RICERCHE E STUDI ESEGUITI PER INCARICO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
COMITATO PER LA FISICA, ECC.

Sulla teoria dei nuclei

Nota del prof. ETTORE MAJORANA

Riassunto: L'autore propone alcune correzioni alla teoria di Heisenberg di cui sono particolarmente discussi i fondamenti sperimentali. Viene inoltre descritto un procedimento di carattere statistico per l'applicazione della teoria ai nuclei pesanti.

La scoperta del neutrone, cioè di una particella elementare pesante e senza carica elettrica, ha offerto la possibilità di edificare una teoria della struttura nucleare che, senza risolvere le difficoltà connesse con lo spettro continuo dei raggi β, permette tuttavia di utilizzare largamente i concetti della meccanica quantistica in un campo che sembrava loro estraneo. Secondo Heisenberg (*) è possibile per molti scopi considerare i nuclei come costituiti da protoni e da neutroni, particelle provviste del momento meccanico intrinseco $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ che obbediscono alla statistica di Fermi e hanno all'incirca la stessa massa. La velocità media di queste particelle all'interno dei nuclei è presumibilmente abbastanza piccola di fronte a quelle della luce $\left(v \backsim \frac{c}{10}\right)$ e si può pertanto ritenere che siano applicabili con grande approssimazione i metodi ordinari della meccanica quantistica non relativistica. Rimane da stabilire la legge di interazione fra i costituenti nucleari, e a questo fine Heisenberg si è lasciato guidare, in mancanza di altri criteri direttivi, dall'analogia che sussisterebbe fra il comune atomo neutro di idrogeno e il neutrone se questo è costituito, come generalmente si suppone, da un protone e da un elettrone. Heinsenberg suppone pertanto che l'interazione fra i protoni e i neutroni sia qualitativamente simile a quella che effettivamente si esercita fra protoni e atomi neutri di idrogeno e dipenda principalmente da una specie di «energia di scambio». Similmente per ogni coppia di neutroni si introducono forze attrattive del tipo di Van der Waals.

L'uso di tale analogia è difficile a giustificarsi, poichè se il neutrone è realmente composto da un protone e da un elettrone, il modo in cui viene realizzata la loro unione è però affatto inaccessibile alle teorie attuali che porterebbero ad attribuire al neutrone la statistica di Bose-Einstein e un momento meccanico multiplo intero di $\frac{h}{2\pi}$, contrariamente alle ipotesi fondamentali Queste sono d'altra parte direttamente appoggiate alle proprietà empiriche dei nuclei e non è possibile rinunziarvi. E' pertanto preferibile,

(*) W. HEISENBERG, Zeits, f. Phys. 77, I, 1932; 78, 156, 1933.

allo stato attuale delle nostre conoscenze, tentare di stabilire la legge di interazione fra le particelle elementari in base a soli criteri di semplicità, ma in modo che vengano riprodotte le proprietà più generali e più caratteristiche dei nuclei.

1. - Le varie fonti di informazioni che possediamo sulla struttura dei nuclei, come disintegrazioni radioattive, disgregazioni ed eccitazioni artificiali, misure dei difetti di massa, diffusione anomala delle particelle α, e così via, sembrano indicare concordemente che non si può attribuire ai nuclei un'organizzazione fortemente centrale simile a quella degli atomi. Sembra al contrario che i nuclei siano costituiti da una specie di materia estesa e impenetrabile le cui parti agiscono reciprocamente solo per immediato contatto. La differenza fra i nuclei pesanti e quelli leggeri si riduce così essenzialmente al differente contenuto di «materia nucleare». Tale rappresentazione può essere naturalmente valida solo finchè la repulsione coulombiana fra i protoni contenuti nei nuclei non ha grande importanza di fronte alle altre forze in gioco; e questo è certamente il caso per i nuclei più leggeri, mentre per i più pesanti bisogna introdurre per questo motivo notevoli correzioni.

Il nostro problema è dunque di trovare la più semplice legge di interazione fra tutte le particelle elementari, protoni e neutroni, che conduca, finchè è trascurabile la repulsione coulombiana alla definizione di una materia impenetrabile. Assumiamo anzitutto, per semplicità, che fra ogni coppia di protoni agisca soltanto l'ordinaria repulsione elettrostatica, questa ipotesi potendosi in qualche modo appoggiare al fatto che il raggio classico dei protoni è assai piccolo rispetto alle dimensioni nucleari. Le forze elettrostatiche non possono avere, come si è detto, grande influenza sulla struttura dei nuclei leggeri e poichè questi risultano costituiti all'incirca da un numero uguale di protoni e di neutroni, si presenta spontanea l'ipotesi che la causa principale della stabilità nucleare debba risiedere in una particolare azione mutua dei protoni e dei neutroni, mentre in mancanza di sicuri indizi in contrario assumeremo che sia trascurabile l'interazione fra i neutroni.

Il nostro problema è così ridotto alla ricerca di un conveniente accoppiamento fra protoni e neutroni. Per l'apparente analogia, già rilevata, fra la struttura dei nuclei e quella dei corpi solidi o liquidi, può apparire naturale introdurre un'interazione del tipo che in modo affatto generale è realizzato per ogni coppia di atomi o molecole, cioè forze attrattive a grande distanza e intensamente repulsive a piccola distanza in modo che sia assicurata la «impenetrabilità» delle particelle. Oltre a ciò occorrerebbe però assumere anche forze repulsive fra i neutroni, per distanze piccole, per ottenere la desiderata proporzionalità fra il numero delle particelle costituenti e il volume dei nuclei. Una tale soluzione del problema è però insoddisfacente, poichè bisogna ammettere l'esistenza non solo di forze attrattive di origine sconosciuta, ma anche a piccola distanza di forze repulsive aventi un ordine di grandezza eccezionalmente elevato e un'origine altrettanto sconosciuta. Dobbiamo quindi tentare un'altra via per spiegare come la densità nucleare possa essere indipendente dalla massa totale senza che sia impedita la libera mobilità delle particelle elementari mediante un'artificiosa impenetrabilità. Possiamo ricercare, per es., un tipo di accoppiamento siffatto che l'energia media per particella non possa mai superare un limite determinato, comunque grande sia la densità, e ciò in conseguenza di qualche fenomeno di saturazione che potrebbe essere in certo modo analogo alla saturazione delle valenze. Un'interazione di questo tipo ci è data in realtà nello schema di Dirac dalla seguente espressione, come dimostreremo più avanti:

$$(Q', q' \mid I \mid Q'', q'') = -\delta(q' - Q'')\,\delta(q'' - Q')\,I(r) \tag{1}$$

in cui si è posto $r = \mid q' - Q' \mid$ e Q, q sono le coordinate rispettivamente di un neutrone e di un protone. La funzione $I\ (r)$ è positiva e decresce rapidamente con la distanza. Per tener conto però della particolare stabilità della particella α assumeremo inoltre che Q e q in (1) rappresentino solo le coordinate dei baricentri con esclusione dello «spin». Si ottiene così che su ogni protone nella particella α agiscano entrambi i neutroni invece di uno solo, e viceversa, poichè possiamo assumere un'autofunzione simmetrica nelle coordinate dei baricentri di tutti i protoni e i neutroni (ciò che vale rigorosamente se si trascura l'energia coulombiana dei protoni). Nella particella α tutti i corpuscoli elementari sono nello stesso stato, così che essa costituisce un «anello chiuso» in un senso più alto che l'atomo di elio. Se si passa dalla particella α a nuclei più complessi, non si può a causa del principio di Pauli aggiungere altre particelle elementari nello stesso stato, e poichè oltre a ciò l'energia di scambio* (1) è grande in generale solo quando protone e neutrone si trovano in uno stesso stato, bisogna prevedere, ciò che corrisponde esattamente all'esperienza, che l'energia di legame per ogni corpuscolo non possa essere presso i nuclei pesanti essenzialmente più grande che presso la particella α.

Vogliamo ora paragonare l'espressione (1) dell'energia di scambio con quella che si può derivare dal termine di risonanza dell'Hamiltoniana di Heisenberg (*) eliminando l'incomoda coordinata di «ϱ-spin», ciò che è possibile se si riguardano, anche formalmente, i protoni e i neutroni come particelle differenti. Si trova allora un'espressione simile a (1) ma con due essenziali differenze. Anzitutto Q e q rappresentano secondo l'espressione di Heisenberg tutte le coordinate, incluso lo «spin». In secondo luogo Heisenberg assume per $I\ (r)$ il segno opposto, ciò che ha particolare importanza per le conseguenze statistiche poichè a causa di ciò i caratteri di simmetria delle autofunzioni risultano secondo la teoria di Heisenberg tali che non ha luogo alcun fenomeno di saturazione e bisogna ancora introdurre a piccola distanza quelle forze repulsive che ci siamo preoccupati di evitare (**).

Vogliamo ora brevemente esaminare l'applicazione, secondo un metodo statistico, della nostra teoria ai nuclei pesanti che sono composti da un numero assai elevato di protoni e di neutroni.

2. - In prima approssimazione consideriamo l'autofunzione di un nucleo come rappresentabile mediante un prodotto di due funzioni che dipendono rispettivamente dalle coordinate di n_1 neutroni e di n_2 protoni:

$$\Psi = \Psi_N(Q_1, \ldots. Q_{n_1}; \Sigma_1, \ldots., \Sigma_{n_1})\,\Psi_P(q_1, \ldots., q_{n_2}; \sigma_1, \ldots., \sigma_{n_2}) \tag{2}$$

e supponiamo che Ψ_N e Ψ_P siano ottenute mediante antisimmetrizzazione da prodotti di autofunzioni individuali ortogonali:

(*) W. Heisenberg, Zeitschr. für Physik, 77, 1, 1932.

(**) W. Heisenberg, Zeitschr, für Physik, 80, 587, 1933.

$$\Psi_N = \frac{1}{\sqrt{n_1\,!}} \Sigma_R \pm R\, \Psi_N^1 (Q_1, \Sigma_1) \Psi_N^2 (Q_2, \Sigma_2) \ldots \Psi_N^{n_1} (Q_{n_1}, \Sigma_{n_1}) \tag{3}$$

$$\Psi_P = \frac{1}{\sqrt{n_2\,!}} \Sigma_R \pm R\, \Psi_P^1 (q_1, \sigma_1) \Psi_P^2 (q_2, \sigma_2) \ldots \Psi_P^{n_2} (q_{n_2}, \sigma_{n_2})$$

Nel caso di un gran numero di particelle le autofunzioni individuali Ψ si possono naturalmente identificare con pacchetti d'onda rappresentanti particelle libere. L'uso delle autofunzioni di prima approssimazione introduce un certo errore a cause di notevoli effetti di polarizzazione, ma il metodo è certamente utilizzabile per determinazioni d'ordine di grandezza.

Dobbiamo ora calcolare il valore medio dell'energia totale preso sull'autofunzione (2) e ricercare sotto quali condizioni esso diventa minimo. L'energia è composta da tre parti:

$$W = T + E + A \tag{4}$$

essendo T l'energia cinetica, E l'energia elettrostatica dei protoni e A l'energia di scambio.

Assumiamo per semplicità che tutti gli stati individuali definiti nei centri di gravità siano, o liberi, o occupati due volte con opposta direzione dello « spin ». Introduciamo ancora le matrici di Dirac (*):

$$\begin{aligned} (q' \mid \rho_N \mid q'') &= \sum_{\sigma_i = 1}^{2} \sum_{i=1}^{n_1} \Psi_N^i (q', \sigma_i)\, \overline{\Psi}_N^i (q'', \sigma_i) \\ (q' \mid \rho_P \mid q'') &= \sum_{\sigma_i = 1}^{2} \sum_{i=1}^{n_2} \Psi_P^i (q', \sigma_i)\, \overline{\Psi}_P^i (q'', \sigma_i) \end{aligned} \tag{5}$$

Valgono le relazioni:

$$\rho_N^2 = 2\,\rho_N\ ;\ \rho_P^2 = 2\,\rho_P \tag{6}$$

in cui il fattore (2) dipende dallo spin. Segue:

$$\rho_N = <_0^2\ ;\ \rho_P = <_0^2 \tag{7}$$

Se M è la massa di ogni particella, approssimativamente la stessa per i protoni e per i neutroni, risulta:

$$T = \frac{1}{2\,M} \operatorname{Spur} [(\rho_N + \rho_P)\, p^2] \tag{8}$$

$$E = \frac{e^2}{2} \int (q' \mid \rho_P \mid q')\, \frac{1}{\mid q' - q'' \mid}\, (q'' \mid \rho_P \mid q'')\, dq'\, dq'' + \ldots \tag{9}$$

(*) P. A. M. Dirac, Proc. Camb. Phyl. Soc. 26, 376, 1930.

Abbiamo trascurato in (9) un termine che rappresenta essenzialmente l'*ordinaria* energia di scambio dipendente dall'interazione elettrostatica dei protoni. Questo termine è stato calcolato da Dirac (*) e non ha grande importanza quando il numero delle particelle è grande.

Abbiamo infine:

$$A = -\int (q' \mid \rho_N \mid q'')\,(q'' \mid \rho_N \mid q')\, I \mid q' - q'' \mid dq'\, dq'' \tag{10}$$

Quando il numero delle particelle è sufficientemente elevato si possono riguardare ρ_N e ρ_P come matrici quasi diagonali, anzi come funzioni classiche di p e q, e precisamente il migliore legame fra matrici e funzioni classiche ci è dato da (**):

$$\left(q - \frac{v}{2} \mid \rho \mid q + \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{h^3} \int \rho(p, q)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(p, v)}\, dp \tag{11}$$

e attraverso la formola che si ottiene rovesciando l'integrale di Fourier. Sostituendo mediante (11) nelle formole precedenti si trova:

$$T = \frac{1}{2M} \int \frac{\rho_N(p, q) + \rho_P(p, q)}{h^3}\, p^2\, dq\, dp \tag{12}$$

$$E = \frac{e^2}{2} \int \frac{\rho_P(p, q)\, \rho_P(p', q')}{h^6}\, \frac{1}{\mid q - q' \mid}\, dp\, dq\, dp'\, dq' \tag{13}$$

$$A = \int \frac{\rho_N(p, q)\; V_N(p, q)}{h^3}\, dp\, dq = \int \frac{\rho_P(p, q)\; V_P(p, q)}{h^3}\, dp\, dq \tag{14}$$

in cui $V_N\ (p, q)$ e $V_P\ (p, q)$ sono le funzioni classiche che corrispondono alle matrici:

$$\begin{aligned} (q' \mid V_N \mid q'') &= -(q' \mid \rho_P \mid q'')\, I(\mid q' - q'' \mid) \\ (q' \mid V_P \mid q'') &= -(q' \mid \rho_N \mid q'')\, I(\mid q' - q'' \mid) \end{aligned} \tag{15}$$

Assumiamo ora che nell'intorno di ogni punto q siano occupati gli stati di minore energia cinetica, così dai neutroni, come dai protoni. Esisterà allora un valore massimo dell'impulso $P_N\ (q)$ per i neutroni e analogamente per i protoni, e a causa di (7) sarà:

$$\rho_N(p, q) = \begin{cases} 2 & \text{per } p < P_N(q) \\ 0 & \text{» } p > P_N(q) \end{cases} \tag{16}$$

$$\rho_P(p, q) = \begin{cases} 2 & \text{» } p < P_P(q) \\ 0 & \text{» } p > P_P(q) \end{cases} \tag{17}$$

Consideriamo dapprima il caso limite che la densità sia molto elevata, così che $\frac{h}{P_N}$ e $\frac{h}{P_P}$, che nell'ordine di grandezza corrispondono alla mutua

(*) P. A. M. Dirac, *loc. cit.*
(**) V., p. es., Dirac, *loc. cit.*

distanza media delle particelle nel nucleo, siano piccole di fronte al raggio d'azione delle forze di risonanza. Assumiamo ancora che sia $P_N(q) > P_P(q)$, e quindi la densità dei neutroni maggiore di quella dei protoni, e osserviamo che nella seconda delle (15) a causa della pratica diagonalità di ρ_N si può sostituire $I(|q'-q''|)$ con il valore limite $I(o)$, almeno se $I(o)$ è finito; allora quell'equazione si riduce a:

$$(q' \mid V_P \mid q'') = -I(o)(q' \mid \rho_N \mid q'')$$

da cui segue:

$$V_P(p, q) = -I(o)\,\rho_N(p, q) \tag{18}$$

Sostituendo con questa nella (14) e tenendo presente che per $\rho_P(p,q) > o$ è anche sempre $\rho_N = 2$, troviamo:

$$A = -2\,I(o) \int \frac{\rho_P(p, q)}{h^3}\, dp\, dq = -2\,I(o)\, n_2 \tag{19}$$

Questo significa che l'energia di legame dipendente dalle forze di risonanza è per ogni protone, nel caso di densità molto alta, semplicemente uguale a $-2I(o)$, purchè la densità dei neutroni superi in ogni punto quella dei protoni. Se trascuriamo per un momento la repulsione elettrostatica fra i protoni e fissiamo il rapporto n_2/n_1 lasciando indeterminatala densità, l'energia potenziale per particella sarà una certa funzione della densità totale:

$$a = a(\mu)\ ;\ \mu = \frac{8\pi}{3h^3}\left(P_N^3 + P_P^3\right) \tag{20}$$

che naturalmente per $\mu = o$ si annulla e per $\mu \rightarrow \infty$ si approssima al valore costante $-\dfrac{2\,n_2}{n_1+n_2}\,I(o)$. Questo valore limite raggiunge il minimo $-I(o)$ quando $n_2 = n_1$. Per medie densità l'espressione generale di $a(\mu)$ risulta a causa di (10) e (11).

$$a(\mu) = \frac{1}{\mu} \int \frac{\rho_N(p, q)\,\rho_P(p', q)}{h^6}\, G(p, p')\, dp\, dp' \tag{21}$$

essendo $G(p, p')$ una funzione di $|p - p'|$ connessa nel modo seguente con $I(r)$:

$$G(p, p') = \int e^{-\frac{2\pi i}{h}(p - p', v)}\, I(|v|)\, dv \tag{22}$$

L'energia cinetica per particella avrà la forma

$$t = k\,\mu^{2/3} \tag{23}$$

e l'energia totale $a + t$ può raggiungere un minimo per un certo valore della densità che dipende solo dal rapporto n_2/n_1. Si ottiene così una densità costante indipendente della massa del nucleo, e quindi un volume nucleare e un contenuto energetico semplicemente proporzionati al numero delle particelle come richiede l'esperienza.

Si può tentare di determinare la funzione $I(r)$ in modo che i dati sperimentali siano riprodotti con la maggiore esattezza. L'espressione

$$I(r) = \lambda \frac{e^2}{r} \tag{23}$$

p. es., con una costante arbitraria è adatta allo scopo, sebbene essa divenga infinita per $r = 0$. Essa deve essere però modificata per grandi valori di r poichè fornisce una sezione efficace infinita per l'urto fra protone e neutrone; inoltre sembra che conduca a un rapporto troppo piccolo per i difetti di massa della particella α e dell'isotopo dell'idrogeno. Così bisogna utilizzare un'espressione con almeno due costanti arbitrarie, p. es. una funzione esponenziale $I(r) = A\, e^{-\varepsilon r}$. Noi non entreremo però in questa indagine poichè, come si è già rilevato, la prima approssimazione statistica può condurre a errori notevoli comunque grande sia il numero delle particelle. Per nuclei pesanti acquista grande importanza la repulsione coulombiana, ed essa ha per effetto di accrescere alquanto le dimensioni dei nuclei e di rendere variabile dal centro alla periferia la densità, così dei protoni, come dei neutroni. L'energia di legame dovuta alle forze di scambio non dipende ora soltanto dal rapporto n_2/n_1 ed è, a parità di detto rapporto, alquanto minore che nel caso di nuclei leggeri, a causa della diminuzione di densità dovuta alle forze elettrostatiche.

Lipsia, 11 *maggio* 1933-XI.