1 Radiazione elettromagnetica

1.1 dizionario

Equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J}\end{aligned} \tag{1}$$

con

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i\delta(\vec{x}-\vec{r}_i); \quad J(\vec{x}) = \sum_i q_i\vec{v}_i\delta(\vec{x}-\vec{r}_i); \\ dimensioni\ di\ \ E = \frac{e}{l^2} = [B]; \quad [J] = \frac{e}{tl^2}; \quad [I] = \frac{e}{t}\end{aligned} \tag{2}$$

dove I ' la corrente. Inoltre il potenziale vettore A e' tale che

$$\int \vec{A}\cdot d\vec{l} = \Phi \tag{3}$$

con $[\Phi] = e$ e $[A] = e/l$ ed il quanto di flusso e' $\phi_o = hc/e = 4.136 \cdot 10^{-7} gausscm^2$ ($1Tesla = 10^4 gauss$) I fotoni che interagiscono con la materia hanno $\hbar\omega = hc/\lambda$ con

$radiazione$	λ	ν	$\hbar\omega$
γ	$10^{-3}\mathring{A}$		$14\,MeV$
X	$1\mathring{A}$		$14\,keV$
$ultravioletto$	$40\mathring{A}$	$7.5\,10^{16}sec^{-1}$	$240\,eV$
$visibile$	$4000\mathring{A}$	$7.5\,10^{14}sec^{-1}$	$2.4\,eV$
$infrarosso$	$7000\mathring{A}$	$4\,10^{14}sec^{-1}$	
$microonde$	$0.1\,m \div 1\,;mm$	$2 \div 300\,GHz$	$0.02 \div 1.8\,meV$

(4)

- γ emessi da nuclei radioattivi (es: $^{60}_{27}Co$ (cobaltoterapia dei tumori), ^{137}Cs tristemente famoso per l'incidente di Chernobyl)

- medie energie : effetto Compton (100 $keV \div 2MeV$). $\lambda_c = \hbar/mc = 0.0242 \mathring{A}$.
- effetto fotoelettrico ($\sim 10\ eV$)
- transizioni elettroniche negli atomi (in genere $< 10\ eV$).

La potenza di emissione di una sorgente elettromagnetica e':

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\int_\Gamma \vec{S} \cdot \hat{n}\, dA \tag{5}$$

dove l'energia che esce dalla superficie Γ e' descritta dal vettore di Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}^* \tag{6}$$

Intensita' di luce $I = \vec{S} \cdot \vec{n}$ (energia irraggiata per unita' di tempo e di area (e mediata su un periodo)).

Es: intensita' di luce sul bersaglio:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \left[\frac{\mathcal{E}}{t}\frac{1}{l^2}\right] = 0.33 \cdot 10^{-5} \frac{Joule}{sec\, m^2}$$

per una sorgente debole ($P = 0.1mW$ a $R = 5m$ di distanza dal bersaglio).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A};$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, \mathbf{t}) = \hat{\epsilon}\mathbf{A_o}(\omega)\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}} - \omega \mathbf{t})} \tag{7}$$

La gauge $\varphi = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \to \ \vec{k} \cdot \hat{\epsilon} = 0$. In trasformate di Fourier:

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{i\omega}{c}\hat{\epsilon}A_o(\omega); \quad \vec{B}(\vec{k}, \omega) = i\vec{k} \times \hat{\epsilon}\, A_o(\omega);$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}^* = \frac{c}{4\pi} 2 \frac{\omega^2}{c^2} |A_o(\omega)|^2 \hat{k} \tag{8}$$

Il fattore 2 dell'ultima formula nasce dall'assumere che si abbiano due componenti $A_o(\pm\omega)$ (per dare campi osservabili reali), e che contribuiscano tutte e due. In genere la radiazione non e' monocromatica (cioe' e' una somma di frequenze in un intervallo) ma, nel caso di luce incoerente, la media temporale, sempre implicita, distrugge i termini di interferenza.

Densita' di energia

$$\rho(\omega) = \frac{1}{8\pi}\left[|E|^2 + |B|^2\right] = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)|A_o(\omega)|^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi}\frac{\omega^{\mathbf{2}}}{\mathbf{c^2}}|\mathbf{A_o}(\omega)|^{\mathbf{2}} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{I}(\omega) = \rho(\omega)\ \mathbf{c} \tag{9}$$

Le dimensioni sono $\frac{e^2}{l^2}\frac{1}{l^2} = \frac{e^2}{l}\frac{1}{\mathcal{V}}$.

Corrispondenza con il caso quantistico:

$$\rho(\omega) = \frac{N(\omega)}{\mathcal{V}}\,\hbar\omega\ . \tag{10}$$

$N(\omega)$ e' il numero di fotoni di energia ω.In definitiva:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \hat{\epsilon}\left(\frac{N(\omega)\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_\omega)} \tag{11}$$

Il flusso di fotoni incidenti e' $j = I(\omega)/\hbar\omega$ $([1/l^2 t])$ e, detta σ_{ba} la sezione d'urto del processo $a \rightarrow b$, la probabilita' di transizione per unita' di tempo per atomo $W_{ba} = j\sigma_{ba}$.

2 Irraggiamento e scattering classico

Una carica accelerata irraggia. Sia non relativistica ($\beta << 1$). Il campo di radiazione classico, a grande distanza $r >> \lambda c/v$) e':

$$\vec{E}_{rad}(t) = \left[\frac{q}{rc^2}\,\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\vec{v}})\right]_{ret}\ , \tag{12}$$

dove ret indica che v e' al tempo $t_o = t - \vec{r}\cdot\hat{n}/c)$.

Poiche' $\vec{B}_{rad} = \hat{n}\times\vec{E}_{rad}$, allora $|\vec{B}_{rad}| = |\vec{E}_{rad}| = \frac{q\dot{v}}{rc^2}\sin\vartheta$, con ϑ l'angolo tra la velocita' e la direzione di $\vec{r}$.

Consegue che

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}|E_{rad}|^2\hat{n} = \frac{c}{4\pi}\,\frac{q^2\dot{v}^2}{r^2c^4}\,\sin\vartheta\,\hat{n} \tag{13}$$

La potenza emessa:

$$P = \int_{4\pi} \vec{S} \cdot \hat{n}\, r^2 d\Omega = 2\, \frac{q^2 \dot{v}^2}{3c^3} \tag{14}$$

(formula di Larmor).

L'approssimazione di dipolo $d = q\vec{r}$:

$$P = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}$$

$$dP = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \;\; \sin\vartheta \, d\Omega \tag{15}$$

Scattering Thompson

Investiamo un elettrone libero con un'onda piana:

$$m\ddot{r} = eE_o \sin\omega t \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{dP} = \left(\frac{\mathbf{eE_o}}{\mathbf{m}}\right)^{\mathbf{2}} \frac{\mathbf{e^2}}{\mathbf{4\pi c^3}} \;\; \sin\vartheta \, \mathbf{d\Omega} \;\cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \mathbf{dt} \;\sin^{\mathbf{2}} \omega\mathbf{t} \tag{16}$$

La media sul periodo indicata vale 1/2.

La sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{energia\ radiante\ /\ (sec \cdot angolo\ solido)}{flusso\ di\ energia\ incidente\ /\ (area \cdot sec)} \tag{17}$$

(il denominatore, nel caso di onda piana e' il vettore di Poynting mediato sul tempo: $c|E_o|^2/8\pi$). Consegue:

$$dP = \frac{c}{8\pi}\, |E_o|^2\, \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}} \pi \mathbf{r_e^2} \;\; ; \;\; \mathbf{r_e} = \frac{\mathbf{e^2}}{\mathbf{mc^2}}$$

$$con \quad P = \frac{c}{8\pi}\, |E_o|^2\, \sigma_T \; . \tag{18}$$

r_e e' il raggio classico dell'elettrone ($2.8\, 10^{-13} cm$).

Emissione stimolata

Descriviamo l'elettrone legato nell'atomo come oscillante armonicamente alla frequenza ω_o e forzato dalla radiazione incidente:

$$\ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_o^2 r = -\frac{eE_o}{m} e^{i\omega t} \tag{19}$$

Soluzione stazionaria e':

$$r = r_o\, e^{i\omega t} \equiv |r_o| e^{i\omega t + i\delta}$$

$$r_o = -\frac{eE_o}{m} \left(\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right)^{-1} \quad ; \quad \delta = \arctan \frac{\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_o^2} \,. \tag{20}$$

La potenza emessa si ricava dall'eq. di Larmor mediata su un periodo ($T^{-1} \int dt \sin^2 \omega t = 1/2$):

$$P = \frac{e^2 |r_e|^2\, \omega^4}{3c^3} = r_e^2 \frac{E_o^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \tag{21}$$

Alle basse frequenze ($\omega << \omega_o$) :

$$\sigma \sim \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_o^4} \tag{22}$$

Rayleigh usa questo andamento per spiegare il colore azzurro del cielo.

Per $\omega \approx \omega_o$, usando $\omega^2 - \omega_o^2 \sim 2\omega_o(\omega - \omega_o)$, si ottiene un profilo lorenziano:

$$\sigma \sim 6\pi \lambda_o^2 \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_o)^2 + (\gamma/2)^2} \,, \tag{23}$$

dove la lorenziana normalizzata e' $\mathcal{L}(\omega - \omega_o) = (\gamma/2\pi)/[(\omega - \omega_o)^2 + (\gamma/2)^2]$.

Polarizzabilita' di un dielettrico

Classicamente la polarizzabilita' elettrica di un mezzo materiale con N molecole per unita' di volume, con Z elettroni per molecola e'

$$\mathcal{P} = -e \sum_i \vec{r}_i = \chi \vec{E} \tag{24}$$

dove χ e' la suscettivita' elettrica. Dalla prima delle eq.(20) consegue che

$$\chi = \frac{Ne^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i} \,. \tag{25}$$

dove f_i e' la "forza di oscillatore" con la regola di somma $\sum_i f_i = Z$. La definizione di f ha un analogo quantistico (vedi seguito)

3 Probabilita' di transizione quantistica

L'equazione di Schrödinger per l'elettrone (carica $-e$), nella gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, e' ($p \rightarrow p + eA/c$):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \frac{p^2}{2m} + i\hbar \, \frac{e}{mc} \, \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{e^2}{2mc^2} \, A^2 + \frac{e}{mc} \, \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right\} \psi + V(\vec{r})\psi \qquad (26)$$

Il termine in A^2 e' trascurato (approssimazione lineare), e cosi' il termine di accoppiamento con lo spin $\sigma \cdot B$. Infatti $\sigma \sim \hbar$ e $B \sim kA$. Ma $\hbar k/p << 1$ perche' $\hbar/p \sim a_B$ e $k = 2\pi/\lambda$ con $a_B/\lambda << 1$.

L'hamiltoniana di perturbazione e' quindi $H'(t) = i(\hbar e/mc)\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}$ e i suoi elementi di matrice tra gli stati $|a>, |b>$ sono

$$H'_{ba}(t) \equiv \langle b|H'|a\rangle, \quad \omega_{ba} = \epsilon_b - \epsilon_a \qquad (27)$$

La probabilita' di transizione dallo stato $|a>$ allo stato $|b>$ e' per la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo:

$$P_{ba}(t) = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega_{ba}t'} H'_{ba}(t') \right|^2 \qquad (28)$$

Per una perturbazione indipendente dal tempo, che agisce in un intervallo t:

$$P_{ba}(t) = \frac{1}{\hbar^2} |H'_{ba}|^2 \, 2F(t, \omega_{ba})$$
$$F(t, \omega_{ba}) = \frac{1 - \cos \omega_{ba} t}{\omega_{ba}^2} \qquad (29)$$

Nel limite $t \rightarrow \infty$ il picco ad $\omega_{ba} \sim 0$ si stringe come $2\pi/t$ e si alza come $t^2/2$, con un'area $\sim \pi \, t$, cosicche'

$$lim_{t\rightarrow\infty} F(t, \omega_{ba}) = \pi t \, \delta(\omega_{ba})$$

e si ottiene la regola aurea di Fermi per la la probabilita'di transizione nell'unita' di tempo, W_{ba}:

$$W_{ba} = lim_{t\rightarrow\infty} \frac{P_{ba}(t)}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{ba}|^2 \, \delta(\epsilon_b - \epsilon_a) \, . \qquad (30)$$

Nel nostro caso, assumendo un pacchetto d'onde incidente, ovvero una radiazione in un intervallo di frequenze $\Delta\omega$ con un fattore di forma $g(\omega)$ (nota: $\int d\omega\; g(\omega)$ e' adimensionale), nel valore assoluto di eq.(28) compare:

$$\frac{e}{mc}\int_{\Delta\omega} d\omega\; g(\omega) A_o(\omega) e^{i\delta_\omega}\; \langle b|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\epsilon}\cdot\vec{\nabla}|a\rangle \int_0^t e^{-i(\omega-\omega_{ba})\,t'}\; dt' + \\ \frac{e}{mc}\int_{\Delta\omega} d\omega\; g(\omega) A_o^*(\omega) e^{-i\delta_\omega}\; \langle b|e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\epsilon}^*\cdot\vec{\nabla}|a\rangle \int_0^t e^{i(\omega+\omega_{ba})\,t'}\; dt' \qquad (31)$$

Per luce incoerente, al solito, i termini di interferenza mediano a zero (all' integrale sul tempo contribuiscono molti treni d'onda diversi. L'integrale comporta quindi inevitabilmente una media sulle fasi δ_ω con fasi variabili a caso nel tempo) e si ha:

$$W_{ba} = \frac{2\pi e^2}{m^2c^2}\int_{\Delta\omega} d\omega\; g^2(\omega)\; |A_o(\omega)|^2\; \left|\langle b|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\epsilon}\cdot\vec{\nabla}|a\rangle\right|^2\; \delta(\omega-\omega_{ba})\; + \\ \frac{2\pi e^2}{m^2c^2}\int_{\Delta\omega} d\omega\; g^2(\omega)\; |A_o^*(\omega)|^2\; \left|\langle b|e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\epsilon}^*\cdot\vec{\nabla}|a\rangle\right|^2\; \delta(\omega+\omega_{ba}) \qquad (32)$$

Si noti che il primo e' un termine di assorbimento con una condizione di conservazione dell'energia $\epsilon_b = \epsilon_a + \hbar\omega$, il secondo di emissione stimolata con $\epsilon_b = \epsilon_a - \hbar\omega$.

Inoltre:

$$(\mathcal{M}_{ba}(-k))^* \equiv \left(\langle b|e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\epsilon}^*\cdot\vec{\nabla}|a\rangle\right)^* = -\langle a|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\epsilon}\cdot\vec{\nabla}|b\rangle \equiv -\mathcal{M}_{ab}(k), \\ 2|A_o(\omega)|^2 = \frac{4\pi c}{\omega^2} I(\omega). \qquad (33)$$

Quindi, assumendo una densita' di stati finali $n(\epsilon_{b(a)}/\hbar)$ accessibili per conservazione di energia, $n(\omega_{b(a)}) = \int_{\Delta\omega} d\omega\, g^2(\omega)\; \delta(\omega-\omega_{ba})$ (le dimensioni sono $[n]\sim[t]$) si ha :

$$W_{ba} = 4\pi^2 \frac{e^2}{m^2c}\, \frac{I(\omega_{ba})}{\omega_{ba}^2}\; n(\epsilon_b/\hbar)\, |\mathcal{M}_{ba}|^2 \quad \textit{assorbimento} \\ W_{ab} = 4\pi^2 \frac{e^2}{m^2c}\, \frac{I(\omega_{ba})}{\omega_{ba}^2}\; n(\epsilon_a/\hbar)\, |\mathcal{M}_{ab}|^2 \quad \textit{emissione stimolata} \qquad (34)$$

Emissione spontanea

Ci sono tre modifiche alla formula dell'emissione stimolata:

- L'emissione spontanea avviene, in genere, verso un unico stato.
- La QED mostra che ($\mathcal{V}$ e' il volume):

$$I(\omega) = \rho(\omega)c = N(\omega)c\frac{\hbar\omega}{\mathcal{V}} \qquad \Rightarrow \quad (\mathbf{N}(\omega) + \mathbf{1})\ \mathbf{c}\frac{\boldsymbol{\hbar}\omega}{\mathcal{V}} \tag{35}$$

  Se vi e' un vuoto di radiazione $\rightarrow N(\omega) = 0$ ma resta l'1 .

- Bisogna considerare che i fotoni vengono emessi in tutte le direzioni. Cosi', bisogna sommare su tutti gli stati fotonici permessi tra Ω e $\Omega + d\Omega$.

Cosi' il *rate* di transizione fisico e':

$$W^s_{ab}(\Omega)d\Omega = \int W^s_{ab}(\omega,\Omega)\ n_{ph}(\omega)d\omega d\Omega$$

$$con \quad W^s_{ab}(\omega,\Omega) = \frac{4\pi^2}{\mathcal{V}}\frac{e^2}{m^2}\frac{\hbar}{|\omega_{ba}|}\ |\mathcal{M}_{ba}(\omega/c)|^2\ \delta(\omega + \omega_{ba})\ ,$$

$$n_{ph}(\omega)d\omega d\Omega = d\,numero = dn_x dn_y dn_z = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\,k^2 dk d\Omega = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\,\frac{\omega^2}{c^3}\,d\omega d\Omega$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{W^s_{ab}}(\boldsymbol{\Omega})\ \mathbf{d}\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi}\,\frac{\mathbf{e^2}\boldsymbol{\hbar}}{\mathbf{m^2c^3}}\,|\omega_{\mathbf{ba}}|\ |\mathcal{M}_{\mathbf{ba}}(-\omega_{\mathbf{ba}}/\mathbf{c})|^{\mathbf{2}}\ \mathbf{d}\boldsymbol{\Omega}\ . \tag{36}$$

3.1 Approssimazione di dipolo

Poiche' e' $\lambda >> a_B$, e' possibile porre in $\mathcal{M}_{ba}$: $\quad e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1$.

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = \frac{m}{i\hbar}\,[\vec{r}\,, H_o] \qquad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathbf{ba}} = \frac{\mathbf{m}}{\boldsymbol{\hbar}^{\mathbf{2}}}\,(\epsilon_{\mathbf{a}} - \epsilon_{\mathbf{b}})\ \hat{\epsilon}\cdot\langle\mathbf{b}|\vec{\mathbf{r}}|\mathbf{a}\rangle \tag{37}$$

L' emissione stimolata diventa:

$$W_{ab} = 4\pi^2\frac{e^2}{\hbar^2}\,\frac{I(\omega_{ba})}{c}\,n(\epsilon_a/\hbar)\,|\hat{\epsilon}\cdot\vec{r}_{ab}|^2 \equiv B_{ba}\rho(\omega_{ba})\ , \tag{38}$$

dove si e' definito il coefficiente di Einstein per l'emissione stimolata B_{ba}. Notare che $|\hat{\epsilon}\cdot\vec{r}_{ab}|^2 = |r_{ab}|^2\,\cos^2\vartheta$. Per luce non polarizzata la media da' $\overline{\cos^2\vartheta} = 2/3$.

L'emissione spontanea, dall'eq.(36):

$$W^s_{ab}(\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\, \frac{e^2\hbar}{m^2c^3}\, |\omega_{ba}|\ \ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ d\Omega\ ,$$

$$|\mathcal{M}_{ba}|^2 = \left(\frac{m\omega_{ba}}{\hbar}\right)^2\ |r_{ab}|^2\ \cos^2\vartheta\ . \tag{39}$$

Il *rate* di transizione totale, con un fattore 2 per le due polarizzazioni, e':

$$W^s_{ab} = 2\int W^s_{ab}(\Omega)\, d\Omega = 2\frac{1}{2\pi}\, \frac{e^2\hbar}{m^2c^3}\, \frac{m^2}{\hbar^2}\ |\omega_{ba}|^3\ |r_{ab}|^2\ \frac{4\pi}{3} =$$

$$\frac{4}{3}\, \frac{e^2}{\hbar c^3}\ |\omega_{ba}|^3\ |r_{ab}|^2\ \equiv A_{ab}\ . \tag{40}$$

Questo definisce il coefficiente di Einstein (vedi seguito) A_{ab} . Il rapporto e' :

$$\frac{A_{ab}}{B_{ba}} = \frac{\hbar}{c^3}\, \frac{|\omega|^3}{\pi^2}\ , \tag{41}$$

che e' lo stesso della teoria fenomenologica di Einstein.

Si definisce *forza dell'oscillatore* f la quantita':

$$f_{ba} = \frac{2m\omega_{ba}}{\hbar}\ |\langle b|\hat{\epsilon}\cdot\vec{r}|a\rangle|^2\ , \tag{42}$$

per cui l'eq.(39) prende la forma (un fattore 2 per le due polarizzazioni e $\int d\Omega = 4\pi$ se il fattore dovuto alla media $\overline{\cos^2\vartheta}$ e' incluso in f):

$$W^s_{ab} = \frac{2e^2\omega^2}{mc^3}\ f \tag{43}$$

in analogia col caso classico.

Il calcolo dell'elemento di matrice $r_{ab} = \langle b|\vec{r}|a\rangle \equiv \langle n'l'm'|\vec{r}|nlm\rangle$ per l'atomo a simmetria centrale fornisce le *regole di selezione di dipolo elettrico.*

In armoniche sferiche ($\overline{m} \equiv -m$):

$$z = r\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{10}$$

$$x = r\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_{11} + Y_{1\overline{1}})$$

$$y = -ir\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_{11} - Y_{1\overline{1}})\ . \tag{44}$$

Ad esempio :

$$\langle n'l'm'|x|nlm\rangle = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \int r^2dr\; rR_{n'l'}(r)R_{nl}(r) \int d\Omega\, Y^*_{l'm'}\left(Y_{11}+Y_{1\bar{1}}\right)Y_{lm}\;, \tag{45}$$

dove l'integrale sull'angolo solido e' non nullo solo se:

$$\begin{aligned} l' &= l \pm 1 \\ m' &= m \pm 1 \end{aligned} \tag{46}$$

Nel caso di $\langle n'l'm'|z|nlm\rangle$ si ottiene invece:

$$\begin{aligned} l' &= l \pm 1 \\ m' &= m \end{aligned} \tag{47}$$

Le regole di selezione sono allora:

$l' = l \pm 1$, $m' - m = -1, 0, 1$.

Notare che gli stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$ debbono avere parita' opposta.

Parita' : $\vec{r} \to -\vec{r}$. Poiche' $Y_{lm}(\Omega_{\bar{r}}) = (-1)^l Y_{lm}(\Omega_r)$, allora $r_{ba} \to (-1)^{l+l'+1} r_{ba}$ e poiche' debbono essere identici, deve essere $l + l' + 1 =$ *pari*.

Luce polarizzata

Sia $\hat{k}$ la direzione di propagazione dell'onda: $\hat{k} = (k_x, k_y, k_z) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$. Costruiamo le due direzioni di polarizzazione ortogonali $\hat{\epsilon}^{(1)} \times \hat{\epsilon}^{(2)} = \hat{k}$, $\hat{\epsilon}^{(1)} \cdot \hat{\epsilon}^{(2)} = 0$:

$$\hat{\epsilon}^{(1)} = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)\;, \quad \hat{\epsilon}^{(2)} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \tag{48}$$

La polarizzazione circolare sinistra e' $\hat{\epsilon}^{(L)} = (\hat{\epsilon}^{(1)} + i\hat{\epsilon}^{(2)})/\sqrt{2}$ e la polarizzazione circolare destra e' $\hat{\epsilon}^{(R)} = (\hat{\epsilon}^{(1)} - i\hat{\epsilon}^{(2)})/\sqrt{2}$.

Nel caso di propagazione lungo $\hat{z}$ e' $\vartheta = 0$ e si ha polarizzazione longitudinale lungo $\hat{z}$ e:

$$\hat{\epsilon}^{(L)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + i\hat{y}\right)\;, \quad \hat{\epsilon}^{(R)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - i\hat{y}\right)\;. \tag{49}$$

Una polarizzazione piana si ha con $\hat{\epsilon}^{(L)} + \hat{\epsilon}^{(R)}$, una polarizzazione generica e' una combinazione lineare $a_L\hat{\epsilon}^{(L)} + a_R\hat{\epsilon}^{(R)}$.

Parimenti

$$\hat{r} = (r_1, r_0, r_{\bar{1}}) = (x + iy, z, x - iy) \propto (Y_{11}, Y_{10}, Y_{1\bar{1}})\;. \tag{50}$$

3.2 Lo spin del fotone

In approssimazione di dipolo, $\hat{\epsilon}^{(L)} \cdot \vec{r}_{ba}$ e' l'assorbimento di un fotone polarizzato circolarmente a sinistra ($L.h.$); $(\hat{\epsilon}^{(L)})^* \cdot (\vec{r}_{ba})^*$ e' l'emissione di un fotone polarizzato circolarmente a sinistra ($L.h.$). Infatti, un fotone $L.h.$ emesso e propagantesi in direzione $\hat{z}$ da' :

$$(\hat{\epsilon}^{(L)})^* \cdot (\vec{r}_{ba})^* = \; fotone\, L.h. + \; (\langle b|x+iy|a\rangle)^* \equiv \; fotone\, L.h. + \; \langle a|x-iy|b\rangle \,. \tag{51}$$

(il + e' assolutamente simbolico). Il momento angolare di $|b\rangle$ e' $m\hbar$, il momento trasferito e' $q = -1$(unita' $\hbar$), il momento angolare di $|a\rangle$ dovra' essere, per la conservazione del momento $(m - 1)\hbar$. Quindi il momento angolare del"atomo lungo $\hat{z}$ e' diminuito di $\hbar$, ne consegue che il fotone $L.h.$ emesso ha momento angolare $\hbar$ lungo $\hat{z}$.

Poiche' fotoni che viaggiano lungo $\hat{z}$ non possono avere un momento angolare lungo $\hat{z}$, si tratta evidentemente di un grado di liberta' di spin. Infatti, in approssimazione di dipolo, i fotoni non possono avere momento orbitale lungo nessuna delle tre direzioni (nota che il potenziale vettore scelto ha $e^{ik\cdot r} \approx 1$. D'altra parte Δl dell'atomo e' $= \pm 1$, per cui lo spin del fotone e' $s = 1$ con $s_z = \pm 1$. Poiche' l'onda e.m. e' trasversa, non vi puo' essere $s_z = 0$.

Esperimento di Beth (1936)

Data una radiazione di densita' di energia $\rho(\omega)$, una lamina converte fotoni $L.h.$ in fotoni $R.h.$. La radiazione polarizzata $L.h.$ porta momento angolare $M_z = N(\omega)\hbar = \rho\mathcal{V}/\omega$. Il momento ceduto alla lamina sara' $\Delta M_z = 2N(\omega)\hbar$. Se la lamina di area S e' sospesa con un filo, il momento della forza ("torque ") sara':

$$torque \; = \frac{\Delta M_z}{\Delta t} = 2\frac{\rho(\omega)\mathcal{V}}{c\Delta t}\;\frac{c}{\omega} = 2\frac{\rho(\omega)\;c}{\omega}\;S \;\;. \tag{52}$$

Un'altra osservazione:

A parte deboli effetti di interazioni deboli, la parita' di un sistema di elettroni + radiazione si conserva. Poiche' la radiazione induce un cambio di parita' nello stato dell'atomo, il fotone ha parita' negativa.

3.3 Oltre l'approssimazione di dipolo

Transizioni che possono essere proibite per dipolo elettrico, possono essere permesse all'ordine successivo di approssimazione $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \ldots$):

$$\langle b|(i\vec{k}\cdot\vec{r})\ \hat{\epsilon}\cdot\vec{\nabla}|a\rangle \tag{53}$$

Nel caso in cui $\hat{k} \parallel \hat{z}$ e $\hat{\epsilon} \parallel \hat{x}$ l'elemento di matrice sara':

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ba} = \frac{m\omega_{ba}}{\hbar c}\ \langle b|z\dot{x}|a\rangle = \\ -\frac{m\omega_{ba}}{\hbar c}\ \langle b|L_y|a\rangle - i\frac{m\omega_{ba}^2}{\hbar c}\ \langle b|z\ x|a\rangle \end{aligned} \tag{54}$$

dove $L_y = \dot{x}\ z - x\ \dot{z}$.

Il primo termine e' detto di dipolo magnetico e prevede le regole di selezione

$$\begin{aligned} &\Delta l = 0 \\ &\Delta j = 0, \pm 1 \\ &\Delta m_j = 0, \pm 1\ \ . \end{aligned} \tag{55}$$

Il secondo termine e' di quadrupolo elettrico con regole di selezione

$$\begin{aligned} &\Delta l = \pm 2, 0 \quad (\mathit{ma\ e'\ vietata}\quad l = l' = 0\ ) \\ &\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2\ \ . \end{aligned} \tag{56}$$

3.4 Regole di selezione per atomi a molti elettroni

Le regole date sopra sono state ottenute per elettroni indipendenti in un potenziale centrale. Includendo l'interazione a molti corpi e lo spin-orbita gli stati sono autostati simultanei di L^2, S^2, J^2, J_z. L' operatore momento di dipolo $\vec{D} = -e\sum_i \vec{r_i}$ ha elementi di matrice :

$$\langle L, S, J, M_J|\vec{D}|L', S', J', M_J'\rangle \tag{57}$$

ha regole di selezione

$$\begin{aligned} &\Delta S = 0 \\ &\Delta L = 0, \pm 1\ \ (\mathit{ma\ e'\ vietata}\quad L = L' = 0\ ) \\ &\Delta J = 0, \pm 1 \\ &\Delta M_J = 0, \pm 1\ \ (\mathit{ma\ e'\ vietata}\quad J = J' = 0\ ) \end{aligned} \tag{58}$$

Valgono le regole sulla parita' (vedi sopra) ma $\Delta L = 0$ e' consentita perche' gli stati non hanno parita' $(-1)^L$ come nel caso di singolo elettrone in un campo centrale. Inoltre e' consentita $\Delta J = 0$ perche' la transizione potrebbe coinvolgere separatamente il momento angolare L e lo spin S in modo da non cambiare J. Tuttavia $J = J' = 0$ comporta anche $M = M' = 0$ e non c'e' momento di dipolo.

Per la derivazione di queste regole, vedere ad esempio le note del Prof. V.Marigliano.

3.5 Fenomenologia dei processi radiativi all'equilibrio

Esponiamo brevemente la teoria fenomenologica di Einstein per un gas di atomi in una cavita', in equilibrio termico con la radiazione $e-m$ di corpo nero.

Consideriamo due soli stati atomici $|b>$, $|a>$, di energie E_b,E_a, con $E_b > E_a$. Sia B_{ba} il coefficiente di assorbimento, B_{ab} quello di emissione stimolata e A_{ab} il coefficiente di emissione spontanea. Dette N_a, N_b le popolazioni dei due livelli, le equazioni dei *rate* di Einstein sono:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{ba} &= \frac{\dot{N}_b - \dot{N}_a}{2} = \rho(\omega_{ba}) B_{ba} N_a \\ \dot{N}_{ab} &= \frac{\dot{N}_a - \dot{N}_b}{2} = A_{ab} N_b + \rho(\omega_{ba}) B_{ab} N_b \end{aligned} \tag{59}$$

Si e' assunto che la probabilita' di transizione stimolata, ad esempio W_{ba} (assorbimento) e' proporzionale alla densita' di energia irradiata, alla frequenza della transizione: $W_{ba} = B_{ba}\ \rho(\omega_{ba})$.

All' equilibrio termico, l'uguaglianza impone che

$$1 = \frac{N_b}{N_a}\left(\frac{A_{ab}}{\rho B_{ba}} + \frac{B_{ab}}{B_{ba}}\right) \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{-\beta(\mathbf{E_a}-\mathbf{E_b})} = \frac{\mathbf{A_{ab}} + \rho \mathbf{B_{ab}}}{\rho \mathbf{B_{ba}}}$$

$$i.e. \quad \rho(\omega_{ba}) = \frac{A_{ab}}{B_{ba}\, e^{\beta\hbar\omega_{ba}} - B_{ab}}$$

$$ma \quad \rho(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{V}}\, 2 \int_{4\pi} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\, \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{c^3}\, d\Omega\, d\omega = \frac{\hbar\omega_{ba}^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\, d\omega \tag{60}$$

da cui consegue: $B_{ba} = B_{ab}$ e

$$\frac{A_{ab}}{B_{ab}} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\, \omega_{ab}^3 \ , \tag{61}$$

come gia' trovato precedentemente.

4 Effetto laser

Laser e' acronimo per *light amplification by stimulated emission of radiation-*

4.1 Radiazione emessa da una cavita'

Consideriamo N atomi a due livelli a, b $(E_b > E_a)$. La radiazione incidente, di frequenza $\omega = \omega_{ba}$ e propagazione lungo $\hat{z}$, cambiera' la popolazione dei due livelli ($N_a + N_b = N$) nel tempo secondo le equazioni di *rate* eq.(59). Sottraendo la prima dalla seconda, si ha $(B_{ab} = B_{ba} \equiv B)$:

$$-\left(\dot{N}_b - \dot{N}_a\right) = -2\dot{N}_b = A_{ab}N_b + (N_b - N_a)\ B\rho(\omega_{ba}) \tag{62}$$

Nella direzione della radiazione incidente verra' emessa radiazione di densita' di energia ρ:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{V}}\{(N_b - N_a)\ B\rho(\omega) + A_{ab}N_b\} \tag{63}$$

Il termine di emissione spontanea non e' correlato all' emissione coerente (vedi seguito) e costituisce solo una fonte di rumore. Lo trascuriamo percio' nel ragionamento che segue. Non abbiamo nemmeno incluso un termine che renda conto delle perdite della cavita'.

Ricordando che $\rho(\omega) = I(\omega)n/c$ (con n indice di rifrazione), sara'

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dI}{\frac{c}{n}dt} = \frac{\hbar\omega}{2\mathcal{V}}(N_b - N_a)\ B\frac{In}{c} \tag{64}$$

Usualmente e' $N_b - N_a < 0$, il che implica :

$$\frac{dI}{dt} = KI \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{I = I_0\, e^{Kt}} \quad , \tag{65}$$

con $K < 0$, ovvero, l'intensita' decresce col tempo. Non si ha quindi effetto laser.

Infatti, dall'eq.(62) si ha ($N_a = N - N_b$):

$$-2\dot{N}_b = (A_{ab} + 2\ B\rho)\, N_b - N\ B\rho \quad . \tag{66}$$

da cui:

$$N_b = C\, e^{-\frac{1}{2}(A_{ab}+2\,B\rho)\,t} + \frac{N\,B\rho}{A_{ab}+2\,B\rho} \quad . \tag{67}$$

Assumendo $N_b(t=0)=0$ si ha:

$$N_b = \frac{N\,B\rho}{A_{ab}+2\,B\rho}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}(A_{ab}+2\,B\rho)\,t}\right) \quad . \tag{68}$$

A regime

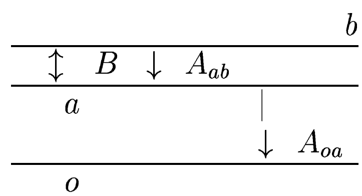
$$t \to \infty \quad N_b = \frac{N\,B\rho}{A_{ab}+2\,B\rho} \quad . \tag{69}$$

Se $A >> 2B\rho$ allora $N_b/N << 1$. Se $A << 2B\rho$ allora $N_b/N \to 1/2$ (caso di sorgenti ad alta intensita'). Quindi non si ha mai, in questa configurazione $N_b - N_a > 0$ ed effetto laser.

4.2 L'inversione di popolazione

Per avere effetto laser occorrono almeno tre livelli. Atomi a tre livelli o, a, b con $E_o < E_a < E_b$ possono realizzare l'inversione di popolazione (: $N_b > N_a$), se $A_{ba} < A_{ao}$. In questo caso $I = I_0\, e^{Kt}$ con $K > 0$ e l'intensita' cresce con il tempo.

La configurazione dei livelli e' ($N_o + N_a + N_b = N$):



(70)

Il pompaggio (non indicato) aumenta la popolazione del livello b. Non ci sono assorbimenti o emissioni stimolate tra i livelli o, a e abbiamo posto $B_{ab} = B_{ba} \equiv B$.

Scriviamo l' equazione di *rate* per il livello a:

$$-\dot{N}_a = A_{oa}N_a - A_{ab}N_b + \rho(\omega_{ba})B_{ba}(N_a - N_b) \tag{71}$$

In condizioni stazionarie $\dot{N}_b = \dot{N}_a = \dot{N}_o = 0$. Si ottiene dall' eq.(71) :

$$(A_{oa} + \rho(\omega_{ba})B_{ba})\; N_a = \; (A_{ab} + \rho(\omega_{ab})B_{ab})\; N_b \tag{72}$$

ovvero:

$$x \equiv \frac{N_b}{N_a} = \frac{A_{oa} + \rho(\omega_{ba})B_{ba}}{A_{ab} + \rho(\omega_{ab})B_{ab}} \tag{73}$$

Consegue che, se $A_{ba} < A_{oa}$, allora e' $N_b > N_a$ (*c.v.d.*).

piccola appendice:
Torna utile nel seguito considerare anche l'equazione di rate per il livello o:

$$-\dot{N}_o = -A_{oa}N_a - A_{ob}N_b + \rho(\omega_{bo})B_{bo}(N_o - N_b) \ , \tag{74}$$

che, poiche' $N_o \sim N$ e $N_a, N_b << N$, posto $r = \rho(\omega_{bo})B_{bo}(N_o - N_b)/N$ circa indipendente da N_a, N_b ($r \sim \rho(\omega_{bo})B_{bo}$), diventa:

$$N\ r = A_{ob}N_b + A_{oa}N_a \quad . \tag{75}$$

Dunque, usando la definizione dell'eq.(73) e l'ipotesi $A_{ob} << A_{oa}$:

$$N_a = \frac{N\ r}{A_{oa} + A_{ob}\ x} \qquad \Rightarrow$$

$$N_b - N_a = N_a\ (x-1) \approx \frac{N\ r}{A_{oa}}\ (x-1) \approx N\ r\ \frac{A_{oa} - A_{ba}}{A_{oa}A_{ab}} \left(1 - \rho(\omega_{ab})\frac{B_{ab}}{A_{ab}}\right) \quad .(76)$$

Questa equazione esprime come il campo di radiazione, stimolando le transizioni da a a b, riduca la differenza di popolazione. Essa sara' usata nel seguito.

4.3 Coerenza della luce laser

L'eq.(64) e' un'equazione classica per l' intensita' della radiazione (o altrimenti il numero dei fotoni). Il laser e' luce coerente, dove per *coerente* si intende una particolarissima condizione quantistica. Occorre quindi l'elettrodinamica quantistica (QED) per giustificare la coerenza della luce laser. In QED il campo elettromagnetico si scrive come sovrapposizione di modi descritti da operatori $\hat{a}_{k\epsilon}\ , \hat{a}^\dagger_{k\epsilon}$. L'operatore *numero di fotoni, di polarizzazione* $\vec{\epsilon}$, e'

$$\hat{n}_\epsilon = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k\ \ \hat{a}^\dagger_{k\epsilon}\hat{a}_{k\epsilon} \ \ . \tag{77}$$

Il campo elettrico si scrive:

$$\vec{\mathcal{E}}(r,t) = \frac{i}{\pi}\sum_{\epsilon}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \left(\vec{\epsilon}E_\omega(t)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ \hat{a}_{k\epsilon} - \vec{\epsilon}^{*}E^{*}_\omega(t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ \hat{a}^{\dagger}_{k\epsilon}\right) \tag{78}$$

dove $E_\omega(t)$ e' l'ampiezza complessa del campo:

$$E_\omega(t) = \left(\frac{\hbar\omega\ \mathcal{V}}{2(2\pi)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{i\phi(t)}\ \ . \tag{79}$$

Il modulo e' tale che $|\mathcal{E}|^2/(8\pi) \sim \frac{1}{2}\hbar\omega/\mathcal{V}$ come si conviene ad una densita' di energia (notare che $\int d^3r\ \int[dk/(2\pi)]^3 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1$).

La caratteristica importante e' la fase. La *lunghezza di coerenza* della luce e' la lunghezza dei treni d'onda. Un treno d'onda e' caratterizzato da una funzione $\phi(t)$ ben definita e continua nel tempo, cosa che avviene su un intervallo di tempo finito (*tempo di coerenza*). L' operazione di pompaggio e la presenza della cavita' innescano assorbimenti tutti coerenti in fase ed emissioni tutte coerenti in fase, cosicche' il tempo di coerenza diventa idealmente infinito. Stiamo cioe' trascurando effetti di rumore. Le ampiezze del campo stazionario presente nella cavita', prodotto dalla radiazione stessa,

$$\mathcal{E}_\omega = E_\omega\ e^{-i\omega t}\ \sin\vec{k}\cdot\vec{r} \tag{80}$$

sono in fase con i processi radiativi che coinvolgono la sostanza laserante. Qui ovviamente, per una cavita' lunga $\vec{L}$ e' $k_iL_i = 2\pi\ l_i$ con l_i intero (condizione di stazionarieta' nella cavita').

Nello stato coerente, l'eq.(64) non vale solo per le intensita' (in cui la fase scompare), ma per le stesse ampiezze del campo stazionario, date da eq.(80).

Considerando un laser ad un solo modo, l'equazione per l'ampiezza del campo elettrico corrispondente all'eq.(64) si scrive:

$$\frac{dE_\omega}{dt} = g\ (N_b - N_a)\ E_\omega - \kappa E_\omega + f_\omega(t)\ \ . \tag{81}$$

Nell'eq.(81) abbiamo aggiunto un termine che esprime il *rate* delle perdite nella cavita' $\propto E_\omega$ e il termine forzante $f_\omega(t)$, che origina da forze fluttuanti dovute all' emissione spontanea. g e κ sono costanti di proporzionalita'. Stiamo trascurando il rumore.

Di nuovo: l'eq.(81) puo' solo essere giustificata elaborando la dinamica quantistica della radiazione accoppiata alla materia e la sostituzione dell'eq.(64) con l'eq.(81) costituisce, in pratica, il nostro approccio alla definizione di coerenza per la radiazione laser. Qualche introspezione maggiore verra' dallo studio del *maser*.

Abbiamo insistito che due sono le condizioni per il conseguimento della coerenza:

a) il pompaggio; b) la presenza della cavita'.

Il ruolo della cavita' nel giungere all'eq.(81) dovrebbe essere chiaro. Mostriamo ora la necessita' del pompaggio.

Abbiamo visto precedentemente che e' indispensabile $(N_b - N_a) > 0$ perche' l'intensita' cresca con il tempo, ma il passaggio alla coerenza richiede una condizione piu' stringente ed e' una vera e propria transizione di fase (qui la parola *fase* ha un altro significato: quello proprio della meccanica statistica). E' questo che ora vogliamo far vedere.

Per procedere, poniamo fenomenologicamente:

$$N_b - N_a = (N_b - N_a)_{pompati} - cnst\,|E|^2 \tag{82}$$

perche' il processo di emissione (proporzionale all'intensita' irraggiata) riduce costantemente il numero di atomi pompati (vedi eq.(76)). L'eq.(81) diventa :

$$\frac{dE_\omega}{dt} = (G - \kappa)\;\; E_\omega - C|E_\omega|^2\; E_\omega + f_\omega \tag{83}$$

dove $G = g(N_b - N_a)_{pompati}$ e' il fattore di guadagno e $C = g \cdot cnst > 0$.

Se si riguarda l'ampiezza complessa E_ω come la coordinata posizione q (presa reale !) di una particella di massa m, l'equazione del moto e'

$$m\ddot{q} + \dot{q} = K(q) + f \tag{84}$$

(m puo' essere immaginata piccolissima). $K(q)$ e' una forza che deriva da un potenziale di confinamento della particella:

$$K(q) = -\frac{dV(q)}{dq} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{V(q)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{G} - \kappa)\;\mathbf{q^2} + \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{4}}\;\mathbf{q^4} \tag{85}$$

Trattasi quindi di un oscillatore smorzato e anarmonico, soggetto alla forza f. Il potenziale quartico ha un minimo assoluto in $q = 0$ se $\kappa - G > 0$. Infatti, in questo caso $d^2V/dq^2|_{q=0} > 0$. Ma quando $\kappa - G$ cambia segno, il minimo a $q = 0$ diventa un massimo e il minimo stabile si ha per $q = (G - \kappa)/(3C)$. L' oscillatore diventa “spostato”.

Torniamo all' eq.(83) per l'ampiezza complessa $E_\omega(t) \equiv |E_\omega| e^{i\phi(t)}$. Trascuriamo f_ω. Moltiplichiamo ambo i lati dell'equazione per dE^*_ω/dt. Prendiamo poi la complessa coniugata della eq.(83) e moltiplichiamone ambo i lati per dE_ω/dt. Sommiamo le due insieme. Otteniamo:

$$2\left|\frac{dE_\omega}{dt}\right|^2 = \frac{d}{dt} V(|E_\omega|^2) \tag{86}$$

con:

$$V(|E_\omega|^2) = -\frac{1}{2}(G - \kappa)\, |E_\omega|^2 + \frac{C}{4}\, |E_\omega|^4 \tag{87}$$

Una soluzione possibile dell' eq.(86) e' che siano separatamente indipendenti dal tempo il modulo $|E_\omega|$ e la fase $\phi(t)$. Infatti: se $|E_\omega|$ non dipende dal tempo allora l'eq.(86) diventa:

$$|E_\omega|^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 0\ . \tag{88}$$

Il fatto che il sistema, in quanto stato collettivo di atomi e radiazione in equilibrio quantistico, scelga appunto questa tra le tante soluzioni possibili, e' cio' che si denota come *coerenza quantistica* del laser.

La configurazione di minimo del potenziale e' invariante per cambio della fase: $E^o_\omega \to E^o_\omega e^{i\phi^o}$. Quindi, il rumore f_ω che avevamo per un momento tralasciato, potrebbe far variare a caso la fase $\phi(t)$ nel tempo. Tuttavia, e' possibile vedere nella teoria del laser che, se si rappresenta E_ω come il valore di equilibrio, piu' piccole fluttuazioni:

$$E_\omega = E^o_\omega e^{i\phi^o} + e_\omega\, e^{i\phi(t)}\ , \tag{89}$$

si ha che al crescere dell'intensita' I le fluttuazioni dell' ampiezza tendono rapidamente a zero : $e^2_\omega \sim 1/I$, come dettato dal potenziale $V(|E_\omega|^2)$, ma che lo stesso accade per le fluttuazioni della fase !: $\overline{(\phi(t) - \phi^o)^2} \sim 1/I$ (dove si e' indicata la media temporale). Ovvero, la fase delle fluttuazioni non diffonde lungo il continuo dei minimi del potenziale (ancorche' il diffondere, poiche' il potenziale e' fatto a cappello messicano, non comporti costo di energia). La ridotta diffusione della fase, in conseguenza del rumore, da' la larghezza di riga alla radiazione. Ad es. , la larghezza di riga puo' essere sotto i 10 Hz !.

E' questa rottura della simmetria $U(1)$ (della fase) che da' la misura di come lo stato coerente laser sia in realta' uno stato intrinsecamente differente da quello della luce di una lampada normale, caratterizzato com'e da un'ampiezza complessa, univocamente fissata (la fase, in principio, si fissa in modo casuale, o comunque in conseguenza delle condizioni iniziali). O, altrimenti detto, luce coerente, caratterizzata da una intensita' ed, insieme, da una fase, ben determinate.

5 Radiazione X

La radiazione X e' nell' intervallo 0.1 $\mathring{A} \div 10\mathring{A}$, corrispondente a fotoni di energia da pochi a parecchie centinaia di keV. Si ottiene bombardando una sostanza (es. Mo) con elettroni veloci, accelerati da una differenza di potenziale V. L' emissione di luce ha un fondo continuo a partire da una soglia a cui si sovrappongono picchi discreti molto netti.

Il fondo continuo e' dovuto alla radiazione di *Bremsstrahlung*: l'elettrone veloce incidente viene deviato dal campo coulombiano del nucleo atomico che lo rallenta e lo fa irraggiare. La frequenza massima si ottiene per un elettrone frenato addirittura fino a fermarsi:

$$eV = \hbar\nu_{max} = h \frac{c}{\lambda_{min}} \ . \tag{90}$$

λ_{min} e' la lughezza d'onda di soglia.

L'urto dell' elettrone incidente sull'atomo di numero atomico Z puo' ionizzarlo espellendo un elettrone dalle shell piu' interne:

- **shell** $K \ \rightarrow \ n = 1$
- **shell** $L \ \rightarrow \ n = 2$
- **shell** $M \ \rightarrow \ n = 3$
- *etc*

La lacuna viene riempita da un elettrone di una shell superiore dando luogo alle varie righe:

K_α: *transizione* $n=2 \rightarrow n=1$; $\nu_{K_\alpha} = (Z-\sigma_1)^2 \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right) Ry$

K_β: *transizione* $n=3 \rightarrow n=1$; $\nu_{K_\beta} = (Z-\sigma_1)^2 \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{9}\right) Ry$

etc

L_α: *transizione* $n=3 \rightarrow n=2$; $\nu_{L_\alpha} = (Z-\sigma_2)^2 \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) Ry$

L_β: *transizione* $n=4 \rightarrow n=2$; $\nu_{L_\beta} = (Z-\sigma_2)^2 \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) Ry$

etc

dove $\sigma_1 \approx 2$ e $\sigma_2 \approx 9.4$ e' una correzione efficace alla carica del nucleo per l'energia idrogenoide, dovuta allo schermaggio degli elettroni interni.

Storicamente, la posizione delle righe costitui' una verifica sperimentale importante della formula di Bohr per i livelli energetici, formula che invece non e' applicabile alle transizioni ottiche degli atomi a piu' elettroni. (Legge di Moseley: proporzionalita' tra $\sqrt{\nu}$ e $(Z-\sigma)$).

Vi e' anche una struttura fina delle righe X che nasce dallo splitting spin-orbita dei livelli idrogenoidi per $n>1$:

$$E_{nj} = \left[-\frac{Z^2}{n^2} + \frac{Z^4\alpha^2}{n^4} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j+\frac{1}{2}} \right) \right] Ry \tag{91}$$

Cosi',

- per $n=2$ e' $l=0,1$ e $j=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$: ${}^2S_{\frac{1}{2}}, {}^2P_{\frac{1}{2}}, {}^2P_{\frac{3}{2}}$
- per $n=3$ e' $l=0,1,2$ e $j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$: ${}^2S_{\frac{1}{2}}, {}^2P_{\frac{1}{2}}, {}^2P_{\frac{3}{2}}, {}^2D_{\frac{3}{2}}, {}^2D_{\frac{5}{2}}$.