

# ATOMI ORIENTATI IN CAMPO MAGNETICO VARIABILE

Nota di ETTORE MAJORANA

**Sunto.** - *L'autore calcola la probabilità che abbiano luogo processi non adiabatici quando un raggio di vapore orientato passa in prossimità di un punto in cui il campo magnetico si annulla.*

Un atomo orientato in un campo magnetico lentamente variabile segue, come è noto, adiabaticamente la direzione, supposta variabile, del campo. A ciò si deve il fatto recentemente posto in evidenza che sottoponendo un raggio molecolare proveniente da una esperienza di STERN e GERLACH a una seconda esperienza di STERN e GERLACH non si ottiene una nuova divisione del raggio, perchè tutti gli atomi hanno la stessa orientazione, avendo seguito esattamente il campo vagante, difficilmente eliminabile, nel tratto compreso fra le espansioni polari destinate a produrre il raggio orientato e quelle che devono saggiarne l'orientazione dopo un certo percorso. Tuttavia PHIPPS ha intrapreso delle esperienze per rivelare una variazione non adiabatica del campo in detta regione; la condizione a ciò necessaria è che il campo sia sufficientemente debole e la variazione della sua direzione sufficientemente rapida perchè la sua frequenza di rotazione divenga comparabile con la frequenza di Larmor. Poichè è difficile abbassare l'intensità del campo al disotto di alcuni gauss <sup>(1)</sup>, è necessario, per una velocità del raggio di  $10^5$  cm./sec. che la direzione del campo, vari di molto entro una frazione di millimetro; si tratta quindi di esperienze delicate che non hanno dato finora esito conclusivo.

Il problema è stato trattato teoricamente da GÜTTINGER <sup>(2)</sup> per il caso di un campo rotante uniformemente e di intensità costante. In questa nota supporremo invece che il raggio molecolare passi in prossimità di un punto in cui il campo magnetico si annulli; questo caso è particolarmente importante perchè se il raggio passasse esattamente

<sup>(1)</sup> T. E. PHIPPS e O. STERN, « ZS. f. Ph. », **73**, 185, 1932.

<sup>(2)</sup> P. GÜTTINGER, « ZS. f. Ph. », **73**, 169, 1932.

per un punto di campo nullo tutti gli atomi invertirebbero la loro orientazione.

D'altra parte un punto di campo nullo non può essere portato sul percorso del raggio molecolare che per tentativi, disponendo, ad es., di due campi ausiliari ortogonali indipendentemente regolabili, così che è difficile realizzare l'esperienza fino a che non si disponga di mezzi rapidi per la rivelazione del raggio. Ne anticipiamo tuttavia la discussione anche per meglio chiarire la natura del problema dinamico offerto dalla rotazione di un atomo magnetico in campo comunque variabile. Risulterà da quanto segue che la trattazione del problema secondo la meccanica classica o secondo la meccanica quantistica richiede l'integrazione delle stesse equazioni differenziali, cosicché quando la soluzione classica è nota, come nel caso di un campo uniforme rotante con velocità angolare costante, particolarmente considerato da GÜTTINGER, la soluzione quantistica può esserne dedotta immediatamente. Per il problema che studieremo più avanti, passaggio in prossimità di un punto di campo nullo con gradiente di campo lentamente variabile, l'impostazione quantistica è matematicamente più conveniente; ma anche qui basta risolvere il caso più semplice,  $j = 1/2$ , per dedurne la soluzione generale.

1. Uno stato rotazionale di un atomo con quanto interno  $j = 1/2$  può essere rappresentato come combinazione lineare dei due stati ortogonali  $\psi_{\frac{1}{2}}$  e  $\psi_{-\frac{1}{2}}$  aventi momento  $\pm 1/2$  in direzione dell'asse  $z$ :

$$\psi = C_{\frac{1}{2}} \psi_{\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}} \psi_{-\frac{1}{2}}$$

ed è essenzialmente definito dal rapporto  $\frac{C_{-\frac{1}{2}}}{C_{\frac{1}{2}}}$ .

Se le fasi di  $\psi_{\frac{1}{2}}$  e  $\psi_{-\frac{1}{2}}$  sono scelte in modo da dare la rappresentazione ordinaria dei momenti angolari, lo stato  $\psi$  può essere rappresentato, come è noto, in modo invariante da un punto  $P$  su una sfera unitaria, le cui coordinate sferiche  $\vartheta, \varphi$  sono definite da

$$\text{tang } \frac{\vartheta}{z} e^{i\varphi} = \frac{C_{-\frac{1}{2}}}{C_{\frac{1}{2}}}$$

Il raggio vettore  $OP$ , essendo  $O$  il centro della sfera, dà allora la direzione secondo la quale il momento nello stato  $\psi$  ha il valore  $1/2$ . Nel caso  $j = 1/2$  il più generico stato rotazionale corrisponde quindi

ad atomi orientati con momento  $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$  in una direzione arbitraria. La probabilità d'accordo fra due stati rappresentati dai punti  $P$  e  $P'$  è data da

$$W(P, P') = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

se  $\alpha$  è l'angolo  $POP'$ ; essa si annulla, cioè i due stati sono ortogonali, quando  $P$  e  $P'$  sono diametralmente opposti. Per  $j > 1/2$  non esiste in generale una direzione secondo cui l'atomo è orientato, ha cioè un valore determinato dal momento angolare, ma una rappresentazione geometrica intrinseca, simile alla precedente, è ancora possibile. Solo ogni stato sarà rappresentato da  $2j$  punti sulla sfera unitaria, anzi che da uno solo. Consideriamo infatti uno stato generico:

$$\psi = C_j \psi_j + C_{j-1} \psi_{j-1} + \dots + C_{-j} \psi_{-j}$$

e siano  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2j}$  le radici dell'equazione:

$$(1) \quad a_0 \zeta^{2j} + a_1 \zeta^{2j-1} + \dots + a_{2j} = 0$$

essendo

$$(2) \quad a_r = (-1)^r \frac{C_{j-r}}{\sqrt{(2j-r)! r!}}$$

Lo stato  $\psi$  può allora essere rappresentato dai punti  $P_1, P_2, \dots, P_{2j}$  sulla sfera unitaria, le coordinate sferiche  $\vartheta_s, \varphi_s$  di  $P_s$  essendo date da

$$(3) \quad \text{tang} \frac{\vartheta_s}{z} e^{i\varphi_s} = \zeta_s.$$

Si verifica senza difficoltà che questa rappresentazione geometrica non dipende dal sistema di coordinate. La disposizione dei punti rappresentativi è a priori arbitraria, ma diviene particolarmente semplice se si considerano atomi orientati. A uno stato orientato con componente del momento angolare  $m$  nella direzione  $OP$  corrispondono infatti  $j+m$  punti coincidenti in  $P$  e  $j-m$  nel punto diametralmente opposto a  $P$ , come se ognuno dei punti rappresentativi indicasse la direzione di un piccolo giroscopio con momento angolare  $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ . La probabilità di accordo fra due stati orientati, l'uno con momento  $m$  nella direzione  $OP$ , l'altro con momento  $m'$  nella direzione  $OP'$  formante con la prima l'angolo  $\alpha$ , è data da

$$(4) \quad W(P, P'; m, m') = \left( \cos \frac{\alpha}{2} \right)^{4j} (j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')! \\ \left[ \sum_0^r \frac{(-1)^r \left( \text{tang} \frac{\alpha}{2} \right)^{2r-m+m'}}{r! (r-m+m')! (j+m-r)! (j-m'-r)!} \right]^2$$

ed è naturalmente simmetrica in  $m$  e  $m'$ .

Consideriamo ora la rotazione dell'atomo in un campo magnetico  $H(t)$  comunque variabile nel tempo. Supponiamo perciò che l'atomo possieda un momento magnetico  $-gj\mu_0$  così che per campo sufficientemente debole si può assumere come Hamiltoniana  $g\mu_0(j, H)$ . Le equazioni del movimento saranno allora:

$$\dot{C}_m = -\frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left[ mH_z C_m + \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \frac{H_x - iH_y}{2} C_{m-1} + \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{H_x + iH_y}{2} C_{m+1} \right].$$

Sostituendo mediante (2) abbiamo

$$\dot{a}_r = -\frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left[ (j-r)H_z a_r - (r+1) \frac{H_x - iH_y}{2} a_{r+1} - (2j-r+1) \frac{H_x + iH_y}{2} a_{r-1} \right].$$

Uguagliando a zero la derivata temporale del primo membro di (1) troviamo, dopo facili riduzioni, per una generica radice  $\zeta_i$  di detta equazione:

$$\zeta_i = \frac{2\pi i}{h} g\mu_0 \left( H_z \zeta_i + \frac{H_x - iH_y}{2} \zeta_i^2 - \frac{H_x + iH_y}{2} \right)$$

da cui seguono mediante la (3) le variazioni temporali di  $\vartheta_i, \varphi_i$  relative al punto rappresentativo  $P_i$  di cui  $\zeta_i$  è la proiezione stereografica sul piano complesso  $x + iy$ :

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_i &= \frac{2\pi}{h} g\mu_0 (H_y \cos \varphi_i - H_x \sin \varphi_i), \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{2\pi}{h} g\mu_0 \left( H_z - \frac{H_x \cos \varphi_i + H_y \sin \varphi_i}{\text{tang } \vartheta_i} \right). \end{aligned}$$

Queste equazioni esprimono che ciascuno dei punti rappresentativi sulla sfera unitaria precede intorno al campo con frequenza  $g \cdot 0$ , essendo  $0$  la frequenza di LARMOR, come accadrebbe nella meccanica classica se uno qualsiasi dei raggi vettori  $OP_i$  indicasse la direzione di un giroscopio di autoimpulso  $j \frac{h}{2\pi}$  e momento magnetico  $-gj\mu_0$ .

Si può del resto provare che la validità di questo risultato è implicita nell'invarianza della nostra rappresentazione geometrica, e viceversa.

Da quanto si è detto risulta anche che la posizione relativa dei  $2j$  punti rappresentativi resta invariata nel corso del tempo, cosicché se inizialmente l'atomo è orientato con componente del momento angolare  $m$  in direzione del campo, esso sarà ancora orientato al tempo  $t$  con momento  $m$  secondo una direzione formante un angolo  $\alpha(t)$  con

il campo. La conoscenza dell'angolo di sbandamento  $\alpha(t)$ , che può essere calcolato indifferentemente con la meccanica classica o con la meccanica quantistica ed è indipendente da  $j$  e da  $m$  permette di calcolare mediante la (4) la probabilità che la componente del momento angolare nella direzione del campo abbia al tempo  $t$  il valore generico  $m'$ .

2. Supponiamo ora che un raggio di atomi orientati passi in prossimità di un punto  $Q$  in cui  $H_x = H_y = H_z = 0$ ; in vicinanza di  $Q$  le componenti del campo saranno funzioni lineari delle coordinate cartesiane  $x, y, z$ , e, in un sistema solidale con l'atomo in movimento, che con grande approssimazione possiamo ritenere rettilineo e uniforme, le componenti del campo agente sull'atomo stesso saranno funzioni lineari del tempo. Scegliamo l'asse  $x$  nella direzione che ha il campo quando esso raggiunge la minima intensità, ciò che accadrà in generale a non grande distanza da  $Q$ , e l'asse  $z$  nella direzione della derivata temporale, cambiata di segno, del campo magnetico, che è naturalmente normale alla precedente. Assumiamo inoltre come origine dei tempi, l'istante in cui il campo è minimo. Le componenti del campo a cui l'atomo è sottoposto in un istante generico avranno la forma:

$$H_x = A; \quad H_y = 0; \quad H_z = -Ct.$$

Supponiamo  $j = 1/2$  ponendo  $\psi = \xi\psi^{1/2} + \eta\psi^{-1/2}$ ; le equazioni del moto saranno

$$\dot{\xi} = -\frac{\pi i}{h} g\mu_0 (-Ct\xi + A\eta),$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\pi i}{h} g\mu_0 (A\xi + Ct\eta).$$

A fine di operare con variabili prive di dimensioni, introduciamo una nuova misura del tempo:

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi}{zh}} g\mu_0 C \cdot t$$

e la grandezza numerica

$$k = \frac{2\pi g\mu_0 A^2}{hC}$$

che dà il rapporto fra la frequenza di precessione dell'atomo e la frequenza di rotazione della direzione del campo quando questo rapporto ha il valore minimo, cioè per  $\tau = 0$ . Se il raggio di vapore passa con velocità  $v$  a una distanza  $d$  dal punto  $Q$ , nelle cui vicinanze

regnano gradienti di campo dell'ordine di  $G$  gauss per cm.,  $K$  risulterà dell'ordine di  $10^7 G \frac{d^2}{v}$ ; per es., per  $v=10^5$  e  $G \approx 1$  sarà  $k \approx 100d^2$  e così  $k \approx 1$  per  $d=1$  mm.. Nelle nuove variabili avremo:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= -i(-2\tau\xi + \sqrt{k}\eta) \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -i(\sqrt{k}\xi + 2\tau\eta)\end{aligned}$$

che possiamo semplificare con la posizione:

$$\xi = e^{i\tau^2} f; \quad \eta = e^{-i\tau^2} g$$

da cui segue:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{df}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{-2i\tau^2}g \\ \frac{dg}{d\tau} = -i\sqrt{k}e^{2i\tau^2}f. \end{cases}$$

Eliminando  $g$  troviamo:

$$(6) \quad \frac{d^2f}{d\tau^2} + h i \tau \frac{df}{d\tau} + kf = 0.$$

Delle soluzioni di questa equazione differenziale possiamo dare una rappresentazione integrale che permette di determinarne l'espressione asintotica per grandi valori, positivi o negativi, di  $\tau$ ; questo è appunto quanto ci occorre, poichè noi supponiamo che per  $\tau = -\infty$  l'atomo sia orientato rispetto al campo e vogliamo determinarne l'orientazione per  $\tau \rightarrow \infty$ .

Poichè tutto si riduce a calcolare l'angolo  $\alpha$  più sopra definito, basta considerare una sola soluzione della (6). Essa ci è data da

$$f(\tau) = \frac{\sqrt{k} e^{-\frac{k\pi}{8}}}{2(1+i)\sqrt{\pi}} \int s^{\frac{k}{4i}-1} e^{\frac{s^2}{8i} + s\tau} ds$$

log  $s$  avendo il suo valore principale e la condizione ai limiti

$$\left| s^{\frac{k}{4i} + s\tau} e^{\frac{s^2}{8i} + s\tau} \right|_c = 0$$

essendo soddisfatta se il cammino di integrazione ha la forma indicata nella figura, dove si sono distinti i due casi  $\tau < 0$  e  $\tau > 0$ .

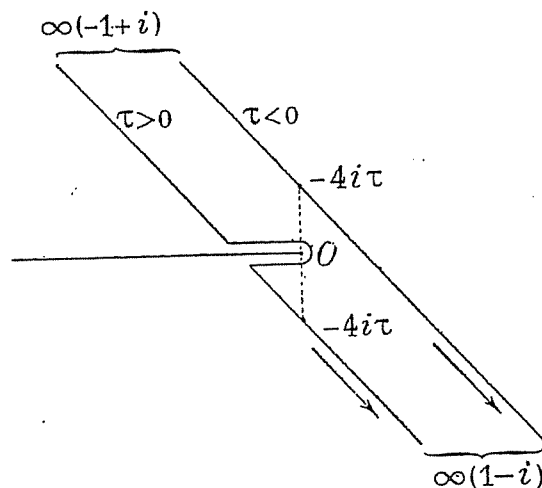
La parte negativa dell'asse reale è linea di discontinuità nella funzione integranda e non può essere attraversata; inoltre, a fine di permettere la valutazione delle espressioni asintotiche i cammini

di integrazione si sono fatti passare per il punto di sella  $s = -4i\tau$  nella direzione della massima pendenza.

Per  $\tau \rightarrow -\infty$  tutto l'integrale proviene dalle vicinanze del punto  $s = -4i\tau$  e mediante la sostituzione

$$s = -4i\tau + (1-i)p$$

si calcolano facilmente i primi termini dello sviluppo asintotico di  $f$



e, attraverso la prima delle (5), di  $g$ . Si trova, trascurando termini che tendono a zero:

$$\tau \rightarrow -\infty; \quad f = 0; \quad g = (-4\tau)^{\frac{k}{4i}}.$$

Per  $\tau \rightarrow \infty$  l'espressione asintotica dell'integrale proviene in parte dalle vicinanze del punto di sella  $s = -4i\tau$  e in parte da quelle del punto di diramazione  $O$ . Si trova in questo caso:

$$\tau \rightarrow \infty: \quad f = -\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{k} e^{-\frac{k}{4i}} e^{-\frac{k\pi}{8}} \sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right) \Gamma\left(\frac{k}{4i}\right)$$

$$g = (4\tau)^{\frac{k}{4i}} e^{-\frac{k\pi}{4}}.$$

Badando che per  $a$  reale <sup>(1)</sup>

$$|\Gamma(ai)| = \sqrt{\frac{\pi}{a \sinh(\pi a)}}$$

oppure tenendo presente la costanza di  $|f^2| + |g^2|$  troviamo le se-

(1) V., p. es., WHITTAKER e WATSON, *Modern Analysis*, IV ed., p. 259.

genti espressioni per  $|f|$  e  $|g|$  :

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow -\infty : & \quad |f| = 0; \quad |g| = 1 \\ \tau \rightarrow \infty : & \quad |f| = \sqrt{1 - e^{-\frac{k\pi}{2}}}; \quad |g| = e^{-\frac{k\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Per  $\tau \rightarrow -\infty$  il campo è diretto secondo l'asse  $z$ , cosicchè all'inizio del fenomeno l'atomo ha nella direzione del campo il momento  $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ ; per  $\tau \rightarrow \infty$  il campo è diretto invece secondo  $-z$  e il valore limite di  $|g|^2$  segna quindi la probabilità che l'atomo inverta la propria orientazione, si trovi cioè ad avere, dopo essere passato nelle vicinanze di  $Q$ , un momento  $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$  nella direzione del campo. Tale probabilità è quindi

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{k\pi}{2}}.$$

Così per  $K = 1$  il 21 % e per  $K = 2$  il 4,3 % degli atomi si capovolgono.

La soluzione generale del problema per  $j$  qualsiasi e transizioni da  $m$  a  $m'$  si avrà dalla (4) sostituendovi il valore dell'angolo  $\alpha$  di sbandamento. E poichè nel nostro caso

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

risulta confrontando con l'espressione precedente

$$\alpha = 2 \arcsin e^{-\frac{k\pi}{4}}.$$