

**Fisica.** — *Sullo sdoppiamento dei termini Roentgen e ottici a causa dell'elettrone rotante e sulle intensità delle righe del cesio.* Nota <sup>(1)</sup> di G. GENTILE e E. MAJORANA, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

1. Vogliamo mostrare in questa Nota che il potenziale di Fermi non solo permette una buona determinazione *a priori* di tutti i livelli energetici degli atomi pesanti; ma permette anche di calcolare con grande esattezza, dato il carattere statistico di questa teoria dell'atomo, lo sdoppiamento dei termini; cosa tanto più importante quando si pensi che a questi sdoppiamenti non erano applicabili le formule relativistiche di Sommerfeld, uscendo questo fenomeno fuori dagli schemi della teoria della struttura fina. Infatti si sa che bisogna ricorrere all'ipotesi dell'elettrone rotante, ipotesi che del resto ha perso ogni carattere ipotetico e appare oggi come fondata su solide basi teoriche, dopo l'ultimo lavoro di Dirac <sup>(2)</sup>. I nostri calcoli si riferiscono per i livelli Roentgen al termine 3 M del Gadolino ( $Z = 64$ ) e dell'Uranio ( $Z = 92$ ) e per i termini ottici ai termini P del cesio ( $Z = 55$ ).

Il potenziale elettrostatico nell'interno d'un atomo di numero  $Z$  si può porre sotto la forma:  $V = \frac{Ze}{r} \varphi \left( \frac{r}{\mu} \right)$  dove  $\varphi$  è una funzione numerica in genere minor d'uno, che tien conto dell'azione di schermo delle altre cariche elettroniche. Precisamente in prossimità del nucleo ove questa azione è minima  $\varphi = 1$ , inoltre per  $r$  crescente  $\varphi$  diminuisce finchè, per  $r = \infty$  e per atomi neutri,  $\varphi = 0$ .

Evidentemente i valori di  $\varphi$  dipendono dalla distribuzione media locale degli elettroni intorno al nucleo. Di questa nuvola di elettroni si sa inoltre questo: che obbedisce al principio di Pauli. Quindi la statistica di Fermi applicata a questo speciale gas degenere fornisce un'ulteriore relazione fra potenziale e densità elettrica. Scrivendo allora l'equazione di Poisson, Fermi <sup>(3)</sup> arriva all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \quad \text{in cui: } x = \frac{r}{\mu} \quad ; \quad \mu = \frac{3^{\frac{2}{3}} h^2}{2^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} m e^2 Z^{\frac{1}{3}}}$$

Se si fissa l'attenzione su di un determinato elettrone si può in prima approssimazione ritenere <sup>(4)</sup> che gli altri  $Z - 1$  siano distribuiti come in un

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1928.

(2) DIRAC, «Roy. Soc. Proc.». A, vol. 117, p. 610; vol. 118, p. 351, 1928.

(3) FERMI, «Ztschr. für Phys.», 48, p. 73, 1928.

(4) ID., «Rendic. Lincei», serie 6<sup>a</sup>, vol. VII, fasc. 9, p. 726, 1928.

atomo neutro di numero  $Z - 1$  e quindi scrivere il potenziale a cui esso è soggetto:  $V = \frac{e}{r} \left[ 1 + (Z - 1) \varphi \left( \frac{r}{\mu} \right) \right]$ ; naturalmente così si trascurano, nel caso di un elettrone interno, sopra tutto le conseguenze del principio di Pauli, che non è un principio statistico ma un rigoroso principio di esclusione, e nel caso di un elettrone esterno la polarizzazione che nasce nel resto atomico. Tuttavia nel primo caso l'errore è minimo e nel secondo esistono incertezze di più grave importanza dovute all'esistenza del sistema periodico che si manifesta con regolari oscillazioni di tutte le proprietà atomiche superficiali intorno a un andamento medio; il solo perseguibile con mezzi statistici.

2. L'equazione di Schrödinger si scriverà in generale:

$$\Delta_2 \psi + \frac{8 \pi^2 m}{h^2} \left[ E + \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r} (Z - 1) \varphi \right] \psi = 0.$$

Se  $k$  è il quanto azimutale,  $\psi$  si spezza in una funzione sferica di ordine  $k$  e in una funzione del raggio che conviene mettere sotto la forma  $\frac{\chi}{r}$ ; la  $\chi$  obbedisce allora all'equazione:

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = \left[ \frac{k(k+1)}{x^2} - a \frac{1 + (Z-1)\varphi}{x} + \varepsilon \right] \chi$$

essendo:

$$a = \frac{8 \pi^2 m}{h^2} e^2 \mu \quad ; \quad \varepsilon = - \frac{8 \pi^2 m}{h^2} \mu^2 E$$

l'integrazione numerica per i tentativi è semplice nel caso di quanto radiale  $l$  (nessun nodo nella  $\chi$ ). In prossimità dello zero ci siamo serviti dello sviluppo in serie della  $\varphi$ .

Per il termine 3 *d* del gadolino,  $\varepsilon = 4,29$  e quindi il termine espresso in Rydberg risulta:  $-E = 86,3$ , in esatto accordo con l'esperienza (86,6) ove si tenga conto della correzione relativistica che abbassa il termine semplice in maniera che risulti la sua distanza dal termine più basso precisamente la metà della distanza fra i termini effettivi. Lo sdoppiamento in una teoria semplificata si calcolerebbe in base all'energia mutua fra il momento magnetico dell'elettrone e il valor medio del campo magnetico virtuale in cui esso viene a trovarsi.

La teoria di Dirac dà in prima approssimazione;

$$\Delta E = \frac{5}{2} \frac{h^2}{8 \pi^2 m} \frac{\int \psi \bar{\psi} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} dS}{mc^2}.$$

Per il gadolino si trova:  $\Delta E = 2,20 R$ , in buon accordo con l'esperienza (2,4 R).

Il calcolo ripetuto per lo stesso termine dell'uranio dà:  $E = 258 R$  (anche questa volta in piena armonia con il valore sperimentale 255) e  $\Delta E = 11,7$  invece di 12,96.

3. Il calcolo del termine  $6p$  del cesio, perfettamente analogo al precedente, conduce all'autofunzione di cui riportiamo i valori numerici. Si trova per il valore del termine:

$$n = 24600 \text{ cm}^{-1}$$

di fronte al doppietto sperimentale:

$$n_1 = 19674$$

$$n_2 = 20228$$

lo sdoppiamento calcolato secondo la formula ricordata più sopra con il coefficiente corrispondente al diverso quanto azimutale risulta:

$$\Delta n = 1020 \text{ cm}^{-1}$$

invece del valore sperimentale:

$$\Delta n = 554 \text{ cm}^{-1}$$

Le divergenze fra teoria e esperienza si spiegano perfettamente entro l'ambito delle approssimazioni statistiche, fra le quali ha massima importanza quella che dipende dal posto che l'elemento occupa nel sistema periodico. Precisamente essendo il cesio un metallo alcalino, il resto atomico ha la struttura compatta dei gas nobili, di modo che la carica efficace, per l'elettrone luminoso tende a 1 con particolare rapidità. Nè deve sorprendere che per lo sdoppiamento si manifesti uno scarto tanto più forte che per l'energia. Per comprenderne intuitivamente la ragione basta riferirsi al modello classico di Bohr-Sommerfeld; si vede allora facilmente che tutte le orbite molto allungate e di uguale quanto azimutale hanno approssimativamente la stessa distanza perielica e in vicinanza del nucleo si confondono in una unica curva percorsa con la stessa legge oraria. Ora è essenzialmente in questa zona che ha origine lo sdoppiamento; segue che esso è all'incirca inversamente proporzionale al periodo di rivoluzione (intervallo fra due passaggi al perielio). Se la non newtonianità del campo si manifesta fortemente, come nel nostro caso, già a non grande distanza dall'afelio, un allungamento anche modesto dell'orbita determina una variazione considerevolissima del periodo di rivoluzione (1). Del resto un calcolo diretto mostra che la nostra inter-

(1) In generale, per livelli non eccitati o per livelli eccitati di debole quanto azimutale, si ha nel modello classico un ordinario moto a rosetta. Al contrario, per taluni

pretazione è fondata. Supponiamo di correggere il potenziale statistico in guisa che il valore del termine si accordi con quello sperimentale. Ciò può farsi in infiniti modi; tuttavia una limitazione si impone, e cioè che il potenziale corretto sia sempre intermedio fra quello statistico e quello newtoniano limite. Si trova allora che esiste un limite superiore per lo sdoppiamento calcolato in base all'autofunzione corrispondente, il quale vale:

$$\Delta_s n = 750 \text{ cm}^{-1}$$

esso corrisponde al passaggio brusco del potenziale statistico a quello newtoniano a una distanza di circa 2,2 Å dal nucleo. Con un raccordo più verosimile fra potenziale statistico e newtoniano del tipo:

$$\frac{v_s - v}{v_s - v_n} = e^{-k\varphi}$$

si trova un valore in quasi perfetto accordo con l'esperienza.

Abbiamo infine calcolato il rapporto fra le intensità delle prime due righe di assorbimento. Se si indica con  $\psi_0$  l'autofunzione corrispondente al termine fondamentale  $6_s$  e con  $\psi'_1$  e  $\psi''_1$  quelle corrispondenti ai termini  $6_p$  e  $7_p$ , tale rapporto vale:

$$\frac{i_1}{i_2} = \left[ \frac{\int \psi_0 \bar{\psi}'_1 x^3 dx}{\int \psi_1 \bar{\psi}''_1 x^3 dx} \right]^2$$

Le auto-funzioni sono state determinate conservando il potenziale statico fino a  $r = 2,2$  Å e il potenziale newtoniano a distanza maggiore. In queste condizioni, come si è detto, si ottiene per il termine  $6_p$  il valore sperimentale; è notevole che nelle stesse condizioni anche il valore teorico del termine  $7_p$  si accordi presso che esattamente con l'esperienza. Per ragioni di semplicità non si è determinato teoricamente il termine  $6_s$ ; l'autofunzione  $\psi_0$  è stata invece costruita dall'infinito e fino a non grande distanza dal nucleo, in base al valore sperimentale del termine. Le  $\chi$  non normalizzate sono riportate nella tabella. Si trova:

$$\frac{i_1}{i_2} = 125$$

Lo sdoppiamento del termine  $7_p$  calcolato in base all'autofunzione  $\psi''_1$  risulta:

$$\Delta_s n = 220 \text{ cm}^{-1}$$

livelli eccitati di forte quanto azimutale, l'orbita di Bohr-Sommerfeld si spezza in due distinte, di cui l'una si svolge nella zona profonda dell'atomo, l'altra nella regione più esterna. Il modello cessa allora di dare indicazioni intuitive.

e deve ancora considerarsi come un limite superiore. L'esperienza dà:

$$\Delta_n = 181$$

in accordo questa volta assai migliore, per ragioni facili a comprendersi.

TAVOLA I.

$x$	$\chi_{64}$	$\chi_{92}$
0,2	0,174	2,138
0,4	0,603	6,840
0,6	0,925	8,265
0,8	1,031	7,231
1,0	0,976	5,482
1,2	0,838	3,739
1,4	0,675	2,396
1,6	0,521	1,515
1,8	0,389	0,940
2,0	0,284	0,570

TAVOLA II.

$x$	$\chi$
0	0
0,1	0,0519
0,2	0,1030
0,4	0,0627
0,6	-0,0593
0,8	-0,1442
1	-0,1587
1,5	0,0019
2	0,1831
3	0,2024
4	-0,0374
6	-0,3990
8	-0,3764
10	-0,1508
12	0,1276
16	0,5942
20	0,8503
25	0,9281
30	0,8474
35	0,7012
40	0,5462
50	0,2990

TAVOLA III.

$x$	$\chi_0$	$\chi'_1$	$\chi''_1$
4	-0,091	-0,038	-0,039
5	-0,390	-0,269	-0,270
6	-0,513	-0,399	-0,399
7	-0,477	-0,426	-0,425
8	-0,336	-0,376	-0,373
9	-0,141	-0,276	-0,270
10	0,072	-0,147	-0,139
11	0,279	-0,007	0,004
12	0,466	0,134	0,147
14	0,757	0,391	0,406
16	0,931	0,596	0,601
18	1,000	0,740	0,723
20	1,005	0,840	0,788
25	0,898	0,967	0,781
30	0,717	0,962	0,571
35	0,535	0,876	0,234
40	0,377	0,749	-0,154
50	0,171	0,484	-0,820
60	0,071	0,282	-1,227
70	0,027	0,153	-1,326
80	0,010	0,079	-1,221
100	0,001	0,019	-0,791