Note di Teoria dei Campi - ver.0.2

L. Cimmino (cimmino@na.infn.it)

9 giugno 2006

Parte Prima - La Struttura dello Spazio-Tempo

Sistemi di Riferimento. La realtà sensibile è rappresentata su una varietà quadridimensionale $\mathcal{M}$[1], stabilendo una procedura che ad ogni evento associa una quadrupla (x, y, z, t) in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$. Così, è nota la posizione spazio-temporale di un dato sistema quando sono note le sue coordinate.

La coordinazione è un concetto familiare, che non risulta essere ben definito se non viene specificato in riferimento a cosa il sistema è osservato[2]; una nozione di sistema di riferimento, anche se minimale, è data come insieme di oggetti mutuamente in quiete. La traiettoria, o *linea di universo*, è descritta dal vettore posizione $x^\mu(s)$, dove s è un parametro che ha lo stesso ruolo che ha t in dinamica newtoniana. Se si considera una particella libera, la sua traiettoria, nel dato sistema di riferimento, è soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2 x^\mu(s)}{ds^2} = 0. \tag{0.1}$$

Sistema di Riferimento

La traiettoria è invariante per il gruppo delle traslazioni, così il sistema di linee ottenute per azione del gruppo è soluzione per il campo vettoriale X[3]. Introducendo la 1-forma $\alpha = gdf$, invariante per lo stesso gruppo, che individua una foliazione trasversale alle soluzioni di X, possiamo definire la famiglia di sistemi di riferimento inerziali[4] (X, α) associato all'osservatore $R = X \otimes \alpha$. Assumeremo che ogni osservatore riconosce ad ogni tempo l'esistenza di un qualunque altro osservatore; dati (X, α) e (X', α'), questa

[1] Una varietà $\mathcal{M}$ è definita come l'insieme dei punti di uno spazio euclideo n-dimensionale tali che, data la famiglia $\mathcal{E}$ di s funzioni $f_1, f_2, ..., f_s$ differenziabili in intorni aperti, tutte si annullano contemporaneamente in ogni punto di $\mathcal{M}$. Intuitivamente una varietà è, nel caso presente, una iper-superficie immersa in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$.

[2] Va precisato che i processi fisici avvengono indipendentemente dal avere fissato o meno un riferimento.

[3] Un campo vettoriale è una applicazione che ad ogni punto x della varietà $\mathcal{M}$ associa un vettore $X_x \in T_x\mathcal{M}$.

[4] Il concetto di sistema di riferimento inerziale equivale alla richiesta che in ogni punto dello spazio-tempo del dato sistema di riferimento, la misura operativa della forza che complessivamente agisce sulla particella è nulla.

condizione di esistenza inter-soggettiva equivale a porre che, $\forall x, x' \in \mathcal{M}$, $\alpha(x') \neq 0$ e $\alpha'(x) \neq 0$[5].

Scegliendo l'evoluzione temporale positiva lungo i campi X, si possono imporre le *condizioni di causalità*

$$\alpha(x') > 0$$
$$\alpha'(x) > 0$$

che ci consentono di trovare le trasformazioni che ci consentono di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un'altro.

A partire da questo punto consideriamo il sistema di coordinate $x^\mu = (x^0 \equiv ct, x^i)$, dove alla prima coordinata è associata la componente temporale del vettore ed alle restanti le componenti spaziali[6]; le condizioni di causalità possono essere espresse dalla condizione $dx^0/d(x^0)' > 0$. Dalla gamma di possibili trasformazioni, che consentono di passare da un sistema all'altro, devono essere escludere quelle che ruotano il sistema di riferimento, scambiando tra loro asse temporale e asse spaziale. Inoltre, dato che $\mathcal{M}$ è diffeomorfo a $\mathbf{R}^4$, risulta che ogni sistema di riferimento inerziale è diffeomorfo ad ogni altro. Il gruppo di trasformazioni che si cerca è un sottogruppo del gruppo lineare $GL(4)$ che non contiene le rotazioni rispetto ai piani spazio-temporali.

Trasformazioni di Lorentz

Se si impone la conservazione dei volumi, allora il gruppo cercato è $SL(4)$, ma poiché bisogna tenere in considerazione le *condizioni di causalità*, allora non può accadere che $x^2 = a_0 x^{0^2} + a_1 x^{1^2} + a_2 x^{2^2} + a_3 x^{3^2}$ con $a_\mu > 0, \mu = 0, 1, 2, 3$. Così, posto $a_0 = -a_i = 1$, definiamo le *trasformazioni di Lorentz* come le trasformazioni che lasciano invariante $x^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2}$. I vettori che si trasformano secondo il gruppo omogeneo di Lorentz sono detti *quadrivettori*.

Definizione di Gruppo

Nozioni di Teoria dei Gruppi. Un gruppo G è un insieme di elementi, tra i quali è data una nozione di prodotto, tali che $\forall g, g', g'' \in G$

$$\begin{aligned}
& gg' \in G \\
& (gg')g'' = g(g'g'') \\
& \exists e \in G : eg = ge = g \\
& \exists g^{-1} \in G : g^{-1}g = gg^{-1} = e.
\end{aligned}$$

Inoltre, G è *commutativo* se vale anche la proprietà $gg' = g'g$, $\forall g, g' \in G$. Per un gruppo G non commutativo, l'insieme $Z(G)$ degli elementi g_0

[5]Si ha che il campo vettoriale di ciascuno riferimento, non è nel nucleo della 1-forma associata all'altro riferimento. Intuitivamente, le condizioni sono equivalenti a richiedere che le linee d'universo di ciascuno osservatore non siano nel piano di simultaneità dell'altro, ovvero, impongono che ciascuno osservatore non percepisca l'altro in stato di riposo.

[6]Indichiamo il vettore spaziale con l'indice latino ($i = 1, 2, 3$) ed il vettore che comprende anche la componente temporale con l'indice greco ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

appartenenti a G tali che $g_0 g = g g_0$ $\forall g \in G$, si dice *centro di* G; $Z(G)$ è un sottogruppo commutativo di G.

Dato un sottogruppo H di G si dicono *classe laterale destra* e *sinistra* del gruppo G rispetto ad H, rispettivamente gli insiemi Hg e gH formati dagli elementi hg e gh, $\forall h \in H$ e $g \in G$. H è un divisore normale di G se $gH = Hg$, $\forall g \in G$ e G/H si dice gruppo quoziente di G rispetto al sottogruppo normale H.

Gruppi di Lie

Se il gruppo G è uno spazio di Hausdorff[7] e se le funzioni $g \mapsto g^{-1}$ e $(g,h) \mapsto gh$ sono continue su G, $\forall g,h \in G$, allora G è un *gruppo topologico.* Un gruppo topologico G è un *gruppo di Lie* se l'insieme G è una varietà analitica e la funzione $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ è differenziabile su G.

Gruppi di Trasformazioni. Dato un insieme E arbitrario, diremo che ogni applicazione biunivoca di E in se stesso è una *trasformazione.* L'insieme $G(E)$ di tutte le trasformazioni su E è un gruppo ed ogni suo sottogruppo è un *gruppo di trasformazioni* di E.

Gruppo di Trasformazioni di Galilei

Le trasformazioni di Galilei, come è noto dalla dinamica classica, mappano le coordinate di un punto (t, x_1, x_2, x_3) in un dato sistema di riferimento inerziale nelle coordinate (t, x_1', x_2', x_3') in un altro sistema inerziale. Da un punto di vista generale le trasformazioni di Galilei non sono da riferirsi ai soli cambiamenti di riferimento[8], esse formano un gruppo che comprende le traslazioni temporali $t \to t + \tau$, le traslazioni spaziali $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x} + \overrightarrow{\xi}$, i boost $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v} t$ e le rotazioni nello spazio euclideo 3-dimensionale $\overrightarrow{x} \to A\overrightarrow{x}$, che possono essere rispettivamente riscritte in forma compatta come $(\tau, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}, I)$, $(0, \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{0}, I)$,$(t, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v}, I)$ e $(0, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}, A)$.

Il generico elemento $g = (\tau, \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{v}, A)$ del gruppo di Galilei è dato dalla composizione[9] di queste trasformazioni, che definiscono i sottogruppi del gruppo di Galilei; risulta che la dimensione del gruppo è pari a 10. L'elemento neutro del gruppo è dato da $e = (0, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}, I)$ e risulta che $g^{-1} = (\tau, -A\overrightarrow{\xi} + \tau A\overrightarrow{v}, -A\overrightarrow{v}, A^{-1})$. Dato che la legge di composizione si applica con continuità nel gruppo di Galilei, esso, dalla definizione data in precedenza, è un gruppo di Lie[10].

In dinamica Galileiana accade che il tempo si trasforma linearmente nel passaggio tra due sistemi di riferimento inerziali, che è coerente col fatto che gli osservatori misurano simultaneamente lo stesso tempo. Invece, seguente al fatto che x^2 è invariante, in dinamica relativistica il tempo si trasforma

[7]Uno spazio di Hausdorff è uno spazio topologico in cui ogni coppia di punti è tale che esiste sempre una coppia di intorni disgiunti.

[8]Si tratta di trasformazioni passive, quindi limitate alle traslazioni spaziali ed alle rotazioni.

[9]La legge di composizione tra due elementi del gruppo è data dalla relazione $gg' = (\tau, \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{v}, A)(\tau', \overrightarrow{\xi'}, \overrightarrow{v'}, A') = (\tau + \tau', A\overrightarrow{\xi'} + \overrightarrow{\xi} + \overrightarrow{v}\tau', A\overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v}, AA')$.

[10]Il fatto che il gruppo è una varietà analitica è non banale ed esula dagli scopi di queste note.

secondo le trasformazioni di Lorentz. Questo comporta che al fine di preservare l'invarianza della norma dei quadrivettori, due osservatori hanno orologi propri indipendenti.

Gruppo di Trasformazioni di Lorentz

Indichiamo con L il generico elemento appartenente a gruppo di trasformazioni di Lorentz. L è una matrice che trasforma il vettore x nel vettore $x' = Lx$ e che lascia invariante il prodotto scalare tra vettori. Si ha, da questa proprietà, che $L^T GL = G$[11] da cui segue che $|L| = \pm 1$.

Le categorie di trasformazioni comprese dal gruppo di Lorentz sono le rotazioni ($L_0^0 = 1, L_i^0 = 0, L_0^k = 0$ e $|L| = +1$), i boost L_v ($L_0^0 \geq 1$ e $|L| = +1$), le riflessioni spaziali L_P ($L_0^0 = 1, L_i^0 = 0, L_0^k = 0$ e $|L| = -1$) e temporale L_T ($L_0^0 \leq 1$ e $|L| = -1$)[12]. I boost sono in effetti rotazioni spazio-temporali ed appartengono alla stessa classe delle rotazioni, poiché entrambe hanno $L_0^0 \geq 1$ e $|L| = +1$, ovvero sono *trasformazioni ortocrone positive*; inoltre, nel caso in cui v, che è un parametro da ritenere come l'usuale velocità, sia molto più piccolo di c, allora L_v si riduce ai boost Galileiani. Le rotazioni ed i boost, insieme, formano il gruppo delle trasformazioni di Lorentz *omogenee proprie*, il cui generico elemento indicheremo con L.

La forma maggiormente adoperata per rappresentare il passaggio tra sistemi di riferimento inerziali è data, per il piano $x_0 - x_1$, dalle equazioni

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - vx_1/c) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - vx_0/c) \end{aligned}$$

o in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La natura di rotazioni (*iperboliche*) dei boost si manifesta sostituendo $\beta = \tanh\zeta$, ottenendo così

$$L_v = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta & 0 & 0 \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove il *parametro di rapidità* ζ varia tra $-\infty$ e ∞.

[11] L'espressione invariante $x^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2}$ è riscritta come $x^2 = x_\mu x^\mu$, dove la relazione tra le componenti *covarianti* x_μ e quelle *controvarianti* x^μ è espressa per mezzo della matrice G, di componenti $g_{\mu\nu}$ tali che $g_{00} = -g_{ij} = 1$ per $i = j$ e $g_{\mu\nu} = 0$ per $\mu \neq \nu$, dalla relazione $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\mu$. Quindi risulta $x^2 = (x, Gx)$ e dato che $x^2 = x'^2 = (Lx, Lx)$, si ha $(Lx, Lx) = (x, Gx)$.

[12] Le riflessioni sono trasformazioni improprie ($|L| = -1$) che non formano un sottogruppo del gruppo di Lorentz.

Il gruppo di Lorentz non omogeneo è l'insieme delle trasformazioni $\mathfrak{L}$ ottenute come prodotto tra una trasformazione di Lorentz omogenea propria L ed una traslazione T. Quindi $x' = \mathfrak{L}x = Lx + a$, con $\mathfrak{L} = (a, L)$ che lascia invariata $(x-y)^2 = (x_0-y_0)^2 + (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2$. La legge di composizione è espressa mediante la relazione $x' = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 x = L_1L_2x + (a_1 + L_1a_2)$, mentre l'elemento inverso di $\mathfrak{L}$ è rappresentato da $\mathfrak{L}^{-1} = (-L^{-1}a, L^{-1})$; il gruppo ha dimensione 10. *Gruppo di Trasformazioni di Poincaré*

Consideriamo, ora, il gruppo di Lie G e fissiamo una corrispondenza biunivoca tra gli elementi del gruppo appartenenti ad un intorno dell'elemento neutro e ed i punti dello spazio euclideo n-dimensionale. Siano $a, b, c \in G$ e siano $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ le coordinate euclidee rispettivamente associate ad ognuno di loro. La *legge di composizione* del gruppo $ab = c$ è espressa dalle relazioni $\gamma^j = f^j(\alpha, \beta)$, dove le n funzioni f^j sono differenziabili. Una applicazione continua e differenziabile $\phi : \tau \to a(\tau)$, tale che $a(\sigma)a(\tau) = a(\tau)a(\sigma) = a(\sigma+\tau)$, è un insieme di trasformazioni ad un parametro di G in se stesso, al variare di σ in tutto $\mathbf{R}$.[13] Dato che la composizione degli elementi dell'insieme corrisponde alla somma dei parametri, l'insieme forma rispetto alla composizione un gruppo abeliano, che è sottogruppo di G. *Gruppo di Trasformazioni ad un Parametro*

Differenziando l'equazione $c(ab) = (ca)b$, che esprime la proprietà associativa, rispetto a c nel sistema di coordinate assegnato, si ottiene il sistema di equazioni differenziali[14]

$$\frac{\partial f^j(c, ab)}{\partial \gamma^k} = \frac{\partial f^j(ca, b)}{\partial \delta^l}\frac{\partial f^l(c, a)}{\partial \gamma^k}$$

dove con δ^l si sono indicate le coordinate del elemento ca.

Sostituendo $c = e$ si ha

$$\left(\frac{\partial f^j(e, ab)}{\partial \gamma^k}\right)_{\gamma=0} = \frac{\partial f^j(a, b)}{\partial \alpha^l}\left(\frac{\partial f^l(e, a)}{\partial \gamma^k}\right)_{\gamma=0} \equiv f^j_l(a, b)\left(\frac{\partial f^l(e, a)}{\partial \gamma^k}\right)_{\gamma=0}$$

dove la definizione data negli ultimi due membri di questa espressione e da intendersi tale che $\eta^j_l(a) \equiv f^j_l(e, a)$. Risulta allora

$$\eta^j_k(ab) = f^j_l(a, b)\eta^l_k(a).$$

Se a è in un intorno di e, $\eta^j_l(a)$ approssima la matrice unitaria e dal fatto che $\eta^j_l(a)$ è non singolare, risulta che $\eta^j_l(e)$ è non singolare e tale che $(\eta^j_l)^{-1}(e) = \delta^j_l$. Per la continuità, $\eta^j_l(a)$ è non singolare per a in un qualunque intorno di e, ed è perciò localmente invertibile; così, posto $(\eta^j_l)^{-1}(a) = \xi^j_l(a)$, si ha

$$f^j_l(a, b) = \eta^j_k(ab)\xi^k_l(a).$$

[13] In effetti, l'applicazione ϕ è una *curva* in G. Al suo posto bisognerebbe scrivere $\phi_t : G \times \mathbf{R} \to G$, ma useremo entrambe intercambiabilmente con lo stesso significato, a meno di avviso contrario.

[14] Si noti che il secondo membro di ogni equazione del sistema è da considerarsi come forma compatta della sommatoria effettuata rispetto all'indice l.

Dalla proprietà $a(\sigma)a(\tau) = a(\tau)a(\sigma) = a(\sigma + \tau)$, segue

$$f^j(a(\sigma), a(\tau)) = f^j(e, a(\sigma + \tau)) = \alpha^j(\sigma + \tau)$$

e differenziando il primo e l'ultimo membro rispetto a τ si ha

$$f^j_k(a(\sigma), a(\tau))\frac{\partial \alpha^k(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \alpha^j(\sigma + \tau)}{\partial \tau}.$$

Posto $\sigma = 0$ si ottengono le equazioni differenziali a cui soddisfano le coordinate $\alpha^j(\tau)$ degli elementi appartenenti al gruppo di trasformazioni ad un parametro $\tau \to a(\tau)$

$$\frac{\partial \alpha^j(\tau)}{\partial \tau} = \eta^j_k(a(\tau))t^k$$

dove $\frac{\partial \alpha^j(\sigma+\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \alpha^j(\sigma+\tau)}{\partial \sigma}$ e $t^k = \left(\frac{\partial \alpha^k(\sigma)}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0}$ sono i vettori tangenti al sottogruppo[15].

Questa relazione tra il gruppo di Lie G ed i vettori tangenti a suoi gruppi di trasformazioni ad un parametro ci consente di scrivere gli elementi del sottogruppo $\tau \to a(\tau)$ in modo tale che se con t indichiamo il vettore tangente a questo, allora il generico elemento $a(\tau)$ è espresso come $e^{\tau t}$. Risulta, dalle proprietà dell'esponenziale, che la composizione $a(\sigma)a(\tau)$ è equivalente a $e^{(\sigma+\tau)t}$.

Realizzazioni di un Gruppo di Trasformazioni. Una *algebra di Lie* è uno spazio vettoriale lineare reale di dimensione finita n, i cui vettori si combinano secondo le regole delle *parentesi di Lie*[16]. I vettori tangenti al gruppo di Lie G formano una algebra di Lie, i quali, se esponenziati, sono gli elementi del gruppo. Intuitivamente, attraverso l'esponenziazione dei vettori di una algebra di Lie, si ottengono gli elementi del gruppo corrispondente. Analogamente, facendo una derivata logaritmica degli elementi del gruppo otteniamo gli elementi dell'algebra.

Algebra di Lie

Al fine di introdurre il concetto di realizzazione, prendiamo un elemento del gruppo delle rotazioni $SO(3)$ e calcoliamo il corrispondente vettore tangente nell'origine. Sia

$$a(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau & 0 \\ -\sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[15] Va specificato che, una volta fissate la condizioni al contorno $\alpha^j(0) = 0$, la corrispondenza tra gruppo di trasformazioni ad un parametro e vettori t^k è biunivoca.([Sud] pp.184-185)

[16] Le *parentesi di Lie* sono commutatori tra campi vettoriali su una varietà differenziabile (se a e b sono elementi dell'algebra, allora $[a, b] \equiv ab - ba$ è il loro commutatore), tali che sono anti-simmetriche – $[a, b] = -[b, a]$ –, lineari per ogni coppia di numeri reali $\lambda'\lambda''$ – $[\lambda' a' + \lambda'' a'', b] = \lambda'[a', b] + \lambda''[a'', b]$ – e soddisfano all'*identità di Jacobi* – $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$.

e facciamone la derivata logaritmica

$$\frac{da(\tau)}{d\tau}(a(\tau))^{-1} = \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau & 0 \\ -\sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin\tau & \cos\tau & 0 \\ -\cos\tau & -\sin\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che valutata nell'origine da il vettore tangente al gruppo[17]

$$A = \left[\frac{da(\tau)}{d\tau}(a(\tau))^{-1}\right]_{\tau=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esprimendo questa relazione nel sistema di coordinate associato agli elementi del gruppo, si ha l'equazione differenziale lineare

$$\frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha(\tau) = A\alpha(\tau)$$

le cui soluzioni sono date dall'equazione

$$\alpha(\tau) = e^{\tau A}\alpha(0)$$

dove $a(\tau) = e^{\tau A}$.

La derivata di una qualunque funzione $f(\alpha(\tau))$, valutata lungo la curva integrale della precedente equazione, è data da

$$\frac{df(\alpha(\tau))}{d\tau} = \frac{d\alpha^j(\tau)}{d\tau}\frac{\partial f(\alpha(\tau))}{\partial\alpha^j} = \alpha^k A^j_k \frac{\partial f(\alpha(\tau))}{\partial\alpha^j}$$

ovvero

$$\frac{d}{d\tau}f(\alpha(\tau)) = \alpha^k A^j_k \frac{\partial}{\partial\alpha^j}f(\alpha(\tau)) \tag{0.2}$$

dove $\frac{d}{d\tau} = \alpha^k A^j_k \frac{\partial}{\partial\alpha^j}$ esprime la *derivata di Lie* lungo le curve integrali del gruppo[18]. Questo procedimento ci consente di mettere in relazione le matrici A con gli operatori differenziali del primo ordine $X_A = \alpha^k A^j_k \frac{\partial}{\partial\alpha^j}$; la relazione

[17]Poiché si è visto in precedenza che $\xi(e) = \delta^i_j$, anche in questo caso $(a(\tau))^{-1}$, quando valutato nell'origine, deve dare luogo alla matrice identità.

[18]La *derivata di Lie*, per definizione, è valutata nella direzione del campo vettoriale tangente nel dato punto alla curva integrale. Nel caso illustrato, essa coincide con un'applicazione che ad ogni funzione f di classe C^1 associa nell'intorno del dato punto la derivata direzionale di f lungo la curva integrale, ed ha quindi carattere globale.

$[A, B] \to [X_A, X_B]$ è un omomorfismo tra algebre di Lie. Risulta così che ad A corrisponde l'operatore

$$X_A = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha^1} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha^3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha^1} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha^3} \end{pmatrix} = \alpha^1 \frac{\partial}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha^1}.$$

Intuitivamente, il senso che può essere dato ad una realizzazione di un gruppo è quello dell'associare matrici ad operatori differenziali. In maniera meno ingenua, così come la rappresentazione[19] di un gruppo di Lie può essere pensata come una applicazione che ad ogni elemento del gruppo fa corrispondere una trasformazione affine dello spazio vettoriale n-dimensionale (ad esempio *automorfismi* o *diffeomorfismi*), così la realizzazione di un gruppo di Lie è pensata come l'applicazione che ad ogni elemento dell'algebra di Lie ad esso associata, fa corrispondere un operatore (rispettivamente, *endomorfismi* o *campi*).

Dato un generico insieme S, se è possibile associare ad ogni elemento a del gruppo di Lie G, una unica applicazione T_a invertibile di S in se stesso, tale che $T_a T_b = T_{ab}$, allora si ha una *realizzazione* del gruppo G. Quando S è uno spazio vettoriale lineare, si ha una *rappresentazione* di G; in questo senso, le rappresentazioni sono una sottoclasse delle realizzazioni.

Se si prende in considerazione la 2-forma bilineare $\Lambda(df, dg)$ sullo spazio lineare dei campi vettoriali covarianti su $\mathcal{E}$ ristretto ai *differenziali esatti*, dove $\mathcal{E}$ è la famiglia delle funzioni a valori reali sulla varietà differenziabile $\mathcal{M}$, questa definisce una applicazione da $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ in $\mathcal{E}$, tale che

$$\Lambda(df, dg) = -\Lambda(dg, df) \tag{0.3}$$

$$\Lambda(df, dg + dg') = \Lambda(df, dg) + \Lambda(df, dg') \tag{0.4}$$

$$\Lambda(df, dgdg') = \Lambda(df, dg)g' + g\Lambda(df, dg') \tag{0.5}$$

$$\Lambda(df, c) = 0. \tag{0.6}$$

Questo tensore anti-simmetrico due volte controvariante è definito univocamente dalla relazione $\Lambda(df, dg) = \{f, g\}$[20], dove $\{f, g\} \in \mathcal{E}$. Se il campo tensoriale è non degenere e se vale l'identità di Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (0.7), allora la varietà $\mathcal{M}$ è simplettica[21] e $\{f, g\}$ sono per definizione le *parentesi di Poisson*. Le parentesi di Poisson realizzano le parentesi di Lie, quando queste ultime sono definite sullo spazio delle fasi.

[19] Formalmente, una rappresentazione è un omomorfismo di un dato gruppo nel gruppo di tutte le trasformazioni invertibili di un dato insieme.

[20] [Jos] p.574

[21] La struttura simplettica della varietà $\mathcal{M}$ è indotta dal campo tensoriale controvariante e non degenere Λ, se risulta che $\mathcal{M}$ è orientabile e la sua dimensione è pari.