Note di Teoria dei Campi - ver.0.1

L. Cimmino (cimmino@na.infn.it)

2 marzo 2006

Parte Seconda - Dinamica

Calcolo delle Variazioni. Sia $\Gamma[a, b]$ l'insieme di tutte le curve differenziabili almeno una volta e sia $F : \Gamma[a, b] \to \mathbf{R}$ il funzionale definito dall'integrale $F_\alpha(\gamma) = \int_\gamma \alpha$, con α forma differenziale generica. Il *principio variazionale* permette di determinare i punti critici di F, o i suoi cammini estremali, dove questi sono calcolati imponendo che il differenziale del funzionale F si annulli lungo il cammino γ, ovvero $(dF)(\gamma) = 0$.

Il calcolo delle variazioni di F, dipendendo da funzioni soggette a vincoli, i cui argomenti sono fatti variare infinitesimamente insieme al funzionale[1], ci fornisce le equazioni di Eulero-Lagrange.

Sia Q, lo *spazio delle configurazioni*, un opportuno sottoinsieme di $\mathcal{M}$ e sia il suo spazio tangente TQ, detto *fibrato tangente*, costituito dalle coppie $(q(t), \dot{q}(t))$, dove le q^i sono le *coordinate lagrangiane* del sistema[2]. L'integrale temporale S, o *azione*, ha per integrando la funzione $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$ definita sulla varietà $TQ \times \mathbf{R}$. L'applicazione del *principio di minima azione*, una volta assegnata la *Lagrangiana* $\mathcal{L}$ del sistema dinamico, ci consente di scrivere le equazioni Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \tag{0.1}$$

dove queste sono tali in corrispondenza della curva che rende minima l'azione. Da queste equazioni si determinano le forze a cui è soggetto il sistema descritto dalla Lagrangiana $\mathcal{L}$[3].

Il problema inverso al calcolo delle variazioni consiste allora nell'ottenere una descrizione Lagrangiana del sistema dinamico, a partire dalle soluzioni di date equazioni differenziali del secondo ordine, riferite a moti estremali nello spazio delle configurazioni[4].

---

[1] [Land] pp.27-30

[2] Lo spazio delle configurazioni è caratterizzato dai vincoli a cui è soggetto il sistema. L'applicazione che consente di determinarlo è $i^{-1} : \mathcal{M} \to Q$, dove i è per definizione l'applicazione *immersione.*

[3] Le equazioni Eulero-Lagrange (0.1) sono equivalenti elle equazioni del moto di Newton. [Mar] pp.83-85

[4] Il problema inverso consente di determinare la Lagrangiana del sistema dinamico quando sono noti i campi di forza a cui è soggetto il sistema.

Operando un cambiamento di variabili[5], si riscrive F come

$$F_\alpha(\gamma) = \int_{t_0}^{t} \gamma^*(\alpha)$$

dove $[t_0, t]$ è l'insieme dei punti su cui sono definite le γ e la valutazione dell'integrale avviene su tutte le curve definite in questo intervallo. Se la γ^* si comporta come applicazione sulle forme differenziali, allora si può valutare l'azione come integrale temporale. Nel formalismo lagrangiano indipendente dal tempo, l'azione $S_{\mathcal{L}}$ è data dall'integrale

$$S_{\mathcal{L}}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q})dt. \tag{0.2}$$

Considerando l'energia

$$E_{\mathcal{L}} = \dot{q}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}.$$

ed assumendo che essa si conservi su ogni singola curva, una volta fissate le condizioni iniziali risulta che

$$S_{\mathcal{L}}(\gamma) = \int_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)dq - E_{\mathcal{L}}dt$$

la quale esprime la (0.2) nel formalismo simplettico. Applicando il teorema di Stoke[6] alla differenza $S_{\mathcal{L}}(\gamma) - S_{\mathcal{L}}(\gamma)$, dove la superficie σ racchiusa tra le due curve su TQ è infinitesima, si ha

$$S_{\mathcal{L}}(\gamma) - S_{\mathcal{L}}(\gamma') = \int_\sigma \left[d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \wedge dq - dE_{\mathcal{L}} \wedge dt\right].$$

e tenendo presente che il flusso attraverso la superficie infinitesima è calcolato contraendo la forma differenziale con il campo vettoriale Γ che esprime la dinamica, e che la differenza precedente rappresenta il differenziale di S, che quindi nel nostro problema va uguagliato a zero, si ha

$$\left[d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \wedge dq - dE_{\mathcal{L}} \wedge dt\right](\Gamma) = 0$$

che rappresentano le equazioni Eulero-Lagrange sul fibrato tangente TQ. Posto che $\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + X$, dove $X = b_j\frac{\partial}{\partial q_j} + a_j\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}$ è un campo vettoriale arbitrario nella base di TM[7], ed eseguendo la contrazione rispetto al campo Γ, si ha

$$\left[d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \wedge dq - dE_{\mathcal{L}} \wedge dt\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + X\right) =$$
$$= -d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \wedge dq(X) + d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)(X)dq + dE_{\mathcal{L}} - dE_{\mathcal{L}}(X)dt = 0.$$

---

[5]Si passa dalle coordinate lagrangiane alle coordinate canoniche attraverso la *trasformata di Legendre* $FL : TM \to TM^*$, con $M = TQ$ ed $M^* = T^*Q$. In questo modo ad ogni γ in TQ è associata una γ^* in T^*Q. In T^*Q, *il fibrato cotangente*, è fissato il sistema di coordinate canoniche (q^h, p_h), dove p_h è il momento cinetico coniugato a q^h.

[6]Data una varietà orientata $\mathcal{M}$ ed una forma differenziale ω su essa, il teorema di Stoke asserisce che $\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$.

[7]I vettori $\left(\frac{\partial}{\partial q_j}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ tangenti alle curve su TQ sono una base per $T(M \times \mathbf{R})$.

La condizione enunciata in precedenza riguardante la conservazione dell'energia $E_{\mathfrak{L}}$, coincide con la condizione $dE_{\mathfrak{L}}(X) = 0$, da cui si ha

$$\left[d\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}}\right) \wedge dq\right](X) = -dE_{\mathfrak{L}} \tag{0.3}$$

o equivalentemente $i_X d\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}}\right) \wedge dq = -dE_{\mathfrak{L}}$. Posto $p = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}}$ ed introdotta una funzione $H = H(p, q, t)$ tale che[8]

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned} \tag{0.4}$$

la (0.3), mediante le proprietà della contrazione[9], diventa

$$i_X dp \wedge dq = \frac{dp}{dt}dq - dp\frac{dq}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp\right).$$

e poiché l'ultimo membro rappresenta il differenziale di H, risulta che H è in relazione con l'energia $E_{\mathfrak{L}}$. La funzione $H(p, q, t) = p_i\dot{q}^i - \mathfrak{L}(q, \dot{q}, t)$ è la funzione *Hamiltoniana* del sistema dinamico[10].

Teorema di Noether

Formalismo Hamiltoniano. Sia $A = (A_j)$ il generatore infinitesimale di un gruppo di simmetria per il sistema dinamico descritto dalla lagrangiana $\mathfrak{L}$. Le equazioni (0.1), moltiplicate per le funzioni A_j, danno luogo a

$$A_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^j}\right) = \frac{d}{dt}\left(A_j\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^j}\right) + \frac{dA_j}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^j} - A_j\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^j} = 0$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}\left(A_j\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^j}\right) = -\frac{dA_j}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^j} + A_j\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^j} = \left(A_j\frac{\partial}{\partial q^j} - \dot{A}_j\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)\mathfrak{L}.$$

Se i secondi membri di queste equazioni si annullano, allora le grandezze $A_j\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^j}$ sono conservate, oppure se sono la derivata totale rispetto a t di una funzione F, le grandezze conservata sono $A_j\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^j} - F$. In pratica, l'invarianza per gruppi di trasformazione della lagrangiana del sistema implica l'esistenza di grandezze che risultano conservate lungo le curve integrali.

[8] Le equazioni (0.4) sono dette equazioni di Hamilton e rappresentano le equazioni del moto per un sistema Hamiltoniano.

[9] $i_X df \wedge dg = (i_X df)dg - df(i_X dg)$ ed $i_X df = \frac{df}{dt}$.

[10] [Land] pp.193-195

Nel formalismo Hamiltoniano, le parentesi di Poisson (usate nella prima parte per definire il campo tensoriale $\Lambda(df, dg) = \{f, g\}$) possono essere scritte a partire dalle equazioni di Hamilton; tenendo presente che la derivata totale rispetto a t è

$$\frac{d}{dt} = \frac{dq}{dt}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial}{\partial p}$$

si ha

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}.$$

Teorema di Noether Hamiltoniano

Quindi, date due funzioni f e g differenziabili su M^*[11], risulta che le parentesi di Poisson sono espresse dalla relazione

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

attraverso la quale, ponendo $g = H$, si definisce il tensore di Poisson $\Lambda(df) = i_\Lambda df$, ovvero

$$\{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{df}{dt}. \tag{0.5}$$

Se f, tale che $df \neq 0$ $\forall x \in M^*$, è costante lungo ogni curva integrale $\gamma(t)$ del campo Λ, allora per definizione f è un integrale primo. La grandezza fisica espressa da f è conservata lungo le curve integrali di Λ se e solo se $\Lambda(df) = 0$. Così, usando la definizione di derivata di Lie data nella precedente parte, si ha $L_{X_f}H = 0$, dove X_f è il generatore infinitesimale del gruppo di trasformazioni $\phi : \mathbf{R} \times M^* \to M^*$ nelle coordinate $X^j = \frac{\partial f}{\partial p_j}$ e $X_j = -\frac{\partial f}{\partial q^j}$. Questo implica che $H(x) = H(\phi_t(x))$ e quindi che ϕ un gruppo di simmetria per H, da cui è verifica l'equivalenza tra simmetrie e grandezze conservate.

La teoria Hamiltoniana, almeno per come è stata precedentemente sviluppata, risulta dipendere da quella Lagrangiana. Questa derivazione è fondata sulla definizione data di momento p associato a canonicamente a q. Contrariamente, la possibilità di una teoria Hamiltoniana autoreferenziale ci è fornita dal fatto che l'esistenza di M^* è invece indipendente da TQ.

Riferendoci alla [Dir] *Lecture No. 1* di Dirac, se si assume che le quantità di moto sono funzioni non indipendenti delle velocità, allora esistono m relazioni $\phi_j(q, p) = 0$, conseguenza della definizione $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$, che costituiscono il sistema di *vincoli principali* a cui è soggetto il sistema dinamico. Risulta inoltre per la (0.5) che $\dot{\phi}_j = \{\phi_j, H\}$, essendo questi vincoli funzioni delle coordinate e dei momenti.

Per quanto riguarda le equazioni del moto, le n equazioni differenziali del secondo ordine della meccanica Lagrangiana si trasformano nel sistema di $2n$ equazioni (0.4) del primo ordine. Differenziando la Lagrangiana $\mathcal{L}$ si ha il passaggio da TQ a T^*M, il quale può essere considerato come TM^*. Inoltre

[11] M^* è lo spazio delle fasi.

la presunta relazione tra $E_{\mathcal{L}} = \dot{q}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \mathcal{L}$ ed H, accennata qualche riga sopra, è data da $(fl)^*H = E_{\mathcal{L}}$, intendendo che H non è comunque univocamente determinata, ovvero possiamo aggiungere ad essa qualunque funzione λ^j che non dipenda dalle q o dalle p moltiplicata per i vincoli, ottenendo lo stesso valore di energia. Così, il differenziale di $\mathcal{L}$ risulta essere la composizione dell'applicazione $fl : M \to M^*$, che si può ritenere il prototipo della trasformata di Legendre FL, e del campo Γ^* che esprime la dinamica nella base di TM^*[12].

Consideriamo allora $H = H_0 + \lambda^j\phi_j$, da cui si derivano le equazioni

$$\{\phi_j, H_0\} + \lambda^k\{\phi_j, \phi_k\} = 0. \tag{0.6}$$

Se risulta che $\phi_k \approx 0$[13] e se queste equazioni sono indipendenti dai vincoli principali allora possono ridursi a sistema di equazioni nella forma

$$\chi(q,p) = 0 \tag{0.7}$$

che sono indipendenti dalle λ^j. Le (0.7) rappresentano i *vincoli secondari* del sistema. Si ha così il sistema di equazioni

$$\{\chi_i, H_0\} + \lambda^k\{\chi_i, \phi_k\} = 0 \tag{0.8}$$

che con le (0.6) individua la superficie vincolare su cui si muove il sistema.

Senza scendere nel dettaglio[14], le (0.6) e le (0.8)consentono di scrivere le equazioni del moto nella forma

$$\tfrac{d}{dt}g(q,p) \approx \{g, H\} - \{g\,\chi_r\}C_{rs}\{\chi_s, H\} \tag{0.9}$$

detta *parentesi di Dirac*, dove $C_{rs} = \{\chi_r, \chi_s\}$. Risulta che, una volta fissate le condizioni iniziali ed i vincoli, queste equazioni esprimono la dinamica come nel formalismo Lagrangiano la esprimono le equazioni Eulero-Lagrange.

Parentesi di Poisson. Le parentesi di Poisson sono un oggetto matematico indipendente dal formalismo Hamiltoniano, che come detto nella prima parte di queste note, sono una realizzazione delle parentesi di Lie, perciò godono delle relazioni (0.3)-(0.7) [Rife *La Struttura dello Spazio-Tempo*]. Se $\mathcal{M}$ è una varietà di dimensione n qualsiasi[15] ed $\mathcal{E}$ è l'insieme delle funzioni su $\mathcal{M}$, allora si definisce parentesi di Poisson l'applicazione

$$\{,\} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}.$$

[12]Questa affermazione può ritenersi ragionevole, dal momento che i vincoli primari, annullandosi su fl, fanno scomparire i termini λ^j, preservando così la struttura di algebra di Lie di TM^*, ovvero facendo in modo che l'immagine di fl appartenga al grafico di Γ^*.

[13]Con $\approx$ intendiamo che i vincoli sono quantità evanescenti.

[14]Una trattazione completa dell'argomento riguardante la [Dir] *Lecture No. 1* è fornita in [Sud] pp.91-107.

[15][Mar] p.45

Fissato un sistema di coordinate locali $\xi_1, \ldots, \xi_n$ possiamo esprimere un generico campo tensoriale bi-controvariante, ovvero a due indici nella base di $T\mathcal{M}$

$$\Lambda \equiv \{\xi_j, \xi_k\} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_k}. \tag{0.10}$$

Le parentesi di Poisson sono così legate a campi bi-vettoriali. Questa affermazione è motivata attraverso il lavoro di Jost [Jos], che possiamo provare a sintetizzare nel modo seguente.

Campo Vettoriale Controvariante

Per definizione un operatore L definito sull'anello $\mathcal{E}$ è un campo vettoriale controvariante, se soddisfa a

$$\begin{aligned}
&L(f) \in \mathcal{E} per f \in \mathcal{E} \\
&L(f+g) = L(f) + L(g) \\
&L(f \cdot g) = f \cdot L(g) + L(f) \cdot g \\
&L(c) = 0.
\end{aligned}$$

L'insieme dei campi vettoriali controvarianti in un dato punto p di $\mathcal{M}$ definisce lo spazio tangente alla varietà nel punto p. Dato un intorno cubico di un dato $p \in \mathcal{M}$, di coordinate locali $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, dalle le precedenti proprietà si ha che

$$L(f)(q) = \sum_k a^k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^k} f(\xi).$$

dove q è un punto appartenente all'intorno[16]. Infine, due campi vettoriali L_1 ed L_2 definiscono ancora un campo vettoriale $[L_1, L_2](f) = L_1(L_2(f)) + -L_2(L_1(f))$, e dato che vale anche l'identità di Jacobi, l'insieme dei campi vettoriali controvarianti $\mathfrak{L}$ ha struttura di algebra di Lie.

Una forma lineare $\omega : \mathfrak{L} \to \mathcal{E}$ che soddisfa a

$$\begin{aligned}
&\omega(L) \in \mathcal{E} \\
&\omega(L_1 + L_2) = \omega(L_1) + \omega(L_2) \\
&\omega(cL) = c\omega(L)
\end{aligned}$$

è per definizione un campo vettoriale covariante. L'insieme di questi campi è lo spazio lineare $\mathfrak{B}$. Una forma lineare λ su $\mathfrak{B}$ a valori in $\mathcal{E}$ determina un unico campo vettoriale controvariante L tale che $L(f) = \lambda(df)$. Da quanto detto segue la definizione del tensore $\Lambda(df, dg)$ data nella prima parte, che quindi in coordinate locali risulta essere espressa attraverso la (0.10)

[16] Per [Jos] *Lemma 1* (p.572) dato un sistema di coordinate locali nel punto p, ogni funzione $f(q) = f(\xi)$ (si sta scrivendo impropriamente la f riferita alle coordinate locali) ammette nel dato intorno di p l'espansione $f(q) = f(p) + \Sigma_k \xi^k \partial_k f(0)$.

da $\{f,g\}(q) = \Sigma_{k,l}\{\xi^k,\xi^l\}\partial^k f \wedge \partial^l g$. Contraendo la (0.10) con il volume $d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge q\xi_3$ si ha la 1-forma

$$\alpha = \{\xi_i,\xi_j\}\tfrac{\partial}{\partial\xi_i} \wedge \tfrac{\partial}{\partial\xi_j}(d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge q\xi_3) = \epsilon^{ijk}\{\xi_i,\xi_j\}d\xi_k.$$

In riferimento alla linea espositiva adottata, sembrerebbe che la possibilità di usare le parentesi di Poisson sia limitata a spazi di dimensione pari. Al fine di mostrare che attraverso le parentesi di Poisson si può esprimere la dinamica di sistemi che non sono riferibili necessariamente a spazi di dimensione pari, prendiamo in considerazione una particella di spin $\frac{1}{2}$ immersa in un campo magnetico $\overrightarrow{B}$.

Se consideriamo gli operatori $X_{S_i} = \epsilon_{ijk}S_k\partial_j$, questi definiscono tre campi controvarianti, da cui otteniamo i campi tensoriali 2-volte controvarianti

$$X_{S_i} \wedge X_{S_j} = \epsilon_{ijk}S_k\left(\tfrac{\partial}{\partial S_i} \wedge \tfrac{\partial}{\partial S_j}\right) = \{S_i,S_j\}\tfrac{\partial}{\partial S_i} \wedge \tfrac{\partial}{\partial S_j}$$

così, ponendo l'Hamiltoniana $H = \mu\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{B}$, si hanno le equazioni del moto

$$\dot{S}_i = \{H,S_i\} = \textstyle\sum_{ab}\{S_a,S_b\}\tfrac{\partial H}{\partial S_a} \wedge \tfrac{\partial S_i}{\partial S_b} =$$
$$= \mu\epsilon_{kij}S_jB_k\tfrac{\partial S_k}{\partial S_k} \wedge \tfrac{\partial S_i}{\partial S_i} + \mu\epsilon_{jik}S_kB_j\tfrac{\partial S_j}{\partial S_j} \wedge \tfrac{\partial S_i}{\partial S_i} = \mu\textstyle\sum_{jk}\epsilon_{ijk}S_jB_k.$$