

# 1 Conduzione elettrica nei materiali

## 1.1 Elettroni di banda in campo esterno

La densita' di corrente e' data da

$$\vec{j} = -e \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i \vec{v}_i = -e \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{occupati} d^3k \vec{v}(\vec{k}) \quad (1)$$

Assumiamo per semplicita' isotropia in  $\vec{k}$ . In un modello di bande di energia quasi libere della forma  $\epsilon_k = \epsilon_{k_o} + \hbar^2(k - k_o)^2 / (2m^*)$  ottenuto da uno sviluppo di Taylor nei pressi di un punto di minimo o di massimo della banda  $\vec{k} = \vec{k}_o$ , i portatori di carica hanno una massa efficace  $m^*$  definita tautologicamente dallo sviluppo attorno a  $k_o$  della dispersione in  $k$  dell'energia:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \epsilon_k}{\partial k^2} . \quad (2)$$

In corrispondenza:

$$\vec{v}(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial k} . \quad (3)$$

I portatori di corrente possono essere descritte sono elettroni o buche Una banda di energia totalmente piena non contribuisce alla corrente. Cio' perche' sono occupati tutti i  $\vec{k}$  insieme con i corrispondenti  $-\vec{k}$ , dal momento che hanno energie uguali. A  $\vec{k}$  opposti corrisponde velocita' opposta. Quindi l'impulso totale e' zero.

Questa affermazione consente di vedere la conduzione di una banda non completamente piena in modo complementare, ovvero considerando le buche. Le buche hanno carica positiva:

$$0 = -e \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \int_{occupati} + \int_{vuoti} \right) d^3k \vec{v}(\vec{k}) \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = e \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{vuoti} d^3k \vec{v}(\vec{k}) . \quad (4)$$

L'equivalenza tra buche ed elettroni e' completa. Infatti l'equazione del moto classica di un elettrone e':

$$\frac{d}{dt} \vec{p}(k) = -e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) . \quad (5)$$

Elettroni vicini ad un massimo di banda hanno  $1/m^*$  negativo ( massa efficace negativa). Sostituendo

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(k) = -\frac{\hbar}{|m^*|}\dot{\vec{k}} = -e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right) . \quad (6)$$

Si puo' lasciar cadere il segno meno da tutte e due le parti e interpretare i portatori vicino un massimo di banda come buche di massa efficace positiva.

Le buche acquistano realta' in particolare nella conduzione nei semiconduttori. Esse danno inoltre un deflessione di Hall opposta agli elettroni in campo magnetico (vedi seguito).

## 1.2 Teoria classica di Drude

Quando applichiamo un campo  $\vec{E}$  ad un materiale vale la legge di Ohm:  $\vec{j} \propto \vec{E}$ . In media la velocita' ( non l'accelerazione ! ) e'  $\propto \vec{E}$ , per la presenza di impurezze, imperfezioni (difetti) del cristallo, fononi (ovvero vibrazioni reticolari), etc., che scatterano gli elettroni smorzandone, in media l'accelerazione. In un materiale ideale la conducibilita' per campi elettrici stazionari ( $\omega = 0$ ) ed uniformi e' attesa essere infinita

Detto  $p$  l'impulso di una particella, studiamo l'equazione del moto classica in presenza di un campo elettrico  $Ee^{-i\omega t}$  e di un rilassamento dell'impulso dovuto ai meccanismi resistivi citati.

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau} - eE e^{-i\omega t} \quad (7)$$

In trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} -i\omega p &= -\frac{p}{\tau} - eE \\ \vec{j} &= -n_e e \vec{v} = \frac{n_e e^2 \tau}{m^*} \frac{\vec{E}}{1 - i\omega\tau} \end{aligned}$$

Legge di Ohm :  $\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sigma_o \frac{1}{1 - i\omega\tau} ; \quad \sigma_o = \frac{n_e e^2 \tau}{m^*} \quad (8)$

La conducibilita'  $\sigma$  e' legata alla risposta dielettrica ( per materiali non magnetici  $\mu = 1$  ):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - i\frac{\omega}{c} \vec{D}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \vec{D} = \epsilon_o \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = -i \frac{\omega}{c} \left( \epsilon_o + 4\pi i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \right) \vec{E}$$

*definiamo*  $\epsilon(\omega) = \epsilon_o + 4\pi i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}$  (9)

$$\text{poiche' } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{H}$$

$$\text{e in assenza di cariche } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \vec{E}$$

Quest'equazione ammette soluzione di tipo onda piana, ma con un  $k = (\omega/c)\sqrt{\epsilon(\omega)}$  complesso (propagativa, ma con smorzamento), in presenza di rifrazione ed assorbimento:  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ . La parte reale da' la propagazione e l'indice di rifrazione  $n(\omega)$ :

$$\omega = \frac{c}{\Re\{\sqrt{\epsilon(\omega)}\}} k \quad \Rightarrow \quad n(\omega) = \Re\{\sqrt{\epsilon(\omega)}\} \quad (10)$$

La parte immaginaria da' l'assorbimento  $\alpha(\omega) = \Im\{\sqrt{\epsilon(\omega)}\}$ :

$$\epsilon \equiv \epsilon' + i\epsilon'' = \left( \epsilon_o - \frac{4\pi\sigma''(\omega)}{\omega} \right) + i \frac{4\pi\sigma'(\omega)}{\omega} \quad (11)$$

$\epsilon$  e' anche legata alla suscettivita' dielettrica:

$$\vec{P} = \chi \vec{E}; \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \equiv \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \epsilon(\omega) = \mathbf{1} + 4\pi \chi(\omega)$$

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\tau_j^{-1}} \quad (12)$$

dove  $f_j$  sono le forze degli oscillatori di frequenza propria  $\omega_j$ .

Infatti assumiamo che la polarizzabilita' degli atomi o molecole del materiale, dovuta a spostamenti del baricentro delle cariche negative da quelle positive, sia descrivibile classicamente da modi propri di oscillatori armonici smorzati con un tempo di rilassamento  $\tau_j$ . L'equazione del moto classica per il materiale perturbato dal campo elettrico  $E$  e':

$$m\ddot{x} + m\omega_j^2 x + m \frac{\dot{x}}{\tau_j} = -eE e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} (\omega_j^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau_j}) = \frac{-e\mathbf{E}}{m} \quad (13)$$

dove si e' fatta la posizione che la dipendenza temporale della posizione sia ancora del tipo  $e^{-i\omega t}$ . La polarizzazione macroscopica  $P$  e' data da :

$$P = -Ne\langle x \rangle = \frac{Ne^2}{m} \frac{E}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_j}} = \chi E \quad (14)$$

Una stima numerica di  $\chi$  si ha prendendo come tipica lunghezza d'onda della luce  $\lambda = 3000\text{\AA}$  :

$$\chi \sim \frac{Ne^2}{m} \sim \frac{Ne^2}{2a_B} \frac{2a_B}{mc^2} \frac{c^2}{\omega_j^2} \sim N \times \frac{13.6eV}{0.5MeV} \times 1\text{\AA} \times \lambda^2. \quad (15)$$

Per gas molecolari in condizioni standard di pressione e temperatura la densita' e' di circa  $N = 2.7 \times 10^{19} \text{ molecole/cm}^3$  che da' una suscettivita' di  $\sim 10^{-4} \div 10^{-3}$ . Per dielettrici solidi o liquidi  $N \sim 10^{22} \div 10^{23} \text{ molecole/cm}^3$  che da' una  $\chi$  da 1 a 10. Questa polarizzabilita' e' indipendente dalla temperatura ( Jackson). C'e' poi la polarizzabilita' orientazionale di sostanze polari: che abbiano un momento di dipolo permanente come  $HCl$  e  $H_2O$ . Questa va come  $a + b/T$ . A grandi  $T$  e' sempre dello stesso ordine di grandezza.

### 1.3 Isolanti, conduttori, superconduttori

- Isolanti

Negli isolanti le frequenze di eccitazione proprie  $\omega_j$  sono  $\neq 0$  per ogni  $j$ . Faremo il caso di un isolante ideale:  $\tau \rightarrow \infty$ :

dalla eq.(12) si ricava che

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon(\omega) = \epsilon_o = 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \quad (16)$$

Allora, dalla eq.(11) si capisce che  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(\omega) = 0$ .

Sia  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ . Per  $\omega$  tale che  $0 < \omega < \omega_1$ , si ha  $\sqrt{\epsilon(\omega)}$  reale, mentre diventa immaginaria pura per  $\omega_1 < \omega$ . Quindi l'assorbimento,  $\alpha(\omega) \propto \Im m\{\sqrt{\epsilon(\omega)}\}$  e' nullo sotto  $\omega_1$ .  $\omega_1$  e' la gap nello spettro di eccitazione.

- Conduttori

Nei conduttori, gli elettroni di conduzione corrispondono ad un modo zero: esiste un  $j = 0$  tale che  $\omega_0 = 0$ :

$$\epsilon(\omega) \equiv \epsilon_o + 4\pi i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \sim \epsilon_o - 4\pi \frac{Ne^2}{m\omega} \frac{f_0}{\omega + i\tau_0^{-1}} \quad (17)$$

che restituisce l'eq.(8) quando si ponga  $Nf_0 = n_e m/m^*$ .

Allora definendo la frequenza di plasma  $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 / (m^* \epsilon_o)$ :

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_o \left( 1 + 4\pi i \frac{n_e e^2}{m^* \epsilon_o \omega} \frac{\tau}{1 - i\omega \tau} \right) \\ &= \epsilon_o \left( 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} - i \frac{\omega_p \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} \right) \equiv \epsilon' + i\epsilon'' \\ &\text{quindi, per } \omega\tau \gg 1, \quad \epsilon' \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Questa e' la forma approssimata per la  $\epsilon'$  che si usa spesso per i metalli.

Notare che e'  $\epsilon' > 1$  solo se  $\omega > \omega_p$ . Per  $\omega < \omega_p$ ,  $n(\omega)$  diventa immaginario puro e la radiazione non puo' propagarsi, ma viene riflessa ( e da' la caratteristica lucentezza metallica nel visibile). Per  $\omega > \omega_p$  il metallo e' trasparente. Nel caso dei metalli alcalini cio' accade nell'ultravioletto. In alcuni semiconduttori drogati con un numero di portatori  $n_e \sim 10^{19}/cm^3 \ll 10^{22}/cm^3$ , la soglia di assorbimento e' nell'infrarosso.

La frequenza di plasma corrisponde al modo proprio di oscillazione del "plasma" di elettroni nel metallo. Nel modello *jellium* un'oscillazione della carica uniforme negativa, con uno spostamento su distanza  $d$  rispetto al fondo positivo, genera un doppio strato ai bordi di densita' di carica superficiale  $\sigma = \pm n_e d e$ . Conseguenza una forza di richiamo dovuta al campo elettrico  $E = 4\pi\sigma$  :

$$m_e \ddot{d} = -eE = -4\pi e \sigma \equiv -4\pi e^2 n_e d . \quad (19)$$

La frequenza di oscillazione e'  $\omega_p$ .

I metalli ideali hanno anch'essi  $\tau \rightarrow \infty$  e, poiche' :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} &= \mathcal{P} \frac{1}{\omega} - i\pi \delta(\omega) \quad , \\ \text{allora} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma(\omega) &= \frac{ne^2}{m^*} \frac{i}{\omega + i\tau^{-1}} \quad , \\ \text{con} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega + i\tau^{-1}} &= \mathcal{P} \frac{1}{\omega} - i\frac{\pi}{2} \delta(\omega) \\ \Rightarrow \quad \sigma' &= \frac{\mathbf{n}_e \mathbf{e}^2 \pi}{2\mathbf{m}^*} \delta(\omega) \quad , \quad \sigma'' = \frac{\mathbf{n}_e \mathbf{e}^2 \pi}{2\mathbf{m}^*} \mathcal{P} \frac{1}{\omega} \quad . \end{aligned} \quad (20)$$

(Notare che nel nostro caso abbiamo messo  $\pi/2$  al posto di  $\pi$  perche' c'e' solo mezzo polo. Infatti  $\omega > 0$ ).

La  $\delta(\omega)$  e' il cosiddetto picco di Drude a  $\omega = 0$ . Esso e' attribuibile alla accelerazione libera delle particelle che non rilassano mai ( $\tau \rightarrow \infty$ ).

Vale la regola di somma:

$$\int_0^\infty d\omega \sigma'(\omega) = \frac{\pi n_e e^2}{2m_e} \quad (21)$$

(poiche' essa deriva da principi assolutamente fondamentali (in pratica da  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ ) la massa che vi compare e' quella dell'elettrone). Il picco di Drude si vede anche nell'assorbimento in un metallo reale.

- Superconduttori

C'e' una gap  $\Delta$  nello spettro di assorbimento come per gli isolanti ma:

$$\int_0^\infty d\omega \sigma'_S(\omega) < \frac{\pi n_e e^2}{2m_e} \quad (22)$$

Poiche' l'uguaglianza e' conseguenza di una regola di somma inviolabile, si desume che l'area mancante appare sotto forma di picco a  $\delta$  ad  $\omega = 0$ :

$$\sigma'_S(\omega) = \frac{\pi n_S (e^*)^2}{2m^*} \delta(\omega) + \sigma'(\omega) \quad (23)$$

Il primo termine rende conto della superconduzione che avviene con libera accelerazione delle cariche, mentre il secondo termine e' il contributo di assorbimento al di sopra della gap ( percio' la  $\sigma'(\omega)$  contiene

una funzione gradino  $\theta(\omega - \Delta/\hbar)$ ). Notare che non e' possibile rilevare questo contributo ad  $\omega = 0$  perche' non si puo' applicare un campo elettrico stazionario uniforme ad un superconduttore massiccio, senza che questo transisca rapidamente a metallo normale.

Nessuna teoria di singola particella puo' giustificare la compresenza di una singolarita' di Drude (da metallo ideale) con un comportamento isolante.  $n_S$  e' una densita' idrodinamica di "superelettroni" ("il condensato" di coppie di Cooper di elettroni, di carica efficace  $e^* \approx 2e$ ).

## 2 Semiconduttori

I semiconduttori intrinseci (ovvero non drogati) hanno a  $T = 0$  la banda detta "di valenza" ( $v$ ) occupata e quella "di conduzione" ( $c$ ) vuota. Il semiconduttore non conduce. Il livello di Fermi e' nella gap tra le due: la gap  $E_g = \epsilon_c - \epsilon_v < 1 \text{ eV}$ .  $\epsilon_c$  e' il fondo della banda  $c$ ,  $\epsilon_v$  la cima della banda  $v$ . A temperatura ambiente la probabilita' che vi sia un elettrone in banda di conduzione e, corrispondentemente, una buca nella banda di valenza e'  $\propto \exp - \{\beta E_g\}$ , ovvero piccola.

Detta  $g_{c/v}(\epsilon)$  la densita' di stati in energia delle bande  $c/v$ , le densita' di portatori alla temperatura  $T$  saranno:

$$n_c = \int_{\epsilon_c}^{\infty} d\epsilon g_c(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} ; \quad p_v = \int_{-\infty}^{\epsilon_v} d\epsilon g_v(\epsilon) \left( 1 - \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \right) . \quad (24)$$

Noi assumeremo che  $\epsilon_c - \mu \gg k_B T$ , cosi' come  $\mu - \epsilon_v \gg k_B T$ , per cui si potra' usare la statistica di  $MB$  facendo cadere l'addendo 1 al denominatore.

$$\begin{aligned} n_c(T) &= N_c(T) e^{-\beta(\epsilon_c - \mu)} ; & p_v &= P_v(T) e^{-\beta(\mu - \epsilon_v)} \\ \text{dove } N_c(T) &= \int_{\epsilon_c}^{\infty} d\epsilon g_c(\epsilon) e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_c)} ; & P_v(T) &= \int_{-\infty}^{\epsilon_v} d\epsilon g_v(\epsilon) e^{-\beta(\epsilon_v - \epsilon)} \end{aligned} \quad (25)$$

sono funzioni di  $T$  lentamente variabili. E' facile vedere che

$$\begin{aligned} N_c(T) &= \frac{1}{4} \left( \frac{2m_c^* k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} ; & P_v(T) &= \frac{1}{4} \left( \frac{2m_v^* k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} ; \\ N_c(T) \text{ opp. } P_v(T) &= \frac{1}{4} \left( \frac{m_{c/v}^*}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{300K} \right)^{\frac{3}{2}} \times 10^{19} / \text{cm}^3 ; \end{aligned}$$

dove  $m_{c/v}^*$  sono le masse efficaci delle bande  $c/v$ .

Dalle eq.(25) deriva la cosiddetta “ legge dell’azione di massa “:

$$n_c p_v = N_c P_v e^{-\beta E_g} , \quad (26)$$

indipendente da  $\mu$ . Nel caso di un semiconduttore intrinseco:

$$n_c(T) = p_v(T) \equiv n_i(T) , \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_i = [\mathbf{N}_c(\mathbf{T})\mathbf{P}_v(\mathbf{T})]^{1/2} e^{-\beta E_g/2} . \quad (27)$$

Il semiconduttore puo’ essere “drogato” tipo  $n$  o  $p$ . Nel tipo  $n$  si aggiungono impurezze donori sotto il fondo della banda  $c$ , nel tipo  $p$  accettori sopra la cima della banda  $v$ . Le impurezze generano stati elettronici localizzati attorno al sito dell’impurezza. Un elettrone che occupa un livello di impurezza non partecipa alla conduzione.

I donori si ionizzano facilmente dando una densita’ di portatori di carica negativa ( elettroni )  $n_c$  nella banda  $c$  e quindi fornendo elettroni itineranti per la conduzione. Il potenziale chimico  $\mu$  sara’ allora vicino al fondo della banda  $c$ . Nel tipo  $p$ , gli accettori acquireranno facilmente elettroni che si localizzano, ma lasciano una densita’ di buche  $p_v$  itineranti nella banda  $v$  e  $\mu$  si trovera’ allora sopra la cima della banda  $v$ . La densita’ di impurezze e’  $N_{d/a} \sim 10^{19}/cm^3$ .

## 2.1 Giunzione $p - n$

Una giunzione  $p - n$  e’ un diodo: passa corrente se polarizzata con un volt-aggio positivo fino a  $V \sim eV$ ; non passa corrente se la polarizzazione e’ negativa o nulla. La forte non linearita’ nella caratteristica  $I/V$  consegue dalla elettrostatica della giunzione.

Supponiamo una zona di tipo  $p$  a sinistra e di tipo  $n$  a destra. Per semplicita’ assumiamo che

$$p_p \equiv p_v(x = -\infty) = N_a ; \quad n_n \equiv n_c(x = \infty) = N_d ; \quad (28)$$

ovvero, che le impurezze siano totalmente ionizzate.

Portiamo ora a contatto le due zone. Nel primo istante gli elettroni in eccesso alla superficie della zona  $n$  migrano nella zona  $p$  e vanno a riempire alcune buche. C’e’ un’annichilazione di portatori di carica nello strato alla giunzione . Questo lascia *localmente* (“*depletion layer* “) non compensate



le cariche positive delle impurezze nude (ionizzate) in  $n$  e gli ioni negativi costituiti dalle impurezze accettrici in  $p$ . Si genera un doppio strato alla giunzione, di spessore  $d_p + d_n$ , con cariche  $+$  dalla parte  $n$  e cariche  $-$  da quella  $p$ . Si genera un potenziale elettrostatico  $\phi(x) \sim \tanh[2x/(d_n + d_p)]$ , che cresce dolcemente attraverso la giunzione. Esso ha l'effetto, all'equilibrio, di equiparare i potenziali chimici attraverso tutto il sistema. E' utile definire il potenziale elettrochimico  $\mu_e = \mu + \phi(x)$  che, per lo stesso motivo, molto lontano dalla giunzione differiscono di  $e\Delta\phi = \mu_e(+\infty) - \mu_e(-\infty) \approx E_g$ . Il gradiente  $e\Delta\phi$  ha generato un campo elettrico che si oppone ad un'ulteriore migrazione delle cariche, e cosi' si raggiunge l'equilibrio. La distribuzione di portatori sara':

$$n_c(x) = N_c(T)e^{-\beta(\epsilon_c - e\phi(x) - \mu)} ; \quad p_v(x) = P_v(T)e^{-\beta(\mu - \epsilon_v + e\phi(x))} ; \quad (29)$$

$$\Rightarrow e\phi(+\infty) - e\phi(-\infty) = \epsilon_c - \epsilon_v + \mathbf{k_B T} \ln \left[ \frac{N_d N_a}{N_c P_v} \right] , \quad (30)$$

dove e' stata usata l'assunzione di eq.(28).

Lungo il dispositivo ci sara' una densita' di carica:

$$\rho(x) = \begin{cases} -e [N_d - n_c(x) - p_v(x)] & x > 0 \\ e [N_a - p_v(x) - n_c(x)] & x < 0 \end{cases} \quad \text{con}$$

$$\frac{n_c(x)}{N_d} = e^{-\beta(e\phi(+\infty) - e\phi(x))} ; \quad \frac{p_v(x)}{N_a} = e^{-\beta(e\phi(x) - e\phi(-\infty))} , \quad (31)$$

che si annulla fuori dello strato alla giunzione. La forma del potenziale  $\phi(x)$  va trovata consistentemente risolvendo l'equazione di Poisson

$$-\nabla^2 \phi = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho(x) . \quad (32)$$

Per una forma approssimata di  $\rho(x)$  estremamente semplificata, si ha

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{4\pi}{\epsilon} \times \begin{cases} 0 & \text{per } x < -d_p \\ eN_a & \text{per } -d_p < x < 0 \\ -eN_d & \text{per } 0 < x < d_n \\ 0 & \text{per } d_n < x \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi(-\infty) & \text{per } x < -d_p \\ \phi(-\infty) + \frac{2\pi e N_a}{\epsilon} (x + d_p)^2 & \text{per } -d_p < x < 0 \\ \phi(+\infty) - \frac{2\pi e N_d}{\epsilon} (x - d_n)^2 & \text{per } 0 < x < d_n \\ \phi(+\infty) & \text{per } d_n < x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{continuita' di } \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} &\Rightarrow \mathbf{N}_d \mathbf{d}_n = \mathbf{N}_a \mathbf{d}_p \\ \text{continuita' di } \phi|_{x=0} &\Rightarrow \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = \frac{2\pi e}{\epsilon} [\mathbf{N}_d \mathbf{d}_n^2 + \mathbf{N}_a \mathbf{d}_p^2] . \end{aligned}$$

La prima condizione garantisce che l'eccesso di carica positiva (per unita' di superficie) nel lato  $n$  sia uguale all'eccesso di carica negativa nel lato  $p$ . Per  $e\Delta\phi \sim 1 \text{ eV}$  si ha  $d_n, d_p \sim 10^4 \div 10^2 \text{ \AA}$ .

Una volta caratterizzata l'elettrostatica della giunzione all'equilibrio, (in assenza cioe' di polarizzazione  $V$ ) vediamo la distribuzione dei portatori di carica. Definiamo  $n_n(p_p)$  i portatori di maggioranza nella regione  $n(p)$  e altrimenti  $p_n(n_p)$  i portatori di minoranza nella regione  $n(p)$ . Consideriamo il caso a voltaggio zero  $\rightarrow \Delta_o\phi$  e quello in presenza di  $V$ :  $\rightarrow \Delta\phi = \Delta_o\phi - eV$ . Il voltaggio non altera molto la densita' dei portatori di maggioranza nei pressi dello strato di giunzione. Si avra' quindi:

$$\begin{aligned} n_n^V \sim n_n^o \sim N_d ; \quad \frac{n_p^o}{n_n^o} \sim e^{-\beta e \Delta_o\phi} ; \quad \frac{n_p^V}{n_n^V} \sim e^{-\beta e \Delta\phi} \\ \Rightarrow \frac{n_p^V}{n_p^o} \sim e^{-\beta e (\Delta\phi - \Delta_o\phi)} = e^{\beta e V} \\ p_p^V \sim p_p^o \sim N_a ; \quad \frac{p_n^o}{p_p^o} \sim e^{-\beta e \Delta_o\phi} ; \quad \frac{p_n^V}{p_p^V} \sim e^{-\beta e \Delta\phi} \\ \Rightarrow \frac{p_n^V}{p_n^o} \sim e^{\beta e V} \end{aligned} \quad (33)$$

Gli  $e^-$  e le buche  $h$  si muovono in verso opposto, ma contribuiscono additivamente alla corrente perche' hanno carica opposta. L'eccesso di portatori in presenza di  $V$  sara':

$$n' = n_p^V - n_p^o \sim n_p^o (e^{\beta e V} - 1) , \quad (34)$$

ed analogamente per la densita' in eccesso  $p' = p_n^V - p_n^o$  nell zona  $n$ .

Studiamo ora la corrente. Essa ha due contributi: una corrente di trasciamento ("drift") per la presenza del campo elettrico  $E$  e una corrente di diffusione a seguito di accumulo locale di portatori di carica. In formole:

$$j_e = -\mu_n n_c E - D_n \frac{dn_c}{dx} ; \quad j_h = -\mu_p p_v E - D_p \frac{dp_v}{dx} , \quad (35)$$

dove  $\mu_{n,p}$  sono le mobilita' nella zona  $n, p$ . Usando la conducibilita' di Drude di eq.(8) si ha  $\mu_{n,p} = e\tau_{n,p}/m_{c,v}^*$ .  $D_{n,p}$  sono i coefficienti di diffusione.

In assenza di  $V$  (all'equilibrio) sia  $j_e$  che  $j_h$  sono nulle. All'equilibrio si possono usare le espressioni di eq.(29) e si trova compensazione dei due termini in eq.(35) se valgono le relazioni di Einstein:  $\mu_{n,p} = eD_{n,p}/(k_B T)$ . Trascuriamo il termine lineare  $\propto E$  della corrente perche' e' piccolo, ed, in piu', siamo interessati agli aspetti non lineari della caratteristica  $I/V$ . Allora, le equazioni ( di non-equilibrio) per la corrente in termini della densita' in eccesso di portatori di minoranza sui due lati vanno riscritte. Limitiamoci alla sola  $n'$  valutata al punto  $x_p$ :

$$\vec{j} = -eD\vec{\nabla}n' , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -e\frac{\partial n'}{\partial t} \approx -e\frac{n'}{\tau^{rec}} , \quad (36)$$

dove  $\tau^{rec}$  e' un tempo tipico per la ricombinazione tesa a restaurare l'equilibrio. Combinandole insieme:

$$-\frac{n'}{\tau^{rec}} = -D\nabla^2 n' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}'(\mathbf{x}) = \mathbf{n}'(\mathbf{x}_p)\mathbf{e}^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p|/\lambda_D} ; (\lambda_D = (\mathbf{D}\tau^{rec})^{1/2}) .$$

$$\text{Allora } \vec{j}_e(x_p) = -eD_{ep}\vec{\nabla}n'|_{x_p} = \frac{eD_{ep}n_p^0}{\lambda_{De}} (e^{\beta eV} - 1) , \quad (37)$$

dove si e' usata l'eq.(34).

Per continuita' la corrente e' uniforme in ogni punto. Dunque, sommando i contributi di elettroni e buche alla corrente, ancorche' valutati in punti differenti, la caratteristica  $I/V$  e' fortemente non lineare perche' :

$$J(0) = j_e(x_p) + j_h(x_n) = e \left( \frac{D_{ep}n_p^0}{\lambda_{De}} + \frac{D_{hn}p_n^0}{\lambda_{Dh}} \right) (e^{\beta eV} - 1) . \quad (38)$$

La giunzione  $p - n$  si comporta come un diodo.

### 3 elettrone in campo magnetico

L'equazione del moto classica per un elettrone in campo magnetico e':

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (39)$$

Se  $\vec{B} \parallel \hat{z}$  si ha:

$$m\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} \quad , \quad m\ddot{y} = \omega_c \dot{x} \quad (40)$$

la frequenza  $\omega_c = eB/(mc)$  e' detta "di ciclotrone". Sono costanti del moto:

$$\dot{x} + \omega_c y = \text{const}_1 \quad , \quad \dot{y} - \omega_c x = \text{const}_2 \quad (41)$$

Le soluzioni sono:

$$x(t) = A \cos \omega t + x_o \quad ; \quad y(t) = A \sin \omega t + y_o \quad (42)$$

da cui si deducono le costanti:  $\text{const}_1 = \omega_c y_o$ ,  $\text{const}_2 = -\omega_c x_o$ , che sono i centri dell'orbita circolare. La costante  $A$  e' il raggio ed e' definita da un'altra costante del moto:  $|\vec{v}|$  (ovvero dall'energia  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\omega_c^2 A^2$ : ricordare che la forza di Lorenz non compie lavoro):

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 0 \quad . \quad (43)$$

Altra costante del moto e'  $p_x$ , nella gauge di Landau. Infatti

$$m\vec{v} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} \quad ; \quad (44)$$

da cui consegue che, con la scelta

$$\vec{A} \equiv (-By, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_o = -\frac{c}{eB}\mathbf{p}_x \quad . \quad (45)$$

*Un'osservazione importante: l'elettrone libero e' un sistema diamagnetico.*

L'orbita circolare ha la forza diretta verso il centro. Se  $B$  entra nel piano, la velocita'  $\vec{v}$  sara' tangente la circonferenza di elementino  $d\vec{l}$  in senso orario. Poiche' l'elettrone ha carica negativa la corrente  $i = -e\omega_c$  ha verso antiorario. Una correntina genera un campo magnetico:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad . \quad (46)$$

Il campo al centro della correntina circolare e':

$$B_z = \frac{1}{c} i \int_0^{2\pi} \frac{R d\vartheta}{R^2} = \frac{2\pi}{c} \frac{i}{R} \quad , \quad (47)$$

orientato uscente dal piano, e quindi si oppone al campo inducente. L'elettrone e' diamagnetico.

### 3.1 livelli di Landau

Risolviamo l'equazione di Schrödinger per l'elettrone in campo magnetico nella gauge di Landau di eq.(45). Trascuriamo il suo spin:

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left( p_x + \frac{e}{c} B y \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \right\} \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r}) \quad (48)$$

L'hamiltoniana e' separabile:

$$\psi(\vec{r}) = e^{i(k_x x + k_z z)} \varphi_n(y)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \varphi_{n\mathbf{k}} + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ \epsilon_{nk_z} - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2} m \left( \frac{eB}{mc} \right)^2 (y - y_o)^2 \right\} \varphi_{n\mathbf{k}}(y) = 0 \quad (49)$$

Trattasi di un oscillatore armonico unidimensionale centrato in  $y_o = \hbar c k_x / (eB)$  e di frequenza  $\omega_c = eB / (mc)$ . Si ottiene:

$$\epsilon_{nk_z} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{p_z^2}{2m} \quad (50)$$

$$\varphi_{n\mathbf{k}}(y) = e^{-\frac{m}{2\hbar} \omega_c (y - y_o)^2} H_n \left[ \left( \frac{m \omega_c}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} (y - y_o) \right]. \quad (51)$$

Le funzioni  $H_n$  sono polinomi di Hermite. Qui  $(\hbar / m \omega_c)^{\frac{1}{2}}$  e' la scala delle lunghezze magnetiche e il centro classico dell'orbita  $y_o$  e' ancora conservato. in questa gauge la funzione d'onda dell'elettrone e' concentrata attorno a  $y_o$  ma e' un'onda piana (delocalizzata) lungo  $x$ . La gauge simmetrica da' invece luogo a funzioni d'onda circolari. Gli autostati costituiscono comunque un sistema completo e la gauge e' scelta convenientemente, in accordo con le condizioni al contorno. Questa gauge e' opportuna per condizioni al contorno periodiche lungo la direzione  $x$  ( ad esempio una striscia di larghezza  $W$  e lunghezza  $L$  chiuso su se stesso lungo  $x$ . Per un disco si preferirebbe la gauge simmetrica.

E' significativo che l'autovalore dell'energia non dipende da  $k_x$ , ovvero dal centro dell'orbita  $y_o$ . I livelli di Landau, indicati da  $n$  sono quindi degeneri. La degenerazione  $\mathcal{N}$  e' finita per una striscia finita:

$$\mathcal{N} = \frac{L}{2\pi} k_x^{max} \quad (52)$$

Qui  $k_x^{max}$  e' fissato dalla richiesta che il centro dell'orbita non debordi dalla striscia:  $k_x^{max} = eBW/(\hbar c)$ . Allora la degenerazione del livello di Landau ( indipendente da  $n$ ) e':

$$\mathcal{N} = LW \frac{eB}{\hbar c} = \frac{\Phi}{\phi_0} \quad (53)$$

dove  $\Phi$  e' il flusso totale di  $B$  attraverso la striscia e  $\phi_0 \equiv \hbar c/e = 4.1358 \cdot 10^{-7} \text{ gauss cm}^2$  e' il quanto di flusso.

## 4 Conducibilita' Hall

Nel 1880 Edwin H. Hall scopri' che se si fa passare una corrente  $j \parallel \hat{x}$  in una lamina conduttrice con un campo magnetico  $B \parallel \hat{z}$  ortogonale al piano della lamina si crea una differenza di potenziale  $V$  in direzione  $\hat{y}$  ( dovuta ad un campo  $E_y$  ).

La condizione di equilibrio dei portatori di carica  $q$  in presenza di un campo  $B$  ed  $E$  nelle direzioni dette e':

$$0 = F_y = q \left( E_y + \frac{1}{c} v_x B \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{j}_x \mathbf{B}} = \frac{1}{\mathbf{n}q} = \mathbf{R}_H, \quad (54)$$

dove si e' usato  $\vec{j} = nq\vec{v}$ . La seconda identita' e' la definizione del "coefficiente Hall "  $R_H$ .

Ci si aspetta che esso sia negativo perche'  $q = -e$  per gli elettroni, come in generale accade per i metalli ( per es. in  $Cu$ ,  $R_H = -5.5 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Coulomb}$ ). Invece, per es. in  $Al$  ed  $Fe$ ,  $Zn$  esso e' positivo: i portatori sono buche. Nei semiconduttori e' positivo o negativo a seconda che il semiconduttore sia  $p$  o  $n$ . La misura di  $R_H$  da' le densita' di portatori  $n$ . Dal confronto con il valore misurato di  $\omega_p$  si ottengono, separatamente, la densita' di portatori e la massa efficace.

Piu' in generale, l'equazione del moto classico di un elettrone in un campo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e':

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{e}{m} \left[ \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right] - \frac{\vec{v}}{\tau} \quad (55)$$

Definiamo

$$V = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}; Y = -\frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{Y} + \mathbf{M}\mathbf{V}$$

$$M = -\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} ; \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}$$

soluzione :  $V = -M^{-1}Y + A e^{Mt}$  ,

(56)

dove  $A$  e' fissata dalle condizioni iniziali. Dopo un transiente, alla stazionarieta' si ha:

$$t \rightarrow \infty : \quad V \rightarrow V^* = -M^{-1}Y$$

$$V^* = \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} \frac{e\tau}{m} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} .$$
(57)

Allora,

$$\vec{j} = -n_e e V^* = \hat{\sigma} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\sigma_o}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_o = \frac{\mathbf{n}_e \mathbf{e}^2 \tau}{\mathbf{m}} .$$
(58)

L'angolo di Hall  $\alpha_H$  si definisce da :  $\cos \alpha_H = \vec{V}^* \cdot \vec{E} / (|\vec{V}^*| \cdot |\vec{E}|)$ . Poiche'

$$|\vec{V}^*|^2 = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} |E|^2 ; \quad \vec{V}^* \cdot \vec{E} = \frac{e}{m} \frac{\tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} |E|^2 .$$
(59)

Allora:  $\cos \alpha_H = \sqrt{1/1 + (\omega_c \tau)^2}$  e  $\tan \alpha_H = \omega_c \tau$ .

Nel caso non dissipativo ( $\omega_c \tau \rightarrow \infty$ ) si ha  $\alpha_H = \pi/2$  , e :

$$\hat{\sigma}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_H \\ \sigma_H & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_H = \frac{\sigma_o}{\omega_c \tau} = \frac{n_e e c}{B} .$$
(60)

Notare che

$$\hat{\rho} = \{\hat{\sigma}\}^{-1} = \sigma_o^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\hat{\rho}_\infty = \lim_{\omega_c \tau \rightarrow \infty} \hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_H \\ -\rho_H & 0 \end{pmatrix} ; \quad \rho_H = \sigma_H^{-1} .$$
(61)

Sia  $\hat{\rho}$  che  $\hat{\sigma}$  si annullano sulla diagonale! Le motivazioni sono diverse. Partiamo dall'osservazione che, ad un'indagine microscopica, risulta che gli elementi diagonali di  $\sigma$  sono legati alla densita' di stati al livello di Fermi.

Invece gli elementi fuori diagonale dipendono da proprietà lontane dal livello di Fermi (rilassamento e regole di somma ottiche). È interessante che, nell'invertire la matrice, sono questi ultimi a determinare gli elementi sulla diagonale della resistività. Se non c'è possibilità di rilassamento, allora la parte diagonale della resistività si annulla. Questo è secondo l'intuizione: un conduttore ideale ha resistività diagonale zero.

Quanto alla conducibilità: in assenza di campo magnetico si riduce alla sola parte diagonale e si annullerebbe se vi fosse una gap al livello di Fermi. In presenza di  $B$ , si deduce dall'eq.(55) che può aversi stazionarietà  $\dot{r} = 0$  e insieme non dissipazione ( $\tau \rightarrow \infty$ ) solo se  $\vec{E} \perp \vec{v}$  ( $\alpha_H = \pi/2$ ). Allora la parte diagonale si annulla. In questo caso (e solo in questo) è  $\sigma_{aa} = \rho_{aa} = 0$  e  $\rho_H = \sigma_H^{-1}$ .

### Effetto Hall quantistico

Con le moderne tecniche fotolitografiche è possibile creare eterostrutture a semiconduttore ( in questo caso solitamente di  $GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$  ) con differenti drogaggi, in modo che all'interfaccia si localizzi un gas di elettroni bidimensionale. In campioni simili, chiamati *Barra Hall*, la conducibilità Hall, in forte campo magnetico ( vari tesla) prende valori quantizzati con una precisione di  $1/10^{10}$  ( K. von Klitzing, G.Dorda e M.Pepper 1980) a temperature di circa  $1K$ .

*In un sistema bidimensionale la conducibilità coincide con la conduttanza*

La conducibilità è definita da  $j = \sigma E$ . La conduttanza da:  $I = GV$ . Dunque la conducibilità/resistività è una proprietà locale e si addiziona secondo la legge di Ohm: un campione di resistività  $\rho = 1\Omega/cm$  e di lunghezza  $L = 2cm$  ha una resistenza  $R = 2\Omega$ . La conduttanza / resistenza invece sono una proprietà globale e, per sistemi quantistici, anche non locale ( quindi dipendente dalla geometria ) a causa dell' interferenza quantistica tra gli elettroni e quindi in genere non segue la legge di Ohm. Per correnti attraverso dispositivi quantistici occorre dare direttamente la conduttanza del dispositivo. Le dimensioni di  $I \sim [e/t]$  e di  $J \sim [I/L^{d-1}]$  (  $d$  è la dimen-



sionalita' del campione) determinano la differenza:

$$\left[ \frac{e}{L^{d-1}t} \right] = [\sigma] \cdot \left[ \frac{V}{L} \right] , \quad (62)$$

da cui consegue che  $[\sigma] = [G] \cdot [L^{d-2}]$ . Dunque, per una striscia bidimensionale,  $[\sigma] \equiv [G]$ : e la conducibilita' e la conduttanza si danno in  $Ohm^{-1}$ .

*I gradini di conduttanza sono a valori multipli di  $R_K^{-1} \equiv e^2/h = 1/[25.8k\Omega]$*

In corrispondenza dei gradini di  $\rho_{xy}$ , la  $\rho_{xx}$  si annulla, indice del fatto che il sistema elettronico e' in uno stato coerente non dissipativo.

Se la conduttanza e' una proprieta' assoluta del campione, qualsiasi barra Hall presentera' i gradini agli stessi valori. Questa conduttanza quantistica e' universale (indipendente dal campione) e costituisce uno standard di incredibile precisione. Il suo ordine di grandezza consegue dai limiti estremi posti dall'indeterminazione sul tempo/energia di misura e dalla quantizzazione della carica. Infatti, data una distanza con differenza di potenziale  $V$ , il non equilibrio dovuto alla presenza del voltaggio da' luogo a incertezze sul valore dell'energia di un elettrone circa pari a  $\Delta\epsilon \sim eV$ . Non e' nemmeno concettualmente misurabile che quest'elettrone contribuisca con una corrente superiore a quella di una carica  $e$  che passa attraverso la distanza data in un tempo piu' breve di  $\Delta t$ , limitato dalla relazione  $\Delta\epsilon\Delta t \sim \hbar$ . Dunque si ha:

$$I = \frac{e}{\Delta t} \sim \frac{e}{\hbar} \Delta\epsilon = \frac{e^2}{\hbar} V \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}_K = \frac{\mathbf{e}^2}{\mathbf{h}} \quad (63)$$

Siano  $2N$  gli elettroni di conduzione della barra Hall. Se trattiamo una striscia bidimensionale, solo il  $k_z = 0$  sara' ammissibile (nessuna propagazione in  $z$  dell'onda di eq.(49)). I livelli di singola particella  $\epsilon_{nk_z=0}$  hanno degenerazione  $\mathcal{N}$ . Accomodando due elettroni in ciascun livello (a cominciare dal piu' basso) si avra' un riempimento  $\nu$  pari a  $N/\mathcal{N}$ . La parte intera di questo numero e' il numero di livelli di Landau completamente pieni, la parte decimale e' la frazione di riempimento dell'ultimo livello. Essi occuperanno stati di energia a cominciare dal livello piu' basso. Al crescere del campo  $B$ ,  $\mathcal{N}$  aumenta e, a parita' di  $N$  i livelli si svuotano man mano. La gap di energia tra un livello e l'altro,  $\hbar\omega_c$ , cresce parimenti (decine di  $eV$ ). I gradini si riscontrano solo a campi magnetici forti. Essi si trovano a riempimenti  $\nu$  interi ma anche a riempimenti frazionari (non tutti i frazionari!), pur se con precisione minore.

Il centro del gradino e' facilmente determinabile.

Dall'eq.(54) abbiamo, risolvendo rispetto a  $n = 2N/LW$  in funzione del riempimento

$$\sigma_{xy} = \frac{enc}{B} , \quad \nu = \frac{2N}{2\mathcal{N}} = \frac{\phi_0}{\Phi} \cdot 2N = \frac{hcn}{eB} = \text{intero}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h} . \quad (64)$$

Perche' ci sia il gradino agli interi e a certe frazioni e' meno ovvio. R.B.Laughlin ha trovato la spiegazione basata sull'invarianza di gauge. Trattandosi di un principio assolutamente generale, consegue una quantizzazione cosi' netta, universale.

Nel caso degli interi, il gas di elettroni e' assolutamente rigido, perche' i livelli di Landau occupati sono completamente pieni e le eccitazioni elettroniche richiederebbero energie  $\sim \hbar\omega_c$ , indisponibili a quelle temperature. E' questo il motivo per cui non puo' dissipare energia. La estensione del gradino ( la zona "piatta " al crescere di  $B$  ) e' dovuta alla presenza di molte impurezze nel campione.

Nel caso di riempimenti frazionari ( i piu' importanti sono  $1/3, 2/3, \dots, 2/7..etc$ ) la gap non c'e' nello spettro del sistema di particelle libere, ma e' creata dall'interazione  $e - e$ , al crescere del numero di impurezze, tende a deteriorarsi. I campioni, quindi, debbono essere abbastanza puliti.

Laughlin nel 1982 ha proposto una funzione d'onda a molti elettroni che si e' rivelata capace di descrivere l'effetto Hall quantistico.

## 5 Effetto Aharonov-Bohm

Il potenziale vettore  $\vec{A}$  e' osservabile in meccanica quantistica con un esperimento di interferenza di elettroni coerenti. L'effetto Aharonov-Bohm e' conseguenza dell'invarianza di gauge dell'equazione di Schrödinger. Data l'equazione:

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r}) , \quad (65)$$

la fisica che essa descrive non cambia se, data una funzione scalare  $\chi(\vec{r})$  sostituiamo

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \quad e \quad \psi(\vec{r}) \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c}\chi(\vec{r})} \psi(\vec{r}) . \quad (66)$$

Quanto sopra e' di facile verifica.

Consideriamo dunque un anello metallico di raggio  $R$  e inseriamo al centro un solenoide sottile e lunghissimo, cosicche' l'anello non possa vedere il campo  $B$  confinato com'e' solo nel solenoide, con le linee di forza che si chiudono all'infinito. L'integrale di linea di  $\vec{A}$  lungo l'anello deve dare il flusso  $\Phi$  intrappolato nell'anello:

$$\Phi = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{\nabla}\chi \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\chi R d\vartheta \quad (67)$$

Poiche' l'anello non sperimenta alcun campo magnetico il flusso intrappolato puo' essere descritto dal gradiente di una funzione scalare.  $\vartheta$  e' l'angolo azimutale lungo l'anello ( coordinate cilindriche). Dalla relazione data sopra si deduce che  $\chi(\vartheta) = \Phi\vartheta/2\pi$ . L'eq.(65) per  $\psi$  diventa tramite la trasformazione di gauge:

$$\left\{ \frac{1}{2m} p^2 + V(\vec{r}) \right\} \psi'(\vec{r}) = \epsilon \psi'(\vec{r}) , \quad \text{con} \quad \psi(\vec{r}) = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\Phi\frac{\vartheta}{2\pi}} \psi'(\vec{r}) .$$

Dunque, poiche' l'elettrone non risente del campo magnetico, la sua funzione d'onda in essenza non e' diversa da  $\psi'$ . Tuttavia, se l' elettrone percorre mezzo anello nella parte superiore ( ad es. da destra verso sinistra:  $u : \vartheta \in (0, \pi)$ ), esso accumula una fase  $\chi_u = \frac{e}{2\hbar c}\Phi$ . Se lo percorre nel ramo inferiore (  $d : \vartheta \in (0, -\pi)$ ), esso accumula una fase  $\chi_d = -\frac{e}{2\hbar c}\Phi$ . Supponiamo di trasmettere l'elettrone attraverso l'anello. Al punto di uscita  $a$  le due onde interferiranno e la trasmissione sara':

$$T = |\psi(a)|^2 = |\psi'(a)|^2 \left| e^{i\frac{e}{2\hbar c}\Phi} + e^{-i\frac{e}{2\hbar c}\Phi} \right|^2 = 2 |\psi'(a)|^2 \left[ 1 + \cos \frac{e}{\hbar c}\Phi \right] .$$

La trasmissione oscilla con il campo magntico  $B$  all'interno del solenoide con frequenza  $\Phi/\phi_0$ .

Tuttavia, cio' puo' accadere solo se l'elettrone mantiene la coerenza di fase nel suo viaggio attraverso l'anello. L'anello deve quindi essere piccolo: mesoscopico ( raggio  $0.1 \mu m$  circa ).

A basse temperature quasi tutti i metalli sono superconduttori. Gli elettroni entrano in uno stato correlato e sono totalmente coerenti. Formano quindi un sistema rigido e l'anello non deve essere piccolo ma puo' essere macroscopico. Il fluido elettronico diventa quindi un diamagnete perfetto ( come l'elettrone singolo libero ) e non ammette cambi di flusso di  $B$ . E'

questa l'origine del fenomeno della levitazione magnetica. Non e' quindi possibile intrappolare un flusso in un anello isolato se non portandolo allo stato normale ( alzando la temperatura ) inserendo il solenoide e riportandolo successivamente allo stato superconduttore. A quel punto il flusso e' bloccato e autosostenuto da una corrente permanente che circola nell'anello. Il solenoide si puo' anche spegnere e togliere. La corrente si ricava dalla funzione d'onda trovata sopra che e' uguale per tutti i portatori di carica (coerenza dello stato superconduttivo). Poiche' l'anello e' isolato, la funzione  $\psi$  deve pero', in aggiunta, soddisfare condizioni periodiche al contorno. Dunque, poiche'  $\psi'$  non dipende dal numero dei giri fatti attorno all'anello (e' monodroma), ma solo la fase  $\chi$  dipende , deve essere:

$$\psi(\vartheta = 0) = \psi(\vartheta = 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \chi(\vartheta = 2\pi) - \chi(\vartheta = 0) = 2\pi\nu \quad \nu \text{ intero.} \quad (68)$$

Questa condizione si traduce in una quantizzazione macroscopica del flusso intrappolabile in un anello superconduttore:

$$\frac{e^*}{\hbar c} \Phi = 2\pi\nu \quad (69)$$

La verifica sperimentale mostra che per soddisfare la quantizzazione occorre mettere  $e^* = 2e$  al posto di  $e$ : i portatori di carica sono coppie di elettroni! Una spiegazione approssimativa dello stato coerente superconduttivo e' la condensazione di Bose di coppie di elettroni, tutte in un uguale stato di singoletto. La  $\psi$  data sopra sarebbe quindi la funzione d'onda di coppia, e la densita' dei  $2N$  elettroni superconduttivi sarebbe  $n_s = N|\psi|^2$ . La quantizzazione del flusso negli anelli superconduttivi e' un effetto Aharonov-Bohm macroscopico.