Note di Teoria dei Campi - ver.0.1

L. Cimmino (cimmino@na.infn.it)

2 marzo 2006

Parte Terza - Teorie di Gauge

Sollevamento dei Campi Vettoriali. Si considerino due varietà P e Q. Senza perdere in generalità, se l'applicazione $\pi : P \to Q$ è un proiettore ed $f : Q \to \mathbf{R}$ è una qualsiasi funzione di differenziabile definita su Q, allora il *pullback* di f rispetto a π è per definizione l'applicazione $f \circ \pi$ che ci consente di portare la funzione f da Q a P. Praticamente, tale operazione ci permette di scrivere le equazioni del moto in uno spazio di dimensione più grande.

Pullback di Equazioni del Moto

Questa possibilità deve essere comunque compatibile con la descrizione fisica adottata, ovvero nel portare le equazioni del moto da Q a P bisogna prima garantire che i gradi di libertà aggiuntivi non abbiano effetto sulla dinamica, poi bisogna fare in modo che le equazioni del moto in P si proiettino su quelle in Q. Come esempio, si consideri la sfera S^2 in $\mathbf{R}^3$ nel sistema di coordinate (x_1, x_2, x_3) tali che $x_i x^i = 1$ e sia

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{x} = x_k \sigma^k = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

una rappresentazione di S^2, dove σ_i sono le *matrici di Pauli.* Analogamente, si consideri la sfera S^3 in $\mathbf{R}^4$ nel sistema di coordinate (y_0, y_1, y_2, y_3) tale che $y_i y^i = 1$, che ammette rappresentazione in $SU(2)$ mediante la mappa

$$(y_0, y_1, y_2, y_3) \mapsto \mathbf{s} = y_0 \cdot \mathbf{1} + iy_k \sigma^k = \begin{pmatrix} y_0 + iy_3 & y_2 + iy_1 \\ -y_2 + iy_1 & y_0 - iy_3 \end{pmatrix}.$$

La mappa $\mathbf{s} \mapsto \mathbf{s}^{-1}\sigma^3\mathbf{s}$ mette in relazione gli elementi si $SU(2)$ con le matrici nella rappresentazione di S^2; infatti

$$\mathbf{s}^{-1}\sigma^3\mathbf{s} = \begin{pmatrix} y_0^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2 & 2(y_0y_2 + y_1y_3) - i2(y_2y_3 - y_0y_1) \\ 2(y_0y_2 + y_1y_3) + i2(y_2y_3 - y_0y_1) & -y_0^2 - y_3^2 + y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}$$

è a traccia nulla ed ha determinante uguale a -1 come $\mathbf{x}$. Perciò, posto $\mathbf{x} = \mathbf{s}^{-1}\sigma^3\mathbf{s}$, si ha la proiezione

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(y_0y_2 + y_1y_3) \\ x_2 &= 2(y_2y_3 - y_0y_1) \\ x_3 &= y_0^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2 \end{aligned}$$

attraverso la quale si opera il *pullback* di S^2 in S^3. Da questo ricoprimento di S^2 si può poi ottenere la Lagrangiana globale del sistema in $T(SU(2)) \times \mathbf{R}^1$.

Nel caso in cui gli oggetti da portare da Q a P non sono funzioni ma campi vettoriali, l'operazione a cui si ricorre è il *sollevamento* o *lift*. Posto $P = TQ$, si opererà il sollevamento di campi vettoriali su Q in campi vettoriali su TQ.

Sollevamento Verticale dei Campi

Se $\tau_Q : TQ \to Q$ è l'usuale proiezione canonica, si definisce *tangente di* τ_Q l'applicazione $T\tau_Q : T(TQ) \to TQ$ tale che dato un vettore $w \equiv ((q, \dot{q}), (v_1, v_2)) \in T(TQ)$, per ogni $(q, \dot{q}) \in TQ$, si ha $T\tau_Q(w) = (q, v_1)$. Quei campi $f^i(q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$ su TQ che sono nel $Ker(T\tau_Q)$ sono chiamati *campi verticali*. Si consideri allora il campo vettoriale X su Q e sia

$$\gamma : t \mapsto (q, \dot{q} + tX(q)) \tag{0.1}$$

il gruppo delle traslazioni $\mathbf{R} \times TQ \to TQ$ lungo la *fibra* di τ_Q[2]. Il generatore infinitesimale di questo gruppo di diffeomorfismi è il *sollevamento verticale* X^v di X, al quale è associata la mappa

$$X = f^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} \mapsto X^v = f^i(q)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

L'applicazione (0.1) mette in relazione TQ e $T(TQ)$; se indichiamo con v tale relazione, la composizione $v \circ T\tau_Q$ è un endomorfismo S di $T(TQ)$ che, nella base di TQ e $T(TQ)$, è espresso dal tensore $S = dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$.

1-forma di Connessione. I campi verticali sono quei campi di $T(TQ)$ che trovandosi nel $Ker(T\tau_Q)$, si proiettano in un solo punto di TQ. Lo spazio tangente a questa varietà deve ammettere quindi una decomposizione in una parte verticale e nel suo complemento orizzontale.

Connessione sul Fibrato Principale

Si consideri allora il *fibrato principale*[3] $P = TQ$, una *connessione* su TQ è un'unica separazione di $T(TQ)$ nei sottospazi *verticale* $V(TQ)$ ed *orizzontale* $H(TQ)$ tale che: (i) $T(TQ) = V(TQ) \oplus H(TQ)$; (ii) $\forall X \in T(TQ)$, $X = X^v + X^h$ con $X^v \in V(TQ)$ e $X^h \in H(TQ)$; (iii) i campi verticali lungo la fibra si proiettano in un solo punto di Q[4].

---

[1] [Mar2] p.30

[2] La fibra di τ_Q è l'insieme dei punti di TQ che si proiettano in un solo punto di Q. ([Mar3] p.37)

[3] Prendendo in considerazione la proiezione $\pi : P \to Q$, la varietà P è detta *fibrato principale* se, dati una collezione di aperti U_α che ricoprono lo *spazio di base* Q, un gruppo di Lie G che agisce su P, ed una varietà differenziabile F, la *fibra*, che si identifica con G e data la sezione $\sigma_\alpha : U_\alpha \times F \to P$, risulta che, $\forall x \in U_\alpha$ e $\forall y \in F$, $\pi \circ \sigma_\alpha(x, y) = x$, dove la collezione $U_\alpha \times F$ ricopre P. Una trattazione rigorosa riguardante l'argomento è riportata in [Aus] (pp.158-170).

[4] Questa condizione è formulata ingenuamente in riferimento alla figura 10.1 [Nak] (p.376). La condizione generale è data da $(Rg)^*H(TQ) = H(TQ) \cdot g$, dove $g \in G$ e $(Rg)^*$ è l'azione a destra ristretta ai campi orizzontali. Questa implica che esiste un isomorfismo che associa i campi orizzontali su TQ a campi vettoriali su Q ([Mar3] p.38).

L'isomorfismo tra i campi orizzontali su TQ ed i campi su Q [5], consente di costruire l'associazione

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \;\to\; \Big(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big)^{\uparrow} = \frac{\partial}{\partial q^i} + \mathbf{A}_j(q,s)\frac{\partial}{\partial s} \tag{0.2}$$

dove s parametrizza la fibra e non influisce sulla dinamica. Se si pone $\mathbf{A}_j(q,s) \equiv \mathbf{A}_j(q)s$[6], la precedente associazione da il campo

$$\Big(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big)^{\uparrow} = \frac{\partial}{\partial q^i} + A_j(q)s\frac{\partial}{\partial s}$$

da cui, svolgendo il cui commutatore $[(\frac{\partial}{\partial q^\mu})^{\uparrow}, (\frac{\partial}{\partial q^\nu})^{\uparrow}]$, si ha la relazione

$$\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial q^\mu}\Big)^{\uparrow}, \Big(\frac{\partial}{\partial q^\nu}\Big)^{\uparrow}\Big] - \Big[\frac{\partial}{\partial q^\mu}, \frac{\partial}{\partial q^\nu}\Big] = \Big(\frac{\partial}{\partial q^\mu}\mathbf{A}_\mu(q) - \frac{\partial}{\partial q^\nu}\mathbf{A}_\nu(q)\Big)s\frac{\partial}{\partial s}.$$

La mappa $X \mapsto X^{\uparrow}$ non consente di stabilire un omomorfismo tra algebre di Lie[7] ed, inoltre, i campi verticali non sono in generale una sottoalgebra invariante rispetto al sollevamento[8]. Se si considerano le funzioni definite su P che sono il pullback di funzioni f definite e differenziabili su Q, dalla condizione di proiettabilità $L_{X^{\uparrow}}\pi^*(f) = \pi^*(L_X f)$ risulta che i campi verticali Y sono tali che $L_Y\pi^*(f) = 0$, e quindi che i campi verticali formano un'algebra di Lie. Rispetto a queste stesse funzioni, dato il campo generico Z su P, si ha che $L_{[Z,Y]}\pi^*(f) = 0$, da cui si conclude che i campi verticali formano una sottoalgebra invariante.

Imponendo che la contrazione della 1-forma $\alpha = h(x,s)ds - \mathbf{B}_\mu(x,s)dx^\mu$, su $P \equiv \mathbf{R}^5$, con la base $\frac{\partial}{\partial s}$ del campo di fibra debba essere uguale a uno, si ha $h(x,s) = 1$, da cui richiedendo che α resti invariata per derivazione rispetto al campo $s\frac{\partial}{\partial s}$, si trova che $\mathbf{B}_\mu$ ha lo stesso comportamento di $\mathbf{A}_\mu$, che compare nell'espressione del campo sollevato. Questa equivalenza può essere verificata anche contraendo la forma α rispetto al campo $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^{\uparrow}$ ed uguagliando a zero; dal calcolo si ottiene $\mathbf{B}(x,s) = \mathbf{A}(x)s$[9].

La generalizzazione di α è la *1-forma di connessione*

$$\omega \equiv ds \otimes \frac{\partial}{\partial s} - \big(A_\mu(x)dx^\mu \otimes s\frac{\partial}{\partial s}\big)$$

che per definizione è la proiezione della varietà P nel suo sottospazio verticale.

---

[5] Vedi nota precedente.

[6] Si richiede che le A_j siano indipendenti da s o equivalentemente che la fibra sia indipendente dalle dilatazioni.

[7] Non si tratta di un omomorfismo poiché in generale $[\cdot,\cdot]^{\uparrow}$ non coincide con $[\cdot^{\uparrow},\cdot^{\uparrow}]$.

[8] Rispetto alla funzione differenziabile h definita su P, per il campo verticale Y e per il campo generico Z, si ha che $L_Z(L_Y h) = L_{[Z,Y]}h + L_Z(L_Y h)$ è in generale diverso da zero.

[9] Il procedimento è analogo a quello usato nella seconda parte di queste note [Rife *Dinamica*], dove la 1-forma *simplettica* α è contratta rispetto al campo Γ che esprime la dinamica.

Il Monopolo di Dirac. Sia Δ il generatore infinitesimale delle dilatazioni su TQ e sia la contrazione di S con il campo vettoriale Γ, tale che

$$S(\Gamma) = \Delta.$$

Dato che una dilatazione in TQ è una mappa $(q, \dot{q}) \mapsto (q, e^t \dot{q})$, risulta che $\Delta = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$ e così, dalla precedente equazione, si ha

$$\Big(dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\Big)(\Gamma) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

la cui soluzione è data dal campo

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \tag{0.3}$$

Una carica elettrica in moto nel campo magnetico generato da un monopolo magnetico[10] è descritta nello spazio $Q = \mathbf{R}^3 - \{0\}$ dalle equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \dot{x}^i \\ \frac{d\dot{x}^i}{dt} &= -\frac{e}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{eg}{4\pi m} \frac{\epsilon^i_{jk} x^j \dot{x}^k}{r^3} \end{aligned}$$

dove e, g e m sono rispettivamente la carica elettrica, quella magnetica e la massa della particella. Per il monopolo di Dirac la (0.3) si scrive

$$\Gamma = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{eg}{4\pi m} \frac{\epsilon_{ijk} x^j \dot{x}^k}{r^3} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}. \tag{0.4}$$

Siamo interessati ad una 2-forma F tale che $L_\Gamma F = i_\Gamma dF + d(i_\Gamma F) = 0$. Assumendo $F = dx^i \wedge d\dot{x}_i + \frac{eg}{8\pi m r^3} \epsilon_{ijk} x^i dx^j \wedge dx^k$, si mostra che questa è la 2-forma cercata[11] e che, data una opportuna 1-forma $A = A_i dx^i$, localmente ha espressione $F = dA$, da cui si ha la lagrangiana $\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_i \dot{x}^i - \dot{x}^i A_i$.

Al fine di trovare una lagrangiana globale, si consideri che il problema matematico legato al monopolo di Dirac è dato dal fibrato

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \rightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

[10] Il monopolo magnetico fu introdotto da Dirac nel tentativo di rendere simmetrica la teoria dell'elettromagnetismo, la quale, a causa del fatto che $div\mathbf{B} = 0$, non prevede l'esistenza della carica magnetica. Se si assume il campo di induzione magnetica $\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, in modo che la divergenza del campo di induzione magnetica puo' essere resa proporzionale alla funzione $\delta^3(\mathbf{r})$, allora le equazioni di Maxwell continuano a valere a livello globale, ed inoltre, solo in $r = 0$, ammettono localmente l'esistenza di una carica magnetica.

[11] [Mar2] pp.21-22 e, per le condizioni che F deve soddisfare, [Mar2] p.16

dove il gruppo di trasformazioni unitarie $U(1)$ ne è la fibra.

Riferendoci in particolare alla nota 3 e a quanto riportato fino ad ora, la 1-forma A_i è definita sul dato aperto $U_i \times F$ appartenente alla collezione $U_\alpha \times F$ che ricopre P e si ottiene dal pullback, mediante la restrizione a $U_i \times F$ della sezione σ_i, della 1-forma di connessione ω, ovvero $A_i = \sigma_i^* \omega$. La 1-forma A_i è definito localmente[12] e $\mathbf{A}_i$, che compare nel sollevamento dei campi, è il *potenziale di gauge*.

Potenziale di Gauge

Nel caso del monopolo di Dirac esistono due potenziali di gauge, $\mathbf{A}_u$ ed $\mathbf{A}_d$, relativi a due carte aperte di S^2, che in coordinate polari (θ, ϕ) sono

$$\begin{aligned} U_u &\equiv \{(\theta,\phi)|0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\} \\ U_d &\equiv \{(\theta,\phi)|\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}. \end{aligned}$$

Se si considera la curva φ in $U(1)$ che associa ad ogni ϕ un elemento di $U(1)$, si può porre $h = e^{i\varphi}$, da cui risulta che $A_u = h^{-1}A_d h + h^{-1}dh = A_d + id\varphi$[13].

In precedenza abbiamo accennato al fatto che una lagrangiana globale è ottenibile per pullback da S^2 a S^3. Dato che la lagrangiana della teoria elettromagnetica è esprimibile come $\mathcal{L} = \frac{1}{2} d\dot{x} \wedge dx - dA$, si vuole determinare la 1-forma A e questo può essere fatto mostrando che la trasformazione $\mathbf{s} \to e^{i\varphi\sigma^3}\mathbf{s}$, la quale lascia invariata la proiezione $x_i = Tr(\mathbf{s}^{-1}\sigma^3\mathbf{s}\sigma^i)$ da S^3 a S^2, rappresenta gauge per il sistema. Infatti, applicando $h = e^{i\varphi\sigma^3}$ a destra[14] nella 1-forma $\mathbf{s}^{-1}d\mathbf{s}$, questa diventa $(\mathbf{s}h)^{-1}d(\mathbf{s}h) = h^{-1}\mathbf{s}^{-1}[d\mathbf{s}h + \mathbf{s}dh]$ e moltiplicando entrambi per $i\sigma^3$, risolvendo il secondo membro si ha

$$\begin{aligned} &i\sigma^3(\mathbf{s}h)^{-1}d(\mathbf{s}h) = i\sigma^3 h^{-1}\mathbf{s}^{-1}d\mathbf{s}h + i\sigma^3 h^{-1}\mathbf{s}^{-1}\mathbf{s}dh = \\ &= i\sigma^3 h^{-1}\mathbf{s}^{-1}d\mathbf{s}h + i\sigma^3 h^{-1}dh = i\sigma^3 h^{-1}\mathbf{s}^{-1}d\mathbf{s}\; h + i\sigma^3 e^{-i\varphi\sigma^3} i\sigma^3 e^{i\varphi\sigma^3} d\varphi = \\ &\qquad = h^{-1} i\sigma^3 \mathbf{s}^{-1} d\mathbf{s}\; h - d\varphi. \end{aligned}$$

Risulta allora che $A = i\sigma^3\mathbf{s}^{-1}d\mathbf{s}$ e quindi la lagrangiana per la particella in moto nel campo di monopolo ha espressione

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_i\dot{x}^i + ni\mathrm{Tr}\sigma^3\mathbf{s}^{-1}\dot{\mathbf{s}}$$

con $n = \frac{eg}{8\pi m r^3}$, la quale è definita a meno di una derivata totale rispetto al tempo del parametro di fibra, ovvero si trasforma rispetto alla gauge $\mathbf{s} \to \mathbf{s}e^{i\varphi\sigma^3}$ come

$$\mathcal{L} \;\to\; \mathcal{L} + n\dot{\varphi}.$$

[12] Segue dal fatto che la restrizione della sezione è essenzialmente definita localmente.

[13] Si noti la somiglianza tra la corrispondente relazione vettoriale $\mathbf{A}_d \to \mathbf{A}_u = \mathbf{A}_d + \partial\varphi$ e la *trasformazione di gauge* $\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \partial\varphi$.

[14] L'applicazione a destra degli elementi della fibra su gli elementi di S^3, come richiesto nella nota 4, fa in modo che tutti i punti di S^3 appartenenti all'orbita ottenuta per azione del gruppo $U(1)$ si proiettano secondo π in un solo punto di S^2.

Teoria Yang-Mills. L'elettromagnetismo, e quindi il monopolo di Dirac, sono teorie di gauge abeliane, dato che la fibra è il gruppo commutativo $U(1)$. Per il moto di una particella nel campo Yang-Mills, il fibrato è

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \rightarrow & \mathbf{R}^{4+k} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbf{R}^4 \end{array}$$

quindi, dato che la fibra è costituita da un gruppo non commutativo, quella Yang-Mills è una teoria di gauge *non abeliana*.

Il punto di partenza della teoria originale è la conservazione dello spin isotopico, ovvero dei due possibili stati di carica che puo' possedere una particella in questa teoria. La conservazione di questa coordinata è paragonabile all'invarianza per rotazione rispetto ad $SU(2)$ della funzione di stato dipendente dalla coordinata di isospin[15]. Inoltre, l'associazione (0.2) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \;\rightarrow\; D_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{\uparrow} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \mathbf{A}^a_{b\mu} y^b \frac{\partial}{\partial y^a} \tag{0.5}$$

dove a e b sono indici relativi a gradi di libertà interni, da cui, svolgendo il commutatore $[D_\mu, D_\nu]$, si ha

$$[D_\mu, D_\nu] - [\partial_\mu, \partial_\nu] = (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^a_b \; y^b \frac{\partial}{\partial y^a} + (\mathbf{A}^a_{s\mu}\mathbf{A}^s_{b\nu} - \mathbf{A}^s_{b\nu}\mathbf{A}^a_{s\mu}) \; y^b \frac{\partial}{\partial y^a}. \tag{0.6}$$

Preso $T \in SU(2)$, la trasformazione di gauge $A' = T^{-1}AT + T^{-1}dT$ è data in analogia al caso del monopolo, così dato che deve valere una relazione analoga a $F = dA$, bisogna trovare un tensore $F_{\mu\nu}$ che si trasformi come $F'_{\mu\nu} = T^{-1}F_{\mu\nu}T$. Tenendo in considerazione la (0.6), si definisce $F = dA + A \wedge A$, ovvero

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) + (\mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu - \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\mu)$$

che si trasforma secondo la precedente relazione per trasformazioni di gauge del potenziale.

Come è risultato dal monopolo, una volta trovate le equazioni del moto sullo spazio di base ed eseguito il pullback di queste sul fibrato principale, è possibile scrivere una lagrangiana che risulta essere definita a meno di una trasformazione di gauge nel parametro di fibra.

[15] Nel processo di interazione tra nucleoni in cui le interazioni elettromagnetiche sono trascurate, lo scambio contemporaneo di neutroni e protoni non comporta alcuna variazione nello stato del sistema.