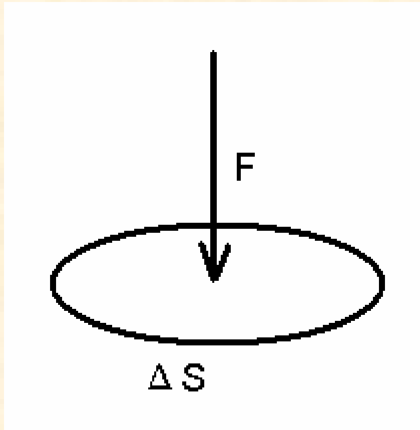
Lezione V

Il concetto di Pressione

Si consideri un fluido ed una superficie di esso **ΔS**. Si applichi in direzione normale all'elemento di superficie una forza $\vec{\mathbf{F}}$**.** Si definisce pressione esercitata da $\vec{\mathbf{F}}$ su **ΔS**

$$p = \frac{F_{perp}}{\Delta S} \qquad [p] = \frac{N}{m^2} = Pa$$



La pressione è uno scalare!

In generale la pressione può variare da punto a punto nel fluido.

Il Principio di Pascal

Quando facciamo un'iniezione, premiamo sul pistone della siringa, cioé esercitiamo una pressione sulla superficie del **liquido** (la medicina) che è a contatto con esso. Questa pressione si trasmette a tutta la massa del liquido che, a sua volta, preme, **con la stessa intensità**, contro tutte le pareti del cilindro ed esce attraverso l'ago, unica via di fuga, con una velocità tale che è funzione della pressione da noi esercitata.

Facciamo un altro esempio: prendiamo un palloncino e **premiamo** con le dita (Fig. 1) su due lati opposti di esso, notiamo che, allo schiacciamento causato dalla pressione delle dita, corrisponderà un rigonfiamento nelle altre zone (Fig. 2), che aumenterà in relazione all'aumento della pressione da noi esercitata.

Fig.1

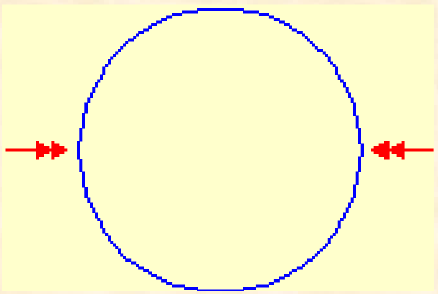
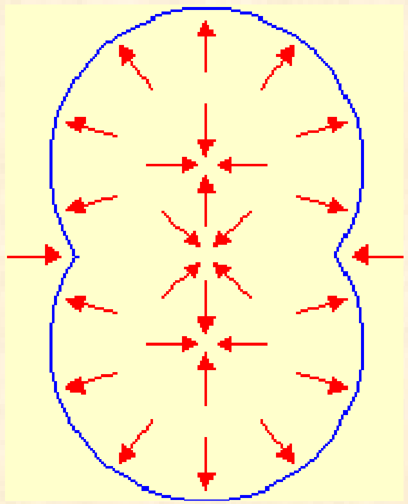


Fig.2



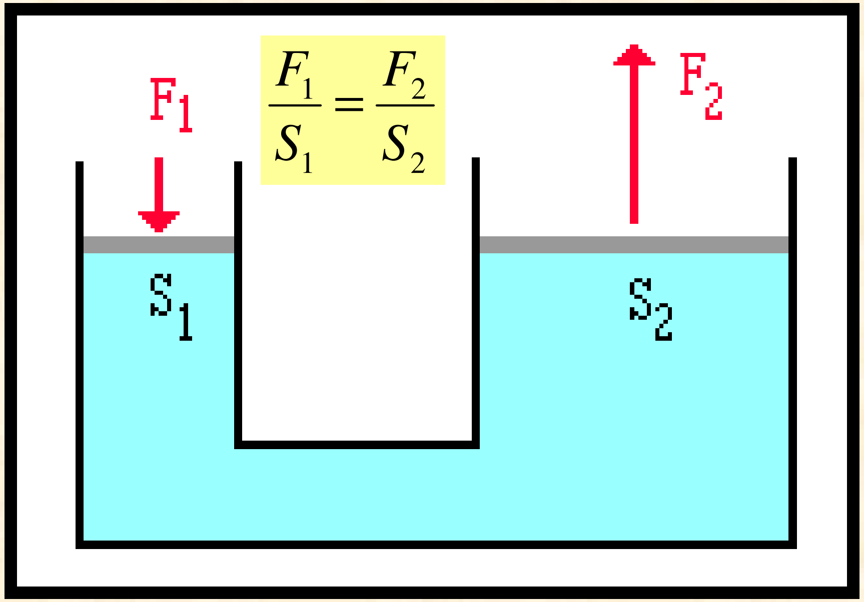
Questi esempi rappresentano quanto descritto dal Principio di Pascal, la cui definizione recita così:

La pressione, esercitata in una regione qualsiasi di un fluido, si trasmette in tutte le direzioni con la stessa intensità

Elevatore idraulico: secondo il principio di Pascal la pressione si trasmette invariata in tutte le direzioni su superfici di area uguale all'interno di un fluido. In un sistema di recipienti comunicanti tra loro come quello in figura è possibile sfruttare il principio per ottenere forze di intensità diversa per superfici diverse del liquido.

Applicando una forza di intensità $\mathbf{F_1}$ sulla superficie $\mathbf{S_1}$, la pressione risultante avrà intensità $\mathbf{p_1=F_1/S_1}$ che, per il principio di Pascal, si trasmette dal basso verso l'alto sul pistone di destra di sezione $\mathbf{S_2}$. Se $\mathbf{F_2}$ è l'intensità della forza trasmessa, sarà $\mathbf{F_1/S_1 = F_2/S_2}$, da cui

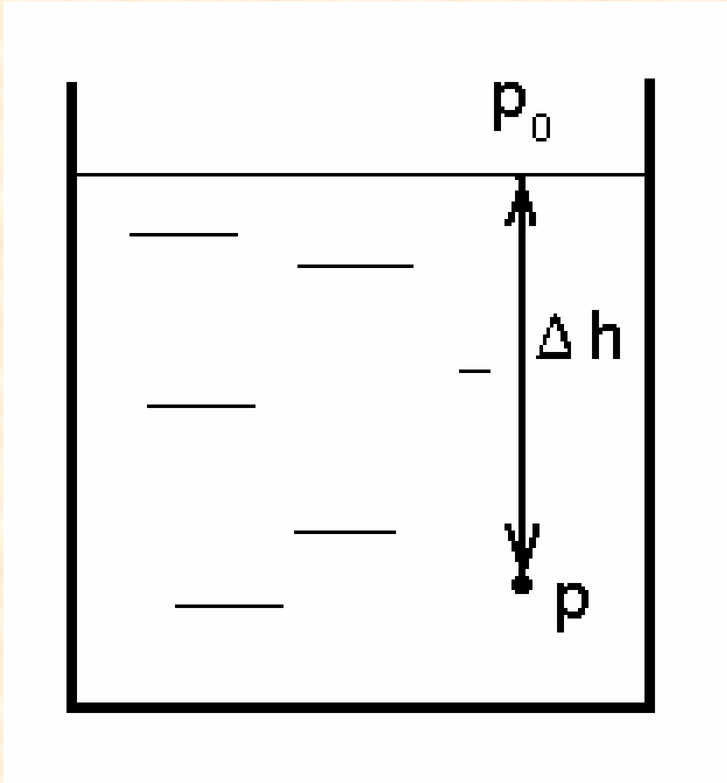
$$\mathbf{F_2 = F_1\,(S_2/S_1)}$$



La legge di Stevino

Nel caso di un fluido incompressibile, cioè con densità $\boldsymbol{\delta}$ costante punto per punto, la variazione di pressione con la profondità è data dalla legge:

$$p - p_0 = \rho\,\Delta h = \delta\, g\,\Delta h$$



dove $\boldsymbol{\rho}$ è il peso specifico e $\boldsymbol{\delta}$ la densità

$$\rho = \delta\, g$$

$$\delta = \frac{M}{V}$$

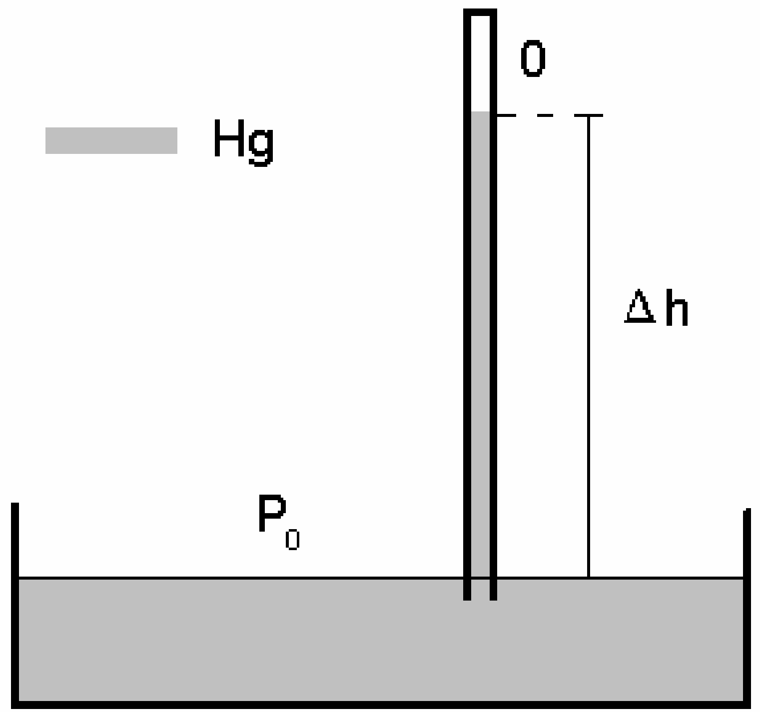
A quanto ammonta la pressione, P_0, esercitata dall'atmosfera al livello del mare, se espressa in *pascal* (Pa)?

Per bilanciare la pressione atmosferica P_0 occorre una colonna di

760 mm_{Hg} = 760 *torr*

$P_0 = \delta_{Hg}\, g\, \Delta h$

δ_{Hg}=13.6 g/cm^3



da cui:

$$P_0 = \delta_{Hg}\, g\, \Delta h = 13.6 \cdot \frac{10^{-3}}{\left(10^{-2}\right)^3} \cdot 9.81 \cdot 0.760\, \frac{N}{m^2} \approx 101300\, \frac{N}{m^2} = 1.013 \cdot 10^5\ Pa$$

$$P_0 = 1.013 \cdot 10^5\ Pa \equiv 1\ Atm$$

Qual è la pressione esercitata su un sub che scenda alla profondità di 10 m dal livello del mare?

$$p = P_0 + \delta_{H_2O}\, g\, \Delta h$$

P_0=1 Atm = $1.013 \cdot 10^5$ Pa = $1.013 \cdot 10^5$ N/m^2

δ_{H2O} = 10^3 Kg/m^3

g = 9.81 m/s^2

Δh = 10 m

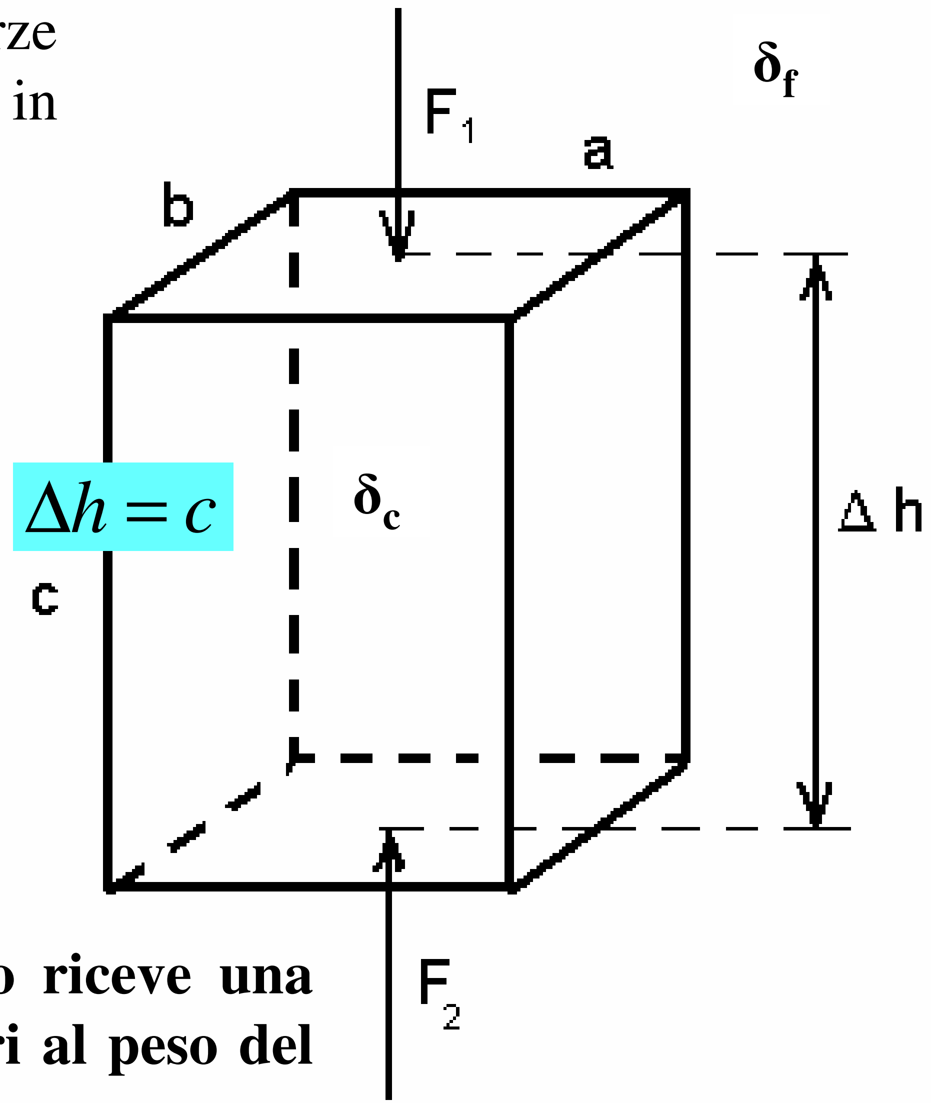
p = $(1.013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10)$ N/m^2 = $(1.013+0.981) \cdot 10^5$ N/m^2

10 m di acqua incrementano la pressione di circa 1 Atm.

Il principio di Archimede

Calcoliamo la risultante delle forze su un corpo di densità $\boldsymbol{\delta_c}$ immerso in un fluido di densità $\boldsymbol{\delta_f}$.

$$
\begin{aligned}
R &= F_2 - F_1 \\
&= a\,b\,p_2 - a\,b\,p_1 \\
&= a\,b\left(p_2 - p_1\right) \\
&= a\,b\,\delta_f\;g\,\Delta h = a\,b\,c\,\delta_f\;g \\
&= V\,\delta_f\;g = M_f\;g
\end{aligned}
$$



Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del liquido spostato.

Si consideri un corpo di densità $\boldsymbol{\delta_c}$ immerso in un fluido di densità $\boldsymbol{\delta_f}$. La parte di volume immersa sia ***V''*** e sia il corpo all'equilibrio. In questo caso la risultante della forza peso $\vec{\mathbf{P}}$ e della spinta di Archimede $\vec{\mathbf{A}}$ è nulla.

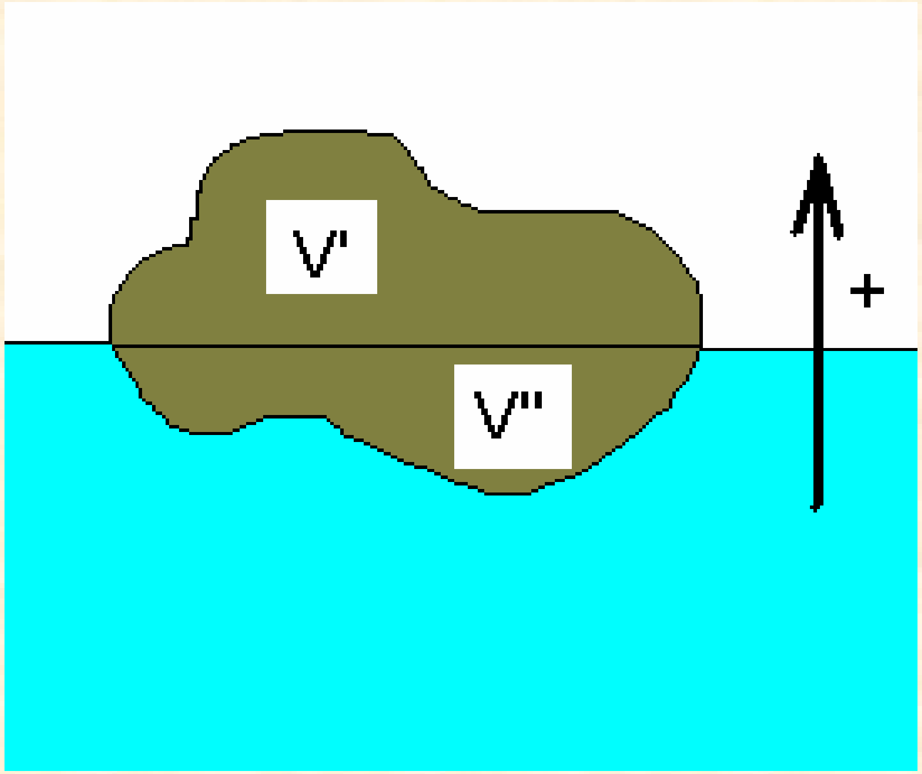
$$P = -\delta_c \; g \; V$$

$$A = +\delta_f \; g \; V''$$

$$\boxed{P + A = 0}$$

$$\delta_c \; g \; V = \delta_f \; g \; V''$$

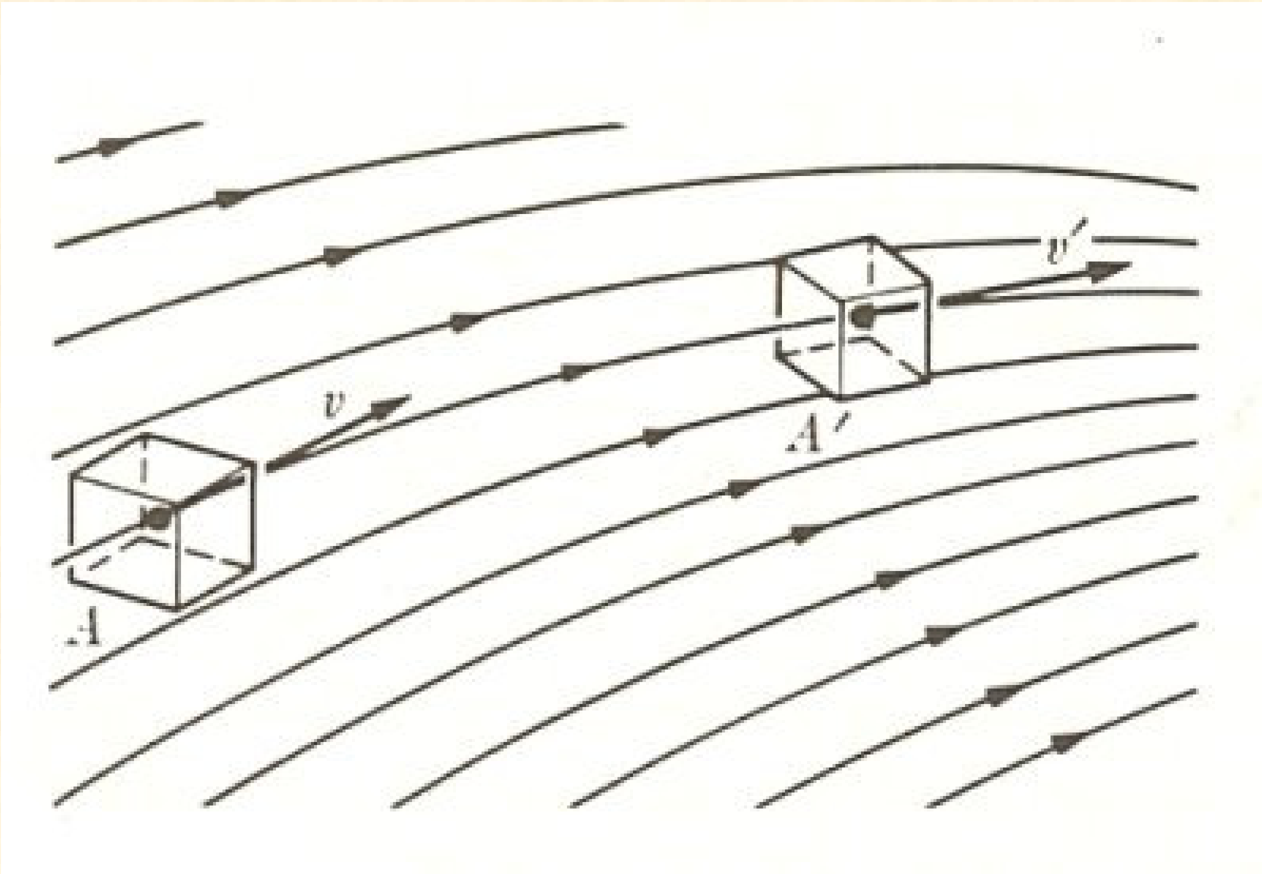
$$\frac{V''}{V} = \frac{\delta_c}{\delta_f} \leq 1$$



Un corpo per galleggiare deve avere densità minore di quella del fluido in cui è immerso.

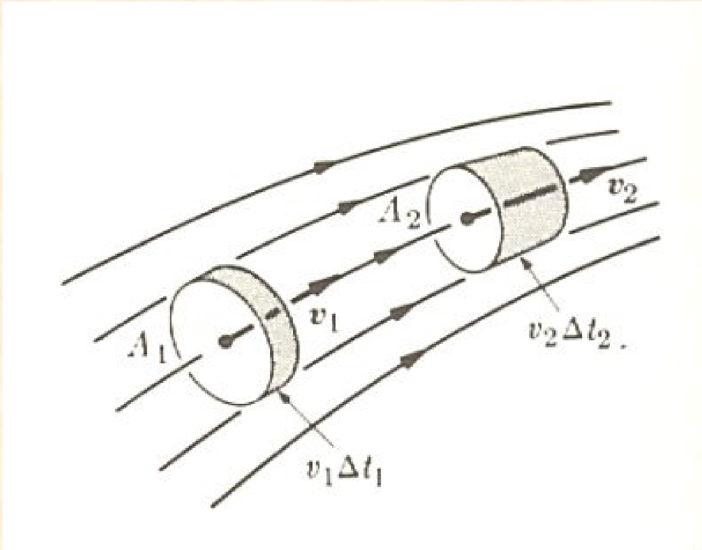
La portata volumetrica e la legge di Leonardo

Consideriamo un fluido **incomprimibile**, cioè avente densità indipendente dalla pressione a cui è sottoposto, in **moto stazionario**, cioè con velocità che, punto per punto, non variano nel tempo.



Legge di Leonardo

La traiettoria seguita da ciascun elemento fluido si dice linea di flusso. L'insieme delle linee di flusso costituisce una superficie tubolare detta tubo di flusso che, se ha sezione molto piccola, viene chiamato filetto fluido elementare.



Caratteristica di un fluido incomprimibile in moto stazionario è la **conservazione della massa**: la massa del liquido compresa tra due sezioni $\mathbf{A_1}$ ed $\mathbf{A_2}$ non varia nel tempo, ossia la massa che entra nel tempo $\mathbf{\Delta t}$ attraverso $\mathbf{A_1}$ uguaglia la massa che esce nello stesso intervallo di tempo da $\mathbf{A_2}$. Dunque:

$$h_i = v_i \Delta t$$

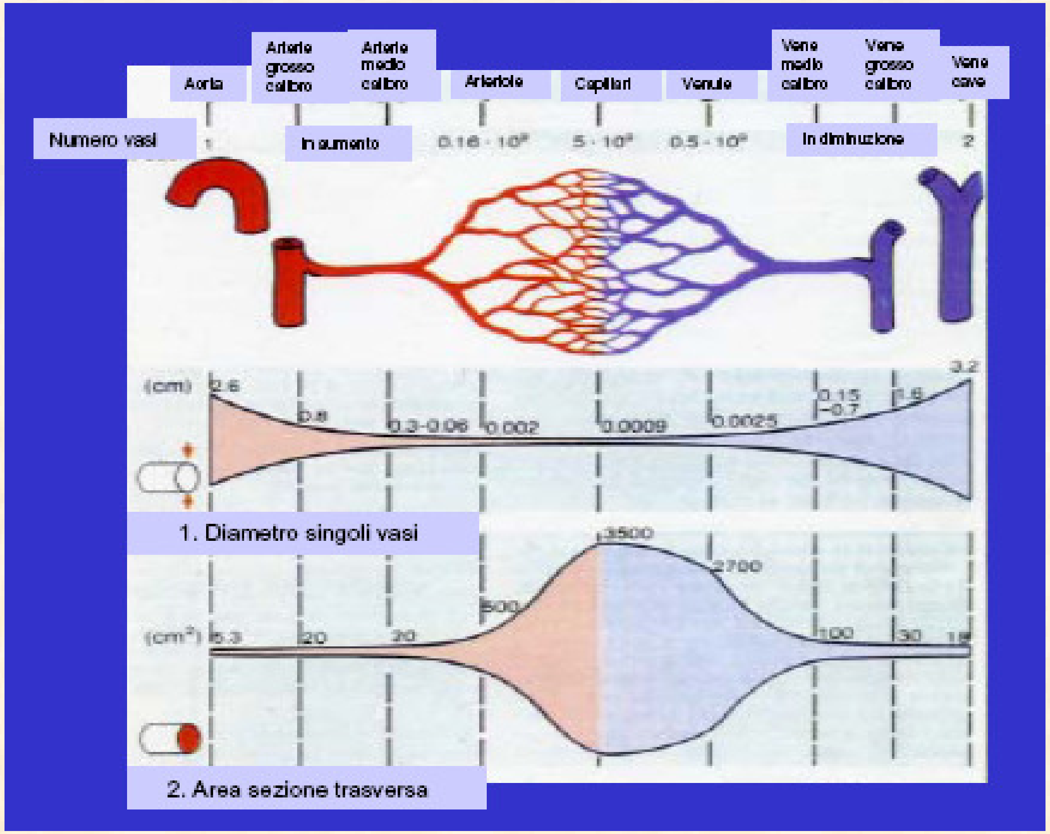
$$M_1 = M_2 \quad \Longrightarrow \quad \delta\, A_1 h_1 = \delta\, A_2 h_2 \quad \Longrightarrow \quad A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \quad \Longrightarrow \quad A_1 v_1 = A_2 v_2$$

il prodotto A·v è INVARIANTE

La quantità **Q = A·v** si dice **portata volumetrica**: è il volume di fluido che passa nell'unità di tempo attraverso una sezione di tubo.

$$[Q] = [A \cdot v] = m^3/s = 10^3\ l/s$$

Nel sistema cardio-circolatorio, l'area della sezione trasversa aumenta dall'aorta verso i capillari, dove raggiunge il massimo valore, e si riduce poi dai capillari fino alle vene cave. Di conseguenza, la velocità del sangue prima diminuisce, ed è minima a livello dei capillari (questo favorisce i processi di scambio), e poi aumenta di nuovo.



Es:

Si consideri un condotto di raggio **R** che si dirama in **3** condotti derivati di stesso raggio **R**. Se il liquido nel condotto primario ha velocità **v**, quale sarà la velocità **v'** nei condotti derivati?

Dalla **legge di Leonardo** si ottiene la portata volumetrica in ingresso:

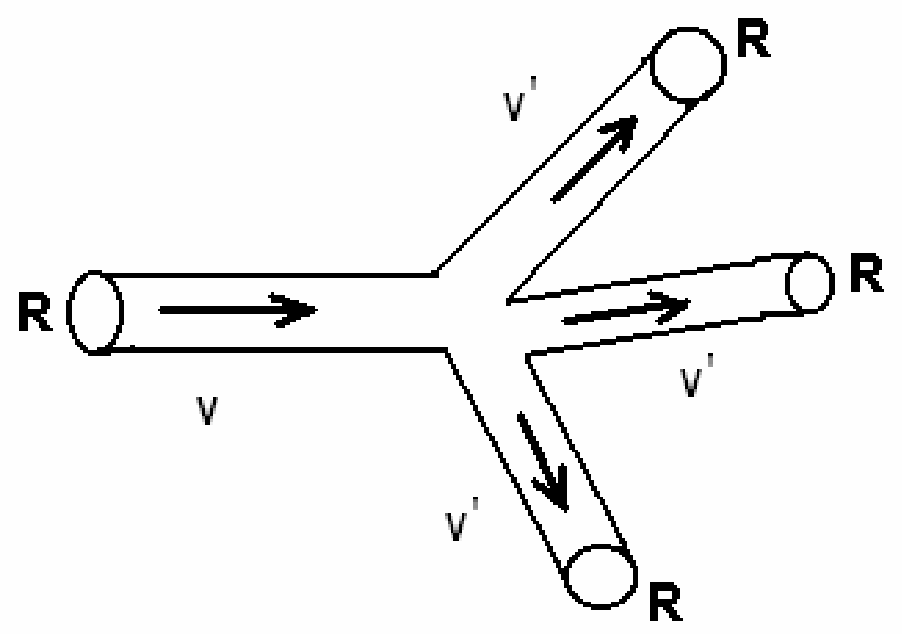
$\mathbf{Q = (\pi R^2)\, v}$

che deve essere uguale a quella in uscita:

$\mathbf{Q' = 3\, (\pi R^2)\, v'}$

da cui $\mathbf{(\pi R^2)\, v = 3\, (\pi R^2)\, v'}$

$\boxed{\mathbf{v' = v/3}}$

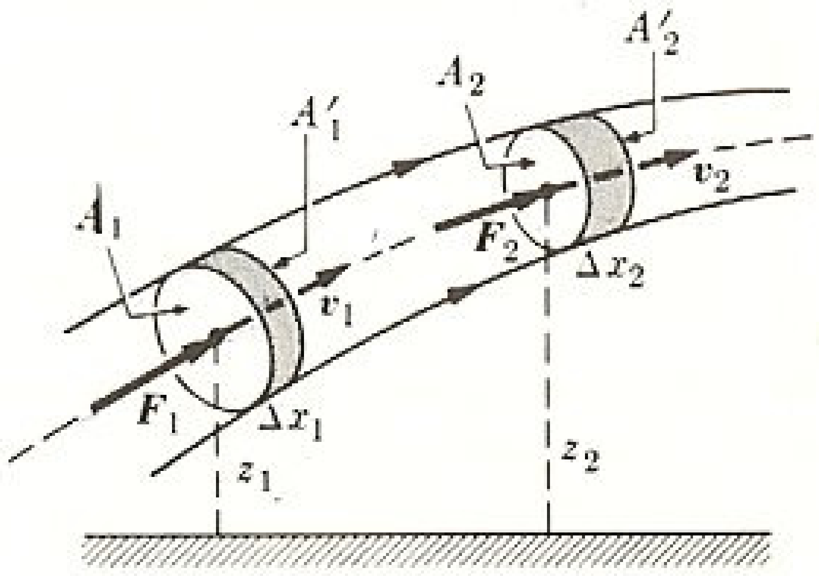


Il teorema di Bernoulli

ossia la conservazione dell'energia in un fluido

Consideriamo un fluido incomprimibile in moto stazionario **in assenza di dissipazione**.

Chiamiamo $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ le pressioni esercitate rispettivamente su $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ e $\mathbf{\Delta x_1}$ e $\mathbf{\Delta x_2}$ le distanze percorse nell'intervallo $\mathbf{\Delta t}$. La sezione $\mathbf{A_1}$ verrà "spinta" dal fluido esterno al volumetto nello stesso verso del moto e si avrà un **lavoro fatto sul fluido interno** pari a $\mathbf{F_1 \Delta x_1 = A_1 p_1\ \Delta x_1}$. Su $\mathbf{A_2}$, invece, il fluido esterno oppone resistenza al moto ed il **lavoro fatto** risulta negativo, $\mathbf{-F_2 \Delta x_2 = -p_2\, A_2\, \Delta x_2}$.



Quindi, il lavoro fatto dalle forze di pressione è

$$\mathbf{L_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 \approx (p_1 - p_2) A_1 \Delta x_1}$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso per lo spostamento del fluido dalla quota $\mathbf{z_1}$ alla quota $\mathbf{z_2}$, invece, è pari all'opposto della variazione di energia potenziale gravitazionale

$$\mathbf{L_2 = -m\, g\, z_2 + m\, g\, z_1 \approx \delta\, A_1 \Delta x_1\, g\, (z_1 - z_2)}$$

perché $\mathbf{m \approx \delta\, A_1 \Delta x_1}$ ($\boldsymbol{\delta}$ sia la densità del fluido).

Il lavoro totale compiuto sul volume di fluido compreso tra $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$, dunque, risulta essere

$$\mathbf{L = L_1 + L_2 = (p_1 - p_2) A_1 \Delta x_1 - \delta\, A_1 \Delta x_1\, g\, (z_2 - z_1)}$$

Ma per il teorema delle forze vive il lavoro è pari alla variazione dell'energia cinetica, $\mathbf{L = \Delta E_c}$, che è

$$\mathbf{\Delta E_c = 1/2\, m\, v_2^2 - 1/2\, m\, v_1^2 \approx (1/2\, \delta\, v_2^2 - 1/2\, \delta\, v_1^2)\, A_1 \Delta x_1}$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene

$$(p_1 - p_2)\, A_1\, \Delta x_1 = [(1/2\ \delta\ v_2^2 + \delta\ g\ z_2) - (1/2\ \delta\ v_1^2 + \delta\ g\ z_1)]\ A_1\, \Delta x_1$$

cioè, semplificando $A_1\, \Delta x_1$,

$$1/2\ \delta\ v_1^2 + \delta\ g\ z_1 + p_1 = 1/2\ \delta\ v_2^2 + \delta\ g\ z_2 + p_2$$

e dunque

$$\boxed{1/2\ \delta\ v^2 + \delta\ g\ z + p = \text{costante}}$$

È questa l'espressione del **teorema di Bernoulli.** Come applicazione di questo teorema, si ha che, se il fluido si muove solo su un piano orizzontale, il termine $\delta\ g\ z$ (energia potenziale) rimane costante per cui

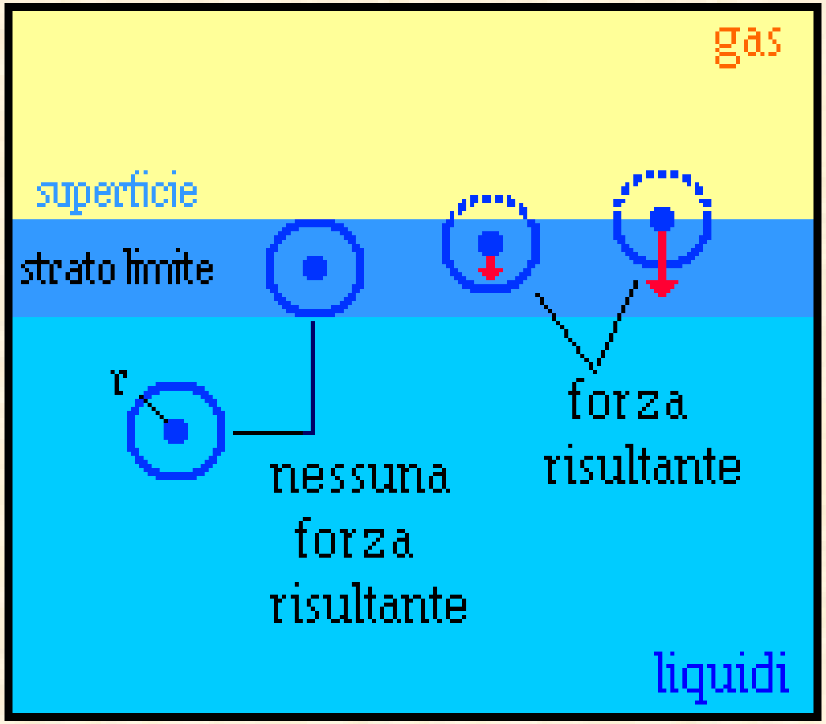
$$\boxed{1/2\ \delta\ v^2 + p = \text{costante}}$$

ossia v^2 e p risultano tali che se aumenta un termine, diminuisce l'altro.

La Tensione Superficiale

Nella materia allo stato liquido ogni molecola è circondata da altre molecole: le forze attrattive tra molecole, per il fatto che ognuna di esse è completamente circondata da altre, si bilanciano permettendo che ogni molecola si sposti liberamente (non vi è prevalenza di forze in una qualche direzione).

Appena sotto la superficie del liquido possiamo prendere in considerazione uno strato spesso quanto il diametro delle molecole costituenti il liquido: questo strato è detto *strato limite* ed è quello in cui avviene il passaggio da liquido a gas, a solido o ad altro liquido. Una molecola che si trovi in questa zona non ha altre molecole dello stesso tipo sopra di essa.



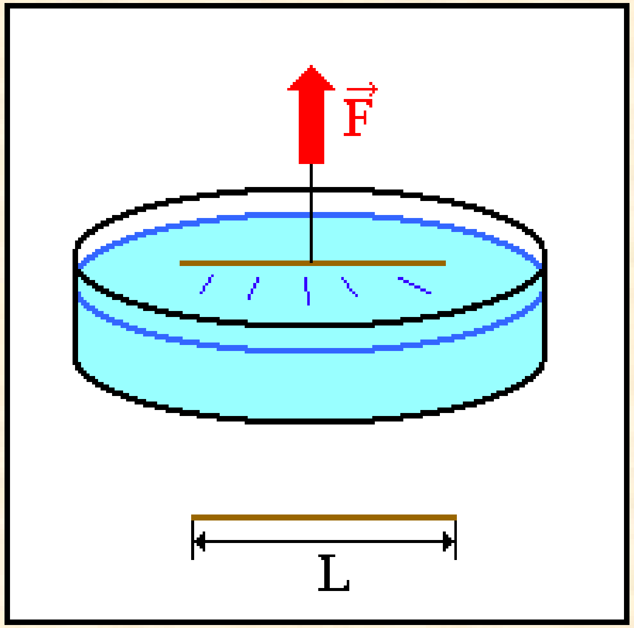
Se una molecola che si trova nello strato limite viene sollevata, i legami tra essa e le molecole adiacenti vengono tesi, generando una forza che tende a richiamare la molecola verso la superficie. Allo stesso modo, appoggiando un corpo minuscolo sulla superficie di un liquido, le molecole superficiali di quest' ultimo vengono spinte verso il basso generando una forza di richiamo diretta verso l'alto.

La superficie di un liquido si comporta quindi come una membrana tesa. La ***tensione superficiale*** di un liquido uguaglia il lavoro che deve essere fatto per portare un numero sufficiente di molecole dall'interno del liquido alla superficie per poter formare una nuova area unitaria di detta superficie. Si vede che questo lavoro coincide numericamente con la forza di contrazione esercitata su una linea ipotetica (linea di contatto) posata sulla superficie.

Si definisce ***coefficiente di tensione superficiale*** (misurato in N/m oppure in J/m^2):

$$\tau = \frac{F}{2\,L}$$

Il fatto che la forza sia proporzionale al doppio della lunghezza del filo si spiega pensando che vi è superficie di liquido da entrambi i lati di questo.



La tensione superficiale viene misurata direttamente misurando la forza necessaria a rompere la superficie del liquido sollevando un filo sottile dalla superficie stessa.

La forza necessaria ad estrarre un filo di massa *m* e lunghezza *L* è:

$$F = 2\,\tau\,L + m\,g$$

Liquidi	Temp. °C	Tensione superficiale in N/m
Benzene	20	0.028
Etere etilico	20	0.017
Glicerolo	20	0.063
Sangue intero	37	0.058
Plasma sanguigno	37	0.073
Mercurio	20	0.4355
Metanolo	20	0.0226
Olio di oliva	18	0.032
Acqua	0 20 50 100	0.0756 0.0726 0.0679 0.0589
Cloroetano	20	0.020
Tungsteno	3410	2.5

Una parete elastica ed una lamina liquida hanno tensioni superficiali molto diverse. La prima cresce con il raggio (anche quadraticamente), la seconda è praticamente costante.