da parte di nuclei fu studiata per la prima volta da Lord Rutherford dopo il 1911 ed i risultati degli esperimenti condotti furono pubblicati nel 1914 [5] insieme a quelli relativi allo scattering di

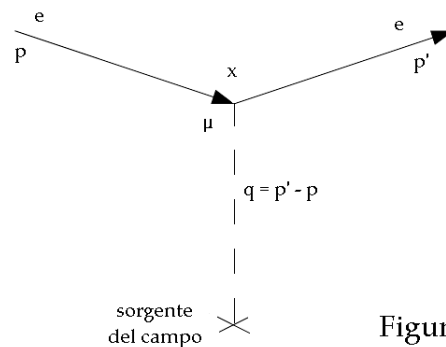


Figura 2

particelle  $\alpha$ ; si trattava in pratica di quella che va sotto il nome di diffusione coulombiana, che prevede l'interazione non relativistica tra un fascio incidente costituito di particelle cariche elettricamente ed un bersaglio anche esso carico.

La carica nucleare genera una buca di potenziale nelle adiacenze del nucleo che attraverso questa interagisce con gli elettroni costituenti il fascio e così, nella

<sup>1</sup> I numeri  $j$  ed  $n$  sono da intendere come la carica e la massa reale dell'elettrone; questo aspetto non troppo intuitivo sarà chiarito nel seguito quando si tratterà la correzione perturbativa dei diagrammi di Feynman.

pratica, il problema di valutare l'interazione tra elettroni e protoni è equivalente a valutare la deflessione subita dal fascio ad opera dei nuclei. La grandezza che caratterizza i processi di diffusione è la sezione d'urto differenziale  $d\sigma$  definita come il rapporto tra  $dN$ , il numero di particelle diffuso nell'intervallo di angolo  $(\phi, \phi + d\phi)$  sotteso all'angolo solido  $(\Omega, \Omega + d\Omega)$  per unità di tempo, ed  $n$ , il numero totale di particelle incidenti per unità di superficie e di tempo.

Se con  $\rho$  indichiamo il parametro d'urto, ovvero la distanza tra la retta direttrice del fascio e la retta passante per il centro diffusore, risulta che  $dN = 2\pi\rho d\rho n$ , da cui risulta  $d\sigma = dN/n = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho |d\rho/d\phi| d\phi$ . La sezione d'urto differenziale riferita all'angolo solido  $d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi$ , è

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\phi} \left| \frac{d\rho}{d\phi} \right| d\Omega$$

Considerando la situazione in cui un elettrone è diffuso da un protone, possiamo approssimare la posizione del centro di massa nel centro diffusore, intendendo così che l'angolo di diffusione  $\phi$  è equivalente nei sistemi di baricentro e di laboratorio. Posto che il potenziale coulombiano è espresso da  $U = a/r$ , dove  $a$  è una costante, e dato che l'energia cinetica dell'elettrone è  $\frac{1}{2} m_e v^2$ , si ha  $\rho = |a/m_e v^2| \operatorname{ctg}(\phi/2)$ , la quale derivata rispetto a  $\phi$  fornisce la formula di Rutherford per particelle cariche in un campo coulombiano

$$d\sigma = \left( \frac{a}{2m_e v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\phi}{2}} d\Omega$$

La formula rappresenta la sezione d'urto differenziale nel caso più generale di diffusione coulombiana, perché è indipendente dal segno di  $a$ , che nel caso in questione è negativo dato che il potenziale è attrattivo; inoltre  $a$  ha valore assoluto proporzionale ad  $e^2$ . Si dimostra che il rapporto  $d\sigma/d\Omega$  è uguale al modulo quadro della grandezza che, al livello della meccanica quantistica, è per definizione l'ampiezza di diffusione coulombiana  $f(\phi)$ .

**La rappresentazione di interazione** – Per trasporre  $f(\phi)$  al caso di una teoria quantistica dei campi, bisogna esprimerla in termini di opportuni operatori e stati del sistema e- $\gamma$ ; ci occuperemo di derivare questi oggetti a partire dalla

rappresentazione di interazione. Questa è equivalente alla rappresentazione di Schrodinger e ciò può essere mostrato nel modo seguente.

Si consideri l'Hamiltoniana del sistema  $H = (H_\gamma + H_e) + H_I = H_0 + H_I$  dove i due termini in parentesi, sono rispettivamente l'Hamiltoniana relativa al campo elettrico e al elettrone imperturbati, ed il termine restante è l'hamiltoniana di interazione. Si passa dalla rappresentazione di Schrodinger a questa definendo la trasformazione unitaria  $U_0(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}$  e l'operatore  $O^I$  tale che  $O^I(t) = U_0^\dagger O^S U_0$ , che rende un osservabile  $O^S$  nella rappresentazione di Schrodinger in un osservabile  $O^I$  nella rappresentazione di interazione; differenziando  $O^I(t)$  si ha

$$i\hbar \frac{d}{dt} O^I(t) = [O^I(t), H_0]$$

Questo osservabile è in relazione con il campo libero associato all'elettrone  $\psi(x)$ , quando questo ultimo è descritto nel sistema di riferimento del primo.

Considerando che  $\psi_I(x, t) = U_0^\dagger \psi_S(x, t)$ , dall'equazione di Schrodinger otteniamo l'equazione del moto nella rappresentazione di interazione

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_I(x, t) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} H_I^S e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \psi_S(x, t)$$

dove  $H_I^S$  rappresenta l'hamiltoniana di interazione nella rappresentazione di Schrodinger.

Integrando l'equazione del moto, con la condizione iniziale  $\psi_I(x, 0) = \psi_I(x)$ , si hanno per ricorsione le equazioni

$$\psi_I^{(1)}(x, t) = \psi_I(x) - i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \psi_I(x, t')$$

$$\psi_I^{(2)}(x, t) = \psi_I(x) - i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') \psi_I(x, t') + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') \psi_I(x, t'')$$

...

$$\psi_I^{(n)}(x, t) = \sum_{m=0}^n (-i)^m \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \dots \int_{-\infty}^{t^{(m-1)}} dt^{(m)} H_I(t') H_I(t'') \dots H_I(t^{(m)}) \psi_I(x, t^{(m)})$$

che rappresentano la successione di soluzioni perturbative, espresse in serie di potenze di  $H_I$ . Possiamo ricorrere a questa soluzione se, come nel caso della QED, l'energia di interazione  $H_I$  è piccola. Questa soluzione ci consente, nel limite di  $t \rightarrow \infty$ , di definire l'operatore (o matrice)  $S$  :

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt^{(m)} T(H_I(t')H_I(t'')\dots H_I(t^{(m)})) = \sum_{m=0}^{\infty} S^{(m)}$$

dove  $T(H_I(t')H_I(t'')\dots H_I(t^{(m)}))$  è il prodotto cronologico (o *time-ordered product*) degli  $m$  operatori  $H_I(t^{(m)})$ .

Tenendo conto del campo  $\psi(x)$  l'hamiltoniana di interazione può essere scritta come

$$H_I(t) = ie \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) a_\mu(x)$$

che sostituito nella precedente espressione ci fornisce l' $m$ -esimo elemento di matrice

$$S^{(m)} = \frac{e^m}{m!} \int \dots \int d^3x_n \dots d^3x_1 T(\bar{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} \psi(x_n) \dots \bar{\psi}(x_1) \gamma^{\mu_1} \psi(x_1)) T(a_{\mu_n}(x_n) \dots a_{\mu_1}(x_1))$$

dove  $a_\mu(x)$  rappresenta il quadrivettore potenziale, descrive il campo elettrico.

Questa matrice trasforma gli stati di ingresso in quelli di uscita nei processi di diffusione e ad essa è legata la probabilità  $P_{if} = |\langle f | S | i \rangle|^2$  di ogni possibile transizione da uno stato iniziale  $|i\rangle$  ad uno stato finale  $|f\rangle$ .

**La seconda quantizzazione e le regole di Feynman** – Per ogni data transizione, il time-ordering consente di associare univocamente ad ogni  $S^{(m)}$ , un insieme di diagrammi che rappresentano in questo modo la correzione al ordine  $m$ -esimo del diagramma del dato processo. Al ordine  $m$ , il prodotto cronologico  $S^{(m)}$  corrisponde ad un dato diagramma in cui compaiono esattamente  $m$  vertici. Per il moto di un elettrone in un campo elettrico esterno, bisogna determinare inizialmente gli elementi di matrice, del primo ed del terzo ordine, associati al diagramma in figura 2, per poi stabilirne le proprietà.

Per il computo dell'ampiezza del diagramma in figura 2, bisogna considerare un operatore di campo  $a_\mu(x)$  che è associato alla linea fotonica tra la sorgente del campo ed il vertice  $x$ , un operatore di campo  $\psi(x)$  associato alla linea elettronica entrante nel vertice, un operatore di campo  $\bar{\psi}(x)$  associato alla linea elettronica uscente ed un termine di vertice  $\gamma_\mu$ . Si ha così il termine corrispondente al diagramma del primo ordine

$$S^{(1)} = e \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu a_\mu \psi. \tag{1}$$

---

<sup>2</sup>  $\bar{\psi}(x) = \gamma^0 \psi^\dagger(x)$

Gli operatori di campo  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$ , introdotti in precedenza, sono rispettivamente le soluzioni della equazione di Dirac

$$\left( i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_e c \right) \psi(x) = 0$$

e della sua aggiunta. Per come l'equazione è scritta in termini di matrici- $\gamma$  e date le relazioni di anticommutazione tra esse, deve necessariamente essere che le soluzioni si presentino come oggetti a quattro componenti, per l'esattezza devono essere quadri-spinori.<sup>3</sup>

Le soluzioni possono essere sviluppate in onde piane, dove queste ultime sono rispettivamente le soluzioni ad energia positiva e negativa delle equazioni di Dirac

$$(\gamma^\mu p_\mu - m_e c)u(p) = 0 \qquad (\gamma^\mu p_\mu + m_e c)v(p) = 0$$

da cui risulta che

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ b(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x/\hbar} + d^\dagger(\mathbf{p}) v(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x/\hbar} \right] = \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ d(\mathbf{p}) \bar{v}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x/\hbar} + b^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x/\hbar} \right] = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \end{aligned}$$

dove  $b$  e  $d$  sono rispettivamente gli operatori di distruzione e di creazione degli stati di particella.

Riferendoci al diagramma in figura 2 e rispetto allo spazio dei momenti, l'elemento corrispondente al diagramma del primo ordine è riscritto, attraverso la trasformata di Fourier dei campi  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$ , in modo da applicarsi agli stati iniziale  $|i\rangle$ , finale  $|f\rangle$  ed a quello di vuoto  $|0\rangle$ . Questo ultimo è definito dalla relazione  $\psi^+(x)|0\rangle = \bar{\psi}^+(x)|0\rangle = 0$ . Inoltre, bisognerà tenere presente che lo scattering è elastico e che quindi, dovendosi conservare l'energia dell'elettrone, l'energia ceduta dal campo all'elettrone è trascurabile, cosa che concorda con il fatto che il campo è statico.

---

<sup>3</sup> Per il resto del trattato si ometteranno deliberatamente gli indici relativi allo spin e non si farà alcun riferimento allo stato di polarizzazione delle particelle coinvolte nei fenomeni trattati. Ciò nonostante, l'espressione quadri-spinoriale dei campi resta la più generale per quanto riguarda la descrizione degli stati di particella riguardanti la teoria quantistica dei campi.

Quindi la (1) è riscritta come

$$S^{(1)} = e \int d^4x : \bar{\psi} \mathbf{a}_e \psi :$$

dove con  $\mathbf{a}_e = \gamma^\mu a_\mu = \gamma^\mu \left( \frac{e}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2}, 0, 0, 0 \right)$  si indica il campo elettrostatico classico rispetto allo spazio dei momenti e con  $: \bar{\psi} \mathbf{a}_e \psi := (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) \mathbf{a}_e (\psi^+ + \psi^-) :$  si denota il *normal product* degli operatori di campo. L'elemento di matrice risultante è dato da

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = \langle f | e \int d^4x \bar{\psi}^- \mathbf{a}_e \psi^+ | i \rangle = e \int d^4x \langle f | \bar{\psi}^- \mathbf{a}_e \psi^+ | i \rangle.$$

Le regole di Feynman, nello spazio dei momenti, si ottengono applicando gli operatori di campo agli stati iniziale e finale; dato che

$$b(\mathbf{p}) | i \rangle = \left( \frac{m_e}{E} \right)^{\frac{1}{2}} | 0 \rangle$$

$$b^+(\mathbf{p}') | f \rangle = \left( \frac{m_e}{E'} \right)^{\frac{1}{2}} | 0 \rangle$$

si ha

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= e \int d^4x \left( \frac{m_e}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m_e}{E'} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} / \hbar} \bar{u}(\mathbf{p}') \mathbf{a}_e u(\mathbf{p}) = \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \left( \frac{m_e}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m_e}{E'} \right)^{\frac{1}{2}} [e \bar{u}(\mathbf{p}') \mathbf{a}_e u(\mathbf{p})]. \end{aligned}$$

Perciò, conservandosi l'energia deve essere  $E = E'$  ed operando la sostituzione  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mapsto 2\pi \delta(E' - E)$  l'elemento di matrice è dato da

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = 2\pi \delta(E' - E) \left( \frac{m_e}{E} \right) [e \bar{u}(\mathbf{p}') \mathbf{a}_e u(\mathbf{p})]$$

dove il termine in parentesi quadra è detto ampiezza di Feynman.

Il modulo quadro dell'elemento di matrice valutato, è la probabilità di transizione, per unità di tempo, tra i due stati iniziale e finale. Se si adotta la definizione di sezione d'urto differenziale come probabilità di transizione verso gli stati con momento cinetico compreso tra  $\mathbf{p}'$  e  $\mathbf{p}' + d^3\mathbf{p}'$  per il flusso relativo



all'elettrone incidente, che nel sistema di riferimento del laboratorio è la velocità relativa  $v$  dello stesso, allora si ha

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left| 2\pi \delta(E' - E) \left( \frac{m_e}{E} \right) [e \bar{u}(p') \not{a}_e u(p)] \right|^2}{v} \prod \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}$$

dove il flusso elettronico è valutato per unità di tempo e di superficie e la produttoria è estesa a tutti gli stati finali con momento compreso tra  $p'$  e  $p' + d^3 p'$ .

La densità di questi ultimi risulta essere

$$\frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} = \frac{|p'|^2 dp'}{(2\pi)^3} = \frac{|p'| E' dE'}{(2\pi)^3}$$

da cui

$$\delta(E' - E) \prod \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} = \frac{|p'|}{(2\pi)^3} \int \delta(E' - E) E' dE' = \frac{|p'|}{(2\pi)^3} E$$

e poiché  $v = |p|/E = |p'|/E$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= 2\pi \delta(E' - E) \left( \frac{m_e}{E} \right)^2 \frac{|e \bar{u}(p') \not{a}_e u(p)|^2}{|p'|/E} \prod \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} = \\ &= \left( \frac{m_e}{2\pi} \right)^2 |e \bar{u}(p') \not{a}_e u(p)|^2 = \left( \frac{e^2 m_e}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{|p' - p|^4} |\bar{u}(p') \gamma^0 u(p)|^2. \end{aligned}$$

Dalle proprietà sugli spinori si trova che  $(2m_e)^2 |\bar{u}(p') \gamma^0 u(p)|^2 = E^2 + p \cdot p' + m_e^2$  e dato che  $p \cdot p' = E^2 v^2 \cos \frac{\phi}{2}$  e  $|p' - p|^4 = 16 E^4 v^4 \sin^4 \frac{\phi}{2}$ , dove  $\phi$  è l'angolo di diffusione, nel limite non relativistico  $v \ll 1$  si ha nuovamente la sezione d'urto di Rutherford

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{8 E^4 v^4 \sin^4 \frac{\phi}{2}} (E^2 + E^2 v^2 \cos \frac{\phi}{2} + m_e^2) d\Omega = \\ &= \frac{a^2}{8 E^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\phi}{2}} \left( 1 + v^2 \cos \frac{\phi}{2} + \frac{m_e^2}{E^2} \right) d\Omega = \frac{a^2}{4 E^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\phi}{2}} \left( 1 + \frac{v^2}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) d\Omega \\ &\xrightarrow{v \ll 1} d\sigma = \left( \frac{a}{2m_e v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\phi}{2}} d\Omega. \end{aligned}$$

**Correzioni al secondo ordine perturbativo** – Le particelle fotone ed elettrone sono stati considerati fino ad ora come “non interagenti” (o *bare*). Ciò è dovuto al fatto che non si sono presi in considerazione altri possibili effetti che partecipano

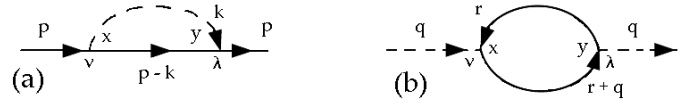


Figura 3

nel processo di interazione. Ciò che ci si aspetta che accada, è che l'elettrone interagisca con il proprio campo elettromagnetico e che il fotone, in forza della mutua interazione con l'elettrone, crei una coppia elettrone-positrone che successivamente si annichilano per rigenerarlo. Di seguito, ci riferiremo rispettivamente a questi due effetti, i cui diagrammi associati sono mostrati in figura 3, come *auto-energia dell'elettrone* (a) e *polarizzazione del vuoto* (b).

La correzione radiativa associata a ciascun diagramma è data, rispettivamente, dai *loop integrals* :

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^v \frac{i(\not{p}-\not{k})-m_0}{(p-k)^2+m_0^2} \gamma^\lambda \frac{g_{v\lambda}}{k^2} \\ \Pi_{v\lambda}(q) &= \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \int d^4p \gamma^v \frac{i(\not{p}-\not{q})-m_0}{(p-q)^2+m_0^2} \gamma^\lambda \frac{i\not{q}-m_0}{q^2+m_0^2} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

dove con  $e_0$  e  $m_0$  si indicano la carica e la massa a riposo dell'elettrone non interagente (si fa questa precisazione poiché con  $e$  ed  $m$  si indicheranno la carica e la massa a riposo della particella reale). Questa coppia di valori non è osservabile e la carica viene introdotta come costante di accoppiamento per i campi liberi. Quindi ogni grandezza osservabile, come la sezione d'urto calcolata in precedenza, deve essere espressa in termini delle grandezze  $e$  ed  $m$ .

Gli integrali in (2) sono divergenti per grandi valori di  $k$  e  $p$ , rispettivamente; per eliminare queste divergenze, che si presentano negli elementi di matrice  $S$ , si modifica la teoria rinormalizzando la massa e la carica dell'elettrone. Per la rinormalizzazione della carica, si considera il termine di auto-energia del fotone e si richiede l'invarianza di gauge  $\Pi_{v\lambda}(q) = -g_{v\lambda}A(q^2) + q^v q^\lambda B(q^2)$ , dove  $A(q^2)$  è finito e tale che  $A(q^2=0)=0$ , in modo che se la corrente deve essere conservata allora il termine proporzionale al momento del fotone deve annullarsi, così da poter trascurare il termine  $q^v q^\lambda B(q^2)$ . Sviluppando il propagatore in potenze di  $e_0$  e moltiplicandolo per questa stessa quantità si ottiene la carica elettronica rinormalizzata  $e^2 = e_0^2 [1 - e_0^2 A'(q^2=0)] = Z_3 e_0^2$ .

In modo analogo, considerando il termine di auto-energia dell'elettrone ed espandendolo in serie di potenze intorno a  $\mathbf{p} = \mathbf{m}$ , si ha che  $\Sigma(\mathbf{p}) = A + (\mathbf{p} - \mathbf{m})B + \Sigma_c(\mathbf{p})$  dove  $A (= \Sigma(\mathbf{p} = \mathbf{m}))$  e  $B$  sono costanti e  $\Sigma_c(\mathbf{p})$  rappresenta la parte convergente del propagatore; la massa fisica  $m$  è definita attraverso  $e_0$  e  $m_0$  dalla relazione  $m = m_0 + \delta m = m_0 - e_0^2 \Sigma(\mathbf{p} = \mathbf{m})$ , mentre la carica rinormalizzata è definita dalla relazione  $e^2 \equiv e_0^2 [1 - e_0^2 B] = Z_2 e_0^2$ .

Appare chiaro che i numeri  $j$  ed  $n$ , ad i quali si è accennato nell'introduzione, sono da associare rispettivamente ad  $e$  ed  $m$ ; queste grandezze sono quelle che danno luogo ad osservabili fisiche e, per la presenza dei parametri  $Z_3$  e  $Z_2$  che compaiono nel computo della carica reale e che sono da intendere come costanti di rinormalizzazione, dipendono dal tipo di diagramma al quale ci si riferisce.

**Cut-off e regolarizzazione dimensionale** – L'eliminazione delle divergenze derivanti dai *loop integrals* e così la possibilità di rinormalizzare la teoria, dipendono dalla possibilità di applicare a questa uno tra diversi metodi di regolarizzazione. Tra questi, e solo a titolo di esempio, applicheremo il cut-off per valutare la parte finita derivante dal termine di auto-energia del elettrone e la regolarizzazione dimensionale per valutarla dal termine di polarizzazione del vuoto.

*Cut-off:*

Si considera il *mass-shift*

$$\begin{aligned} \delta m &= -e_0^2 \Sigma(\mathbf{p} = \mathbf{m}) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^4} \int d^4 k \gamma^\nu \frac{i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - m}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{k^2} = \\ &= -i \frac{e^2}{(4\pi)^4} \int d^4 k \gamma^\nu \frac{i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - m}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m^2} \gamma^\lambda \left[ \frac{1}{k^2 - \kappa^2} - \frac{1}{k^2 - K^2} \right] = \frac{e^2}{(4\pi)^4} \int d^4 k \frac{2(\mathbf{k} + \mathbf{m})}{k^2 - 2\mathbf{p}\mathbf{k}} \int_{\kappa^2}^{K^2} \frac{dt}{(k^2 - t)^2} \end{aligned}$$

che in virtù della parametrizzazioni di Feynman  $\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[b + (a - b)z]^3}$  è

riscritto come

$$\begin{aligned} \delta m &= \frac{e^2}{(4\pi)^4} \int_{\kappa^2}^{K^2} dt \int_0^1 dz \int d^4 k \frac{4(\mathbf{k} + \mathbf{m})z}{[k^2 - 2\mathbf{p}\mathbf{k}(1-z) - tz]^3} = \frac{m e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \int_{\kappa^2}^{K^2} dt \frac{2z - z^2}{[tz + m^2(1-z)]^3} = \\ &= \frac{ma}{2\pi} \int_0^1 dz (2-z) \ln \frac{K^2 z + m^2(1-z)^2}{\kappa^2 z + m^2(1-z)^2} \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} \delta m = \frac{ma}{2\pi} \ln \frac{K^2}{m^2} \int_0^1 dz (2-z) + t.f. = \frac{3ma}{2\pi} \ln \frac{K}{m}. \end{aligned}$$

Si ha  $A = -\frac{3m}{8\pi^2} \ln \frac{K}{m}$  che diverge logicamente per  $K$  tendente ad infinito.

$B$  anche diverge, ma non si necessita una sua valutazione poich  definendo la carica rinormalizzata il termine viene assorbito nell'espressione di questa. Cos , il termine finito  $\Sigma_c(p)$ , e quindi la correzione al secondo ordine del propagatore fermionico, si ottiene sottraendo al termine  $\Sigma(p)$  la parte divergente  $A$  e definendo la carica rinormalizzata  $e$ .

*Regolarizzazione dimensionale :*

Con questo metodo si modificano gli integrali quadridimensionali che divergono in QED, con integrali di dimensione  $D = 4 - \eta$  che risultano finiti per  $\eta$  molto piccolo.<sup>4</sup>

Posto che la modifica della dimensione del integrale consente di valutare la

$$\text{Tr} [\gamma^\nu (\mathbf{p} + \mathbf{q} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p} + m)] = f(D) \{ (p^\nu + q^\nu) p^\lambda + (p^\lambda + q^\lambda) p^\nu + (m^2 - p^2 - pq) g^{\nu\lambda} \}$$

dove  $f(D)$    un parametro che dalla dimensione  $D$    tale che  $f(4) = 4$ , si ha

$$\Pi_{\nu\lambda}(q) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \int d^4 p \gamma^\nu \frac{i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - m}{(p - q)^2 + m^2} \gamma^\lambda \frac{i\mathbf{q} - m}{q^2 + m^2} \right\} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^D p \gamma^\nu \frac{\text{Tr} [\gamma^\nu (\mathbf{p} + \mathbf{q} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p} + m)]}{[(p - q)^2 + m^2][q^2 + m^2]}$$

che, se si usa la parametrizzazioni di Feynman, diventa

$$\Pi_{\nu\lambda}(q) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int d^D p \gamma^\nu \frac{\text{Tr} [\gamma^\nu (\mathbf{p} + \mathbf{q} + m) \gamma^\lambda (\mathbf{p} + m)]}{[p^2 + m^2 + (q^2 + 2pq)z]^2}.$$

Ridefinendo la variabile di integrazione con  $r = p + qz$ , si trova che

$$\Pi^{\nu\lambda}(q) = (q^\nu q^\lambda - q^2 g^{\nu\lambda}) \frac{f(D) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{2^3 \pi^{4-D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[q^2 z(1-z) + m^2]^{2-D/2}}$$

da cui imponendo la condizione di gauge e per  $D \rightarrow 4$ , si ha

$$\begin{aligned} e^2 \Pi_c(q^2) &= e^2 \Pi(q^2) - A'(0) = e^2 \frac{f(D) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{2^3 \pi^{4-D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[q^2 z(1-z) + m^2]^{2-D/2}} - A'(0) \quad \rightarrow \\ &\rightarrow e^2 \Pi_c(q^2) = \frac{2a}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left( 1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) \end{aligned}$$

dove  $\Gamma(\eta) = \eta/2 - 0.5772$    il parametro di Eulero ed  $A'(0) = \Pi(0)$ .

<sup>4</sup> La teoria deve essere ripristinata nel limite di  $\eta$  che tende a zero, ovvero, dopo la regolarizzazione il propagatore fotonico dovr  essere espresso nei termini di un integrale quadridimensionale.

**Conclusioni** – Si è mostrato come a partire dalla meccanica quantistica sia possibile valutare la sezione d'urto classica per lo scattering elastico di elettroni da parte di protoni e come la teoria corregge, con l'ausilio del metodo perturbativo, le grandezze che la riguardano. Il fatto rilevante è che grandezze fondamentali come la carica elettronica e la massa della stessa particella, si modificano nei processi di interazione elettrodinamici e che la correzione ai propagatori è necessariamente accompagnata da integrali che divergono. Infine si sono applicati due metodi di regolarizzazione per calcolare la parte finita che è legata ai propagatori e che corregge effettivamente la teoria ad ogni ordine perturbativo. La differenza fondamentale tra i due metodi è rappresentata dal fatto che la regolarizzazione dimensionale assicura l'invarianza di gauge della teoria e la massa nulla per il fotone, cosa che invece deve essere dimostrata a posteriori quando si applica il cut-off. Questo dipende dal fatto che, nel cut-off, il fattore moltiplicativo finito regolarizza solo il propagatore in modo matematico, senza curarsi della fisica legata a questo. Infatti come si vede, nella trattazione fatta si sono introdotti tacitamente due fattori,  $\kappa$  e  $K$ , legati alla massa, ipoteticamente non nulla, del fotone.

## Reference

- [1] R. Feynman, *QED* (1989), Adelphi, Milano.
- [2] J. Schwinger (1948), *Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation*, Phys. Rev. 74, 1439–1461.  
J. Schwinger (1949), *Quantum Electrodynamics. II. Vacuum Polarization and Self-Energy*, Phys. Rev. 75, 651–679;  
J. Schwinger (1949), *Quantum Electrodynamics. III. The Electromagnetic Properties of the Electron – Radiative Corrections to Scattering*, Phys. Rev. 76, 790–817.
- [3] S. Tomonaga (1948), *On Infinite Field Reactions in Quantum Field Theory*, Phys. Rev. 74, 224–225.
- [4] R. Feynman (1948), *Relativistic Cut-Off for Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. 74, 1430–1438;

R. Feynman (1949), *The Theory of Positrons*, Phys. Rev. 76, 749–759;

R. Feynman (1949), *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. 76, 769–789.

[5] E. Rutherford (1914), *The Structure of Atom*, Phil. Mag. 27(6), 488–489.