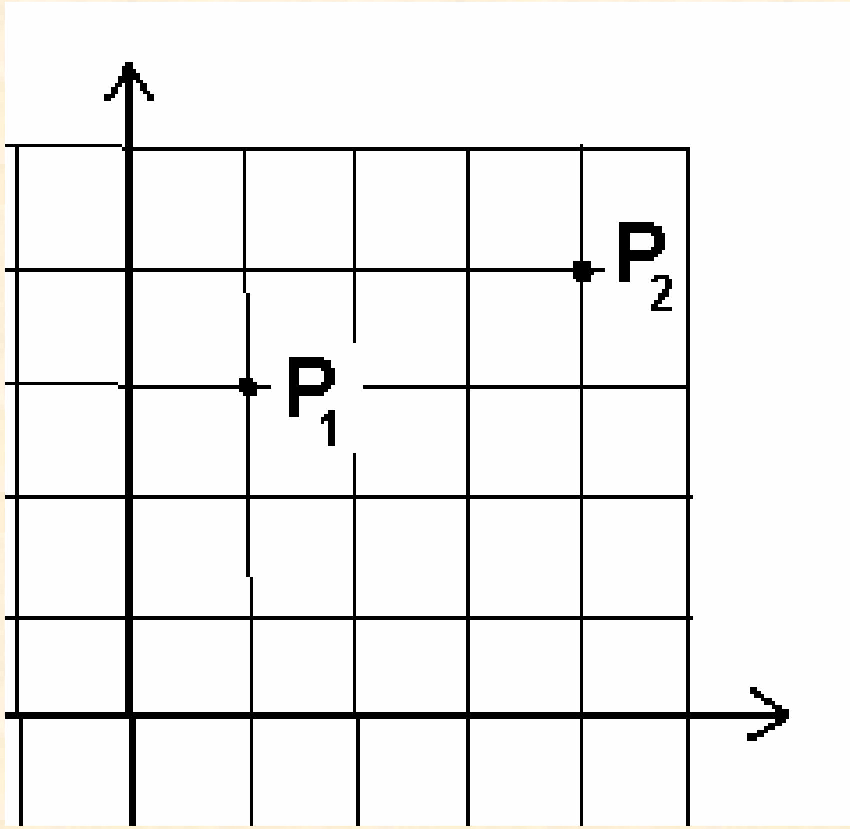
# Lezione II

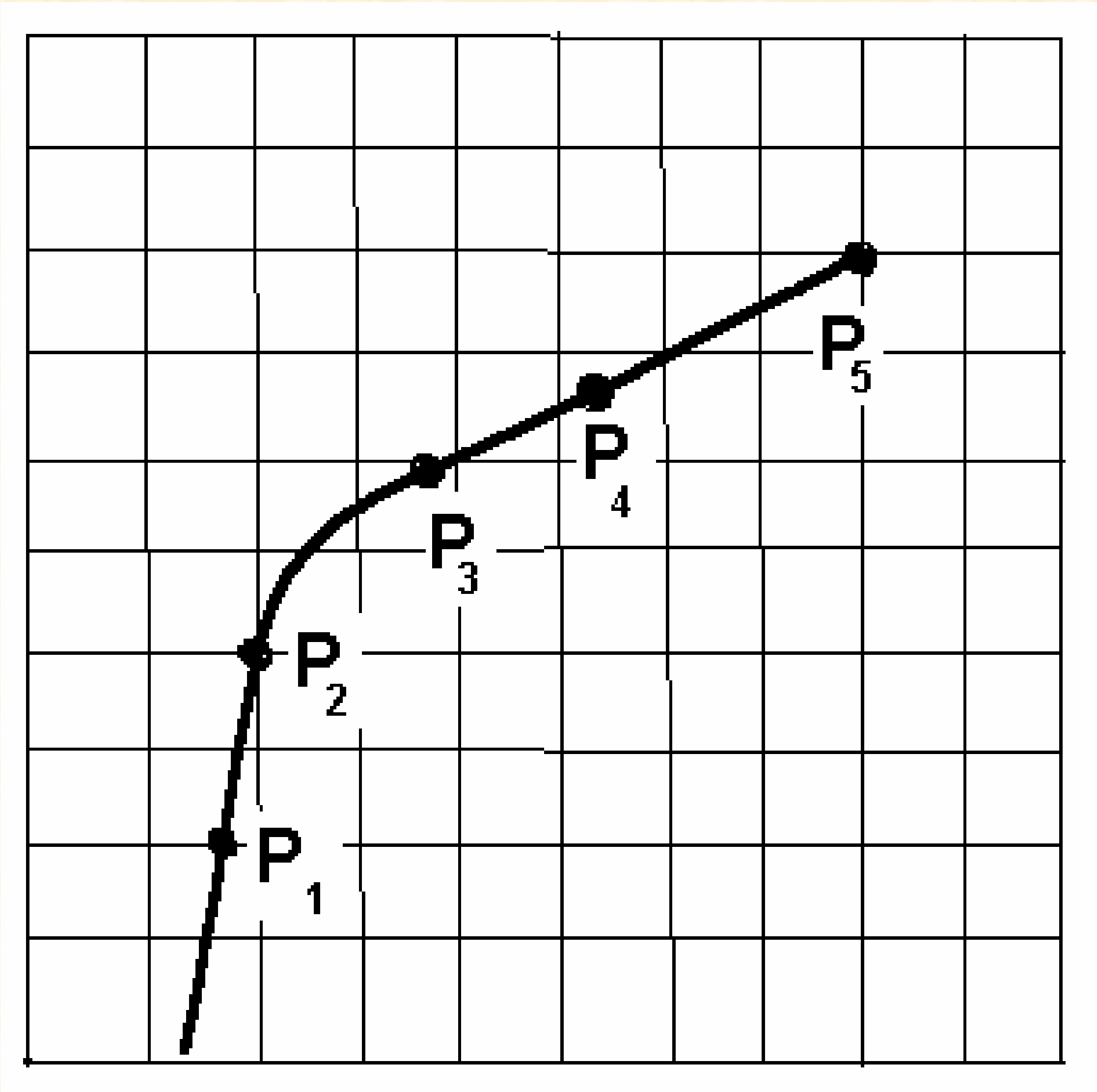
# La descrizione del moto di un punto materiale e la legge oraria

Nella descrizione del moto di un corpo (**cinematica**) partiamo dal caso più semplice: il punto materiale, che non ha dimensioni proprie. Fissiamo un sistema di riferimento (***sistema di assi cartesiani***).




**$P_1$** è la posizione del punto materiale all'istante **$t_1$**, **$P_2$** è la posizione del punto materiale all'istante **$t_2$**.

L'insieme dei punti dello spazio occupati nel tempo dal corpo puntiforme il cui moto stiamo analizzando è detta **traiettoria**:




**traiettoria={$P_1$,$P_2$,…}**

La legge oraria, invece, fornisce, al variare del tempo, la variazione dell'ascissa e dell'ordinata del punto materiale. Essendo P=(x,y), allora:

**P=P(t)=(x(t),y(t))**

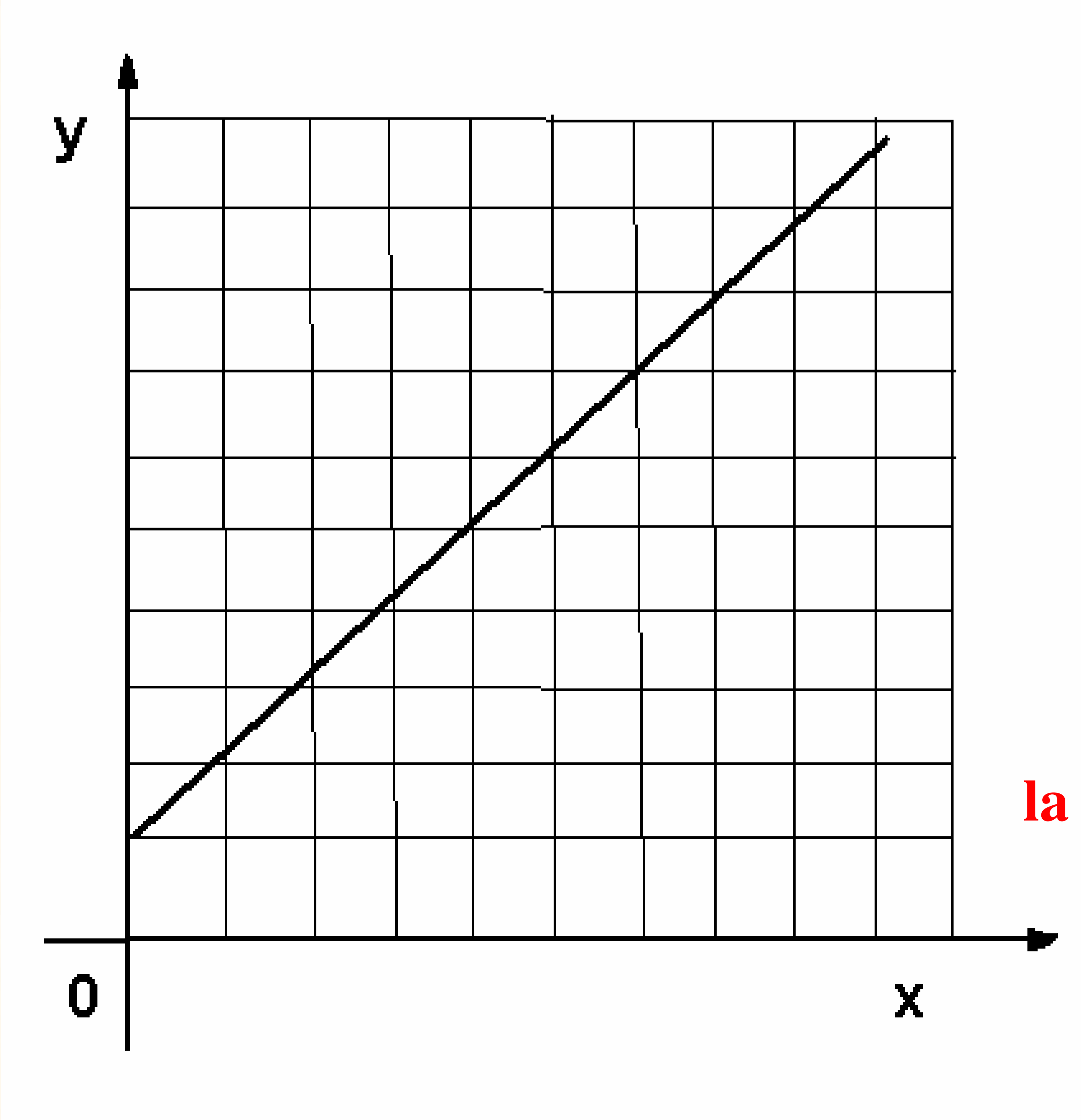
# La legge oraria

**x = x(t)** e **y = y(t)** sono dette la legge oraria (equazione oraria) di un moto. **Nota la legge oraria il moto è completamente noto.**

Supponiamo che la legge oraria sia **x = t** **y= 1 + t** dove **x** e **y** sono misurati in metri e **t** in secondi. Possiamo allora scrivere la seguente tabella:

| **t(sec)** | x(m) | y(m) |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 2 |
| **2** | 2 | 3 |
| **3** | 3 | 4 |

Possiamo graficare la legge oraria nel piano **x-y** ottenendo così la traiettoria. In questo caso abbiamo:




**x = t**

**y = t+1**

da cui

t=x

**y=x+1**

**la traiettoria è una retta**

Provare a graficare sul piano x-y le seguenti leggi orarie:

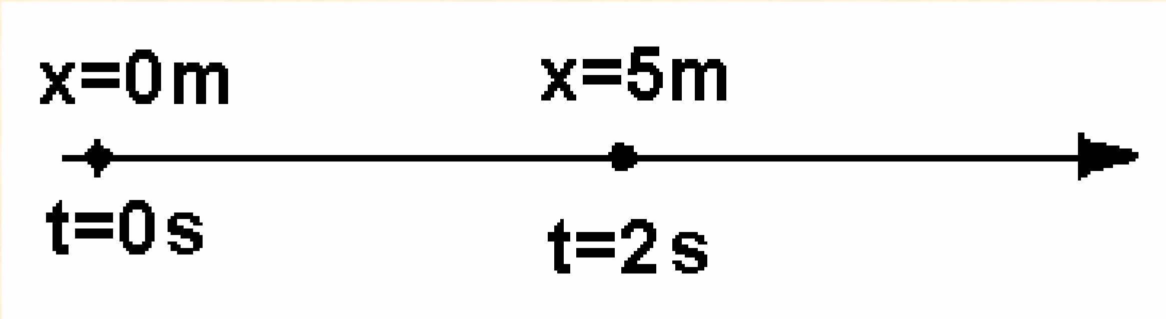
1. **$x = 2t$** **$y = 2t + 1$**
2. **$x = t$** **$y = t^2$**
3. **$x = t^2$** **$y = t$**
4. **$x = 1$** **$y = 2t$**

Le **x** e le **y** debbono intendersi espresse in metri e il tempo **t** in secondi.

Costruire la tabella della legge oraria e poi riportare sul piano **x-y** le coppie di punti. Ricavare l'equazione della traiettoria, "eliminando" il tempo dalle leggi orarie.

# La velocità media

Si consideri un moto unidimensionale nel quale un punto P è in posizione **x = 0 m** a **t = 0 s** e **x =5 m** a **t = 2 s**.




Nei due secondi dell'intervallo di tempo considerato, **Δt=(2-0)s=2 s,** il corpo ha effettuato uno spostamento **Δs=(5-0)m=5 m**.

Il segno positivo dello spostamento dice che esso è stato realizzato nel verso concorde alla freccia. La direzione è quella della retta.

**Si definisce velocità media** $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

**l'unità di misura** $$[v_m] = \frac{m}{s}$$

$$1\frac{m}{s} = \frac{10^{-3}\ km}{\frac{1}{3600}h} = 3.6\frac{km}{h}$$

In una dimensione non c'è differenza tra quantità scalari e quantità vettoriali: entrambe sono definite da un solo numero. In una dimensione i vettori hanno una sola componente.

Invece, in più dimensioni, **2** o **3** ad esempio (piano o spazio), dobbiamo parlare di vettore spostamento:

$$\Delta\vec{s} = \left(\Delta x, \Delta y, \Delta z\right)$$

In questo caso la velocità media è un vettore e ha la stessa direzione dello spostamento.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = \left(v_x^m, v_y^m, v_z^m\right)$$

La velocità media dà solo informazioni parziali (medie) sul moto. Essa non descrive l’evolversi del moto stesso.

✍ Calcolare la velocità media dei seguenti moti unidimensionali in cui il punto materiale era in

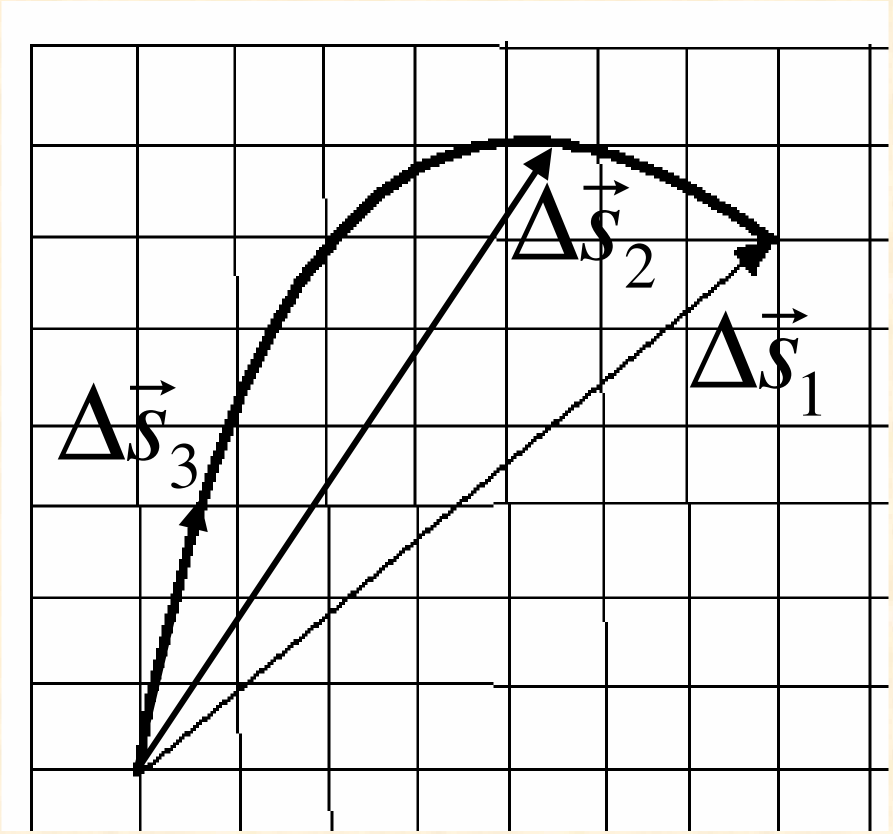
- $x = 0$ per $t = 0 \Longrightarrow x = 10$ m per $t = 2$ s
- $x = 0$ per $t = 1$ s $\Longrightarrow x = 5$ m per $t = 2$ s

✍ Calcolare la velocità media dei seguenti moti bidimensionali in cui il punto materiale era in

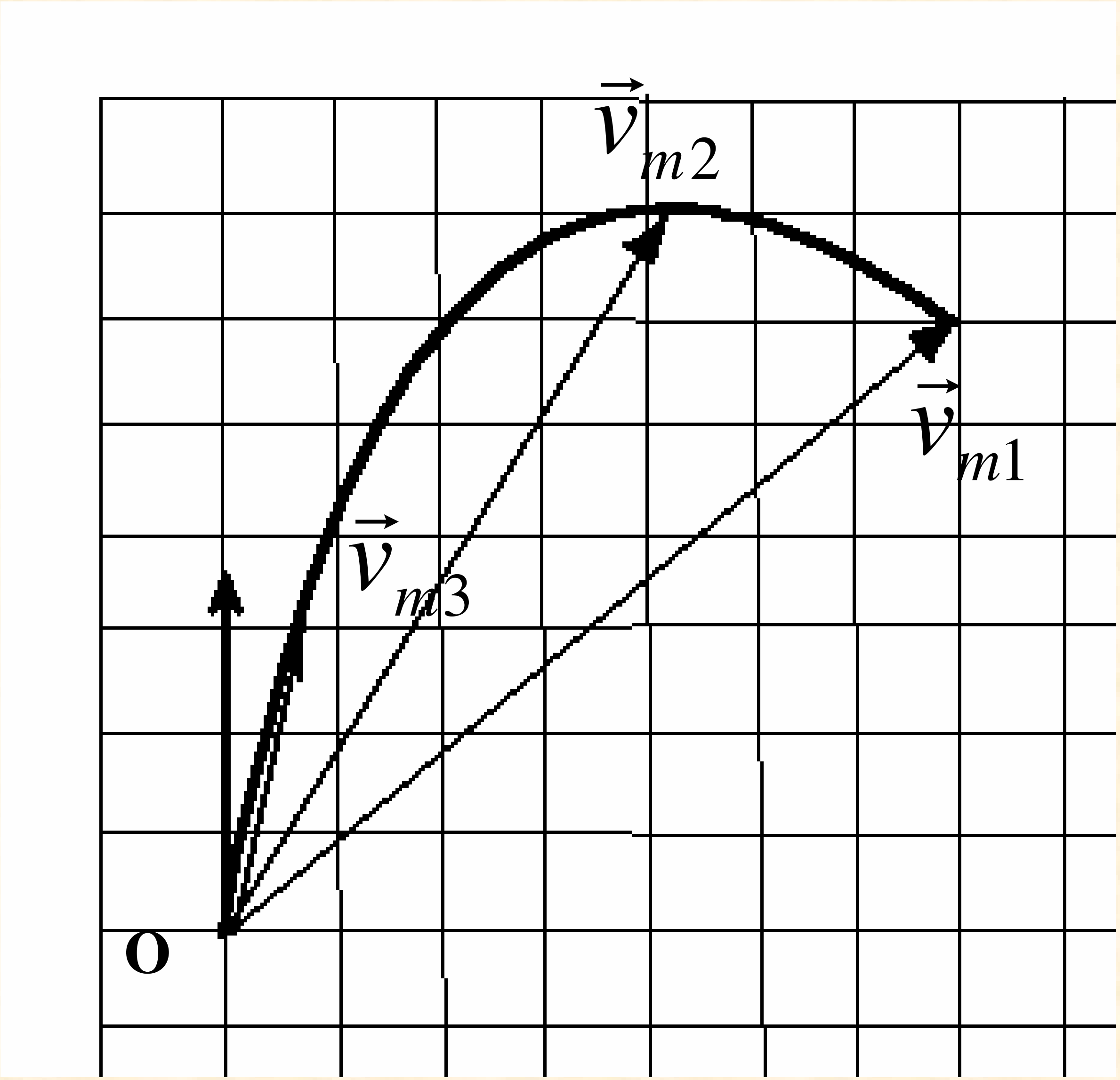
- $x = 0$ $y = 0$ per $t = 0 \Longrightarrow x = 10$ m, $y = 5$ m per $t = 2$ s
- $x = 0$ $y = 0$ per $t = 1$ s $\Longrightarrow x = 5$ m, $y = 10$ m per $t = 2$ s

**Potremmo ridurre l’intervallo Δt!**

Riduciamo l’intervallo di tempo $\mathbf{\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3}$ e misuriamone i rispettivi spostamenti.



Al diminuire dell'intervallo di tempo lo spostamento (e quindi la velocità media) diventa sempre più un vettore tangente alla traiettoria in **O**.

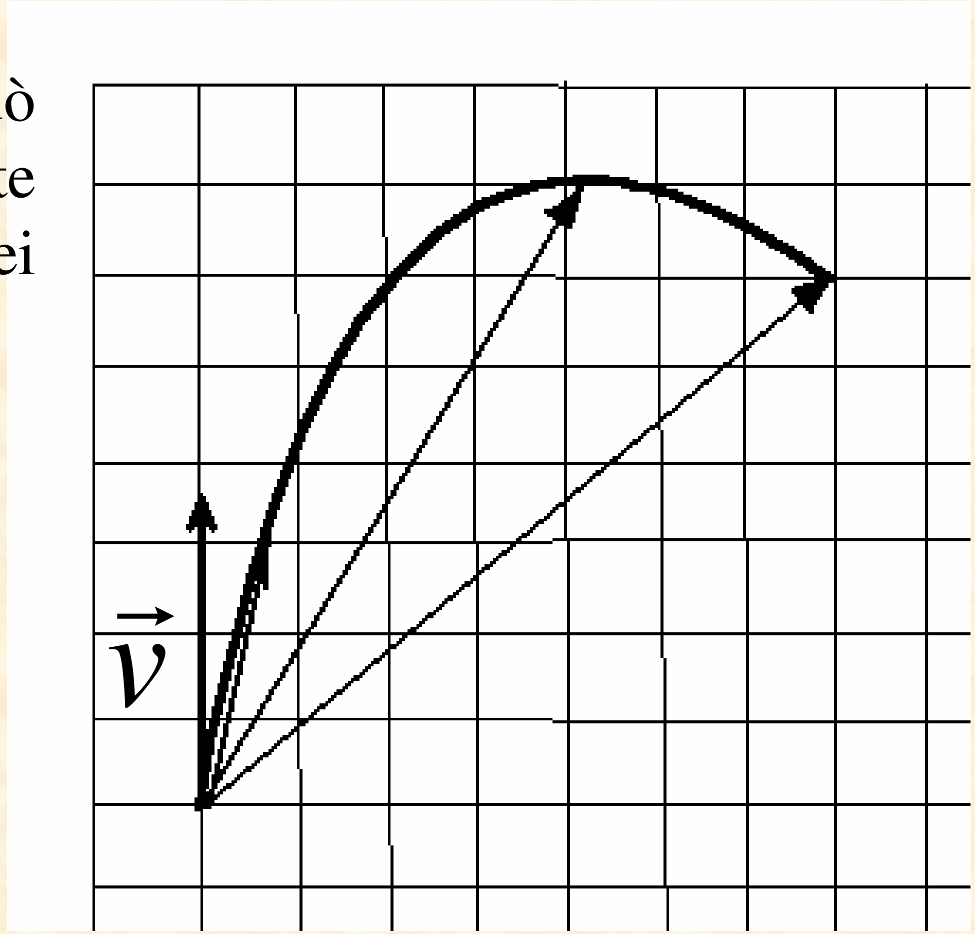


L’operazione di riduzione dell’intervallo di tempo **Δt** a zero è detta limite. Si chiama **velocità istantanea** la velocità media nel limite di **Δt** nullo.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

Essendo lo spostamento, al limite di **Δt** che tende a zero, tangente alla traiettoria, anche la velocità istantanea sarà tangente alla traiettoria. Essa può cambiare istante per istante, ma il suo valore medio corrisponderà alla velocità media.

La **velocità istantanea** può cambiare istante per istante purché cambi uno o più dei seguenti elementi:

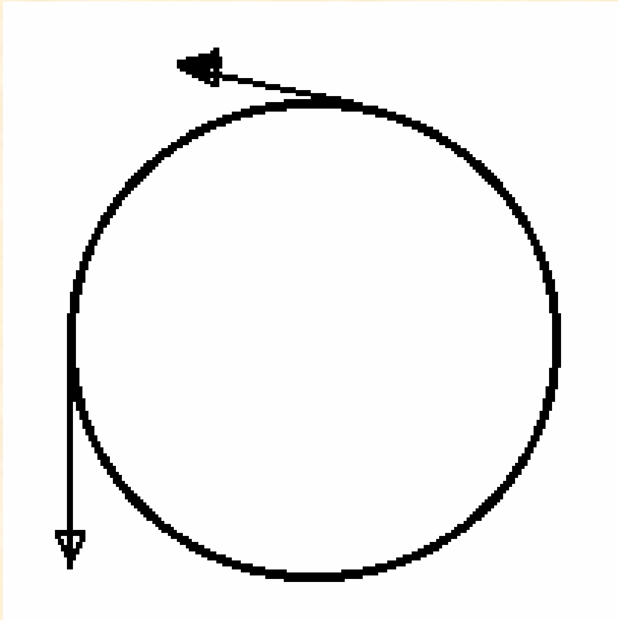



- **modulo**
- **direzione**
- **verso**

Un moto nel quale la velocità come vettore non cambia (ovvero sono costanti modulo, direzione e verso) è un moto rettilineo uniforme. La traiettoria è una retta percorsa con spazi uguali in tempi uguali.

Un moto nel quale la velocità istantanea cambia è detto accelerato. Ad esempio il moto circolare, ovvero il moto di un punto che descriva una circonferenza è un moto accelerato.

La velocità sta sicuramente variando la propria direzione.



Anche per l'accelerazione parliamo di **accelerazione media** e di **accelerazione istantanea**.

## Accelerazione media

Si consideri un punto materiale che abbia all'istante $\mathbf{t_1}$ velocità $\vec{\mathbf{v}}_1$ e all'istante $\mathbf{t_2}$ velocità $\vec{\mathbf{v}}_2$. Si definisce accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad [\vec{a}_m] = \frac{m}{s^2}$$

Anche per l'accelerazione media valgono le stesse considerazioni valide per la velocità media. E' allora possibile anche in questo caso fare il limite di intervallo di tempo che tende a zero.

## Accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

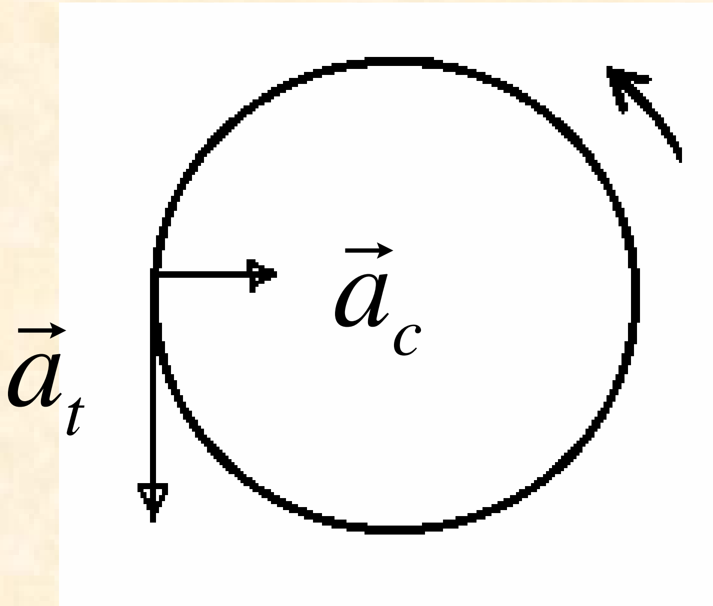
In questo caso a differenza della velocità istantanea, l'accelerazione istantanea non è sempre tangente alla traiettoria. Essa infatti si decompone in due componenti dette accelerazione tangenziale (tangente alla traiettoria) ed accelerazione centripeta (normale alla traiettoria).

**C'è accelerazione se c'è variazione della velocità!**

• C’è **Accelerazione tangenziale** se c’è variazione del modulo della velocità (es. l’automobile che accelera sul rettilineo).

• C’è **Accelerazione centripeta** se c’è variazione della direzione della velocità (es. moto circolare).

Un moto che abbia accelerazione costante è detto accelerato uniforme.




$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

# Moti Notevoli

- Moto rettilineo uniforme
- Moto uniformemente accelerato
- Moto misto
- Moto periodico
- Moto circolare uniforme
- Moto armonico

Si consideri un moto con velocità istantanea uniforme $\vec{v}$ .

Dalla definizione risulta che qualunque sia l'intervallo di tempo $\mathbf{\Delta t = t - t_0}$, il rapporto

$$\frac{\vec{x}(t) - \vec{x}_0}{t - t_0} = \vec{v}$$

è costante al variare di **t**, da cui

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}\,(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_y(t - t_0)$$

$$z(t) = z_0 + v_z(t - t_0)$$

**Legge oraria del moto rettilineo uniforme**

Si consideri un moto con accelerazione istantanea uniforme $\vec{a}$ .

Dalla definizione risulta che qualunque sia l'intervallo di tempo $\mathbf{\Delta t = t - t_0}$, il rapporto

$$\frac{\vec{v}(t)-\vec{v}_0}{t-t_0}=\vec{a}$$

è costante al variare di **t**, da cui

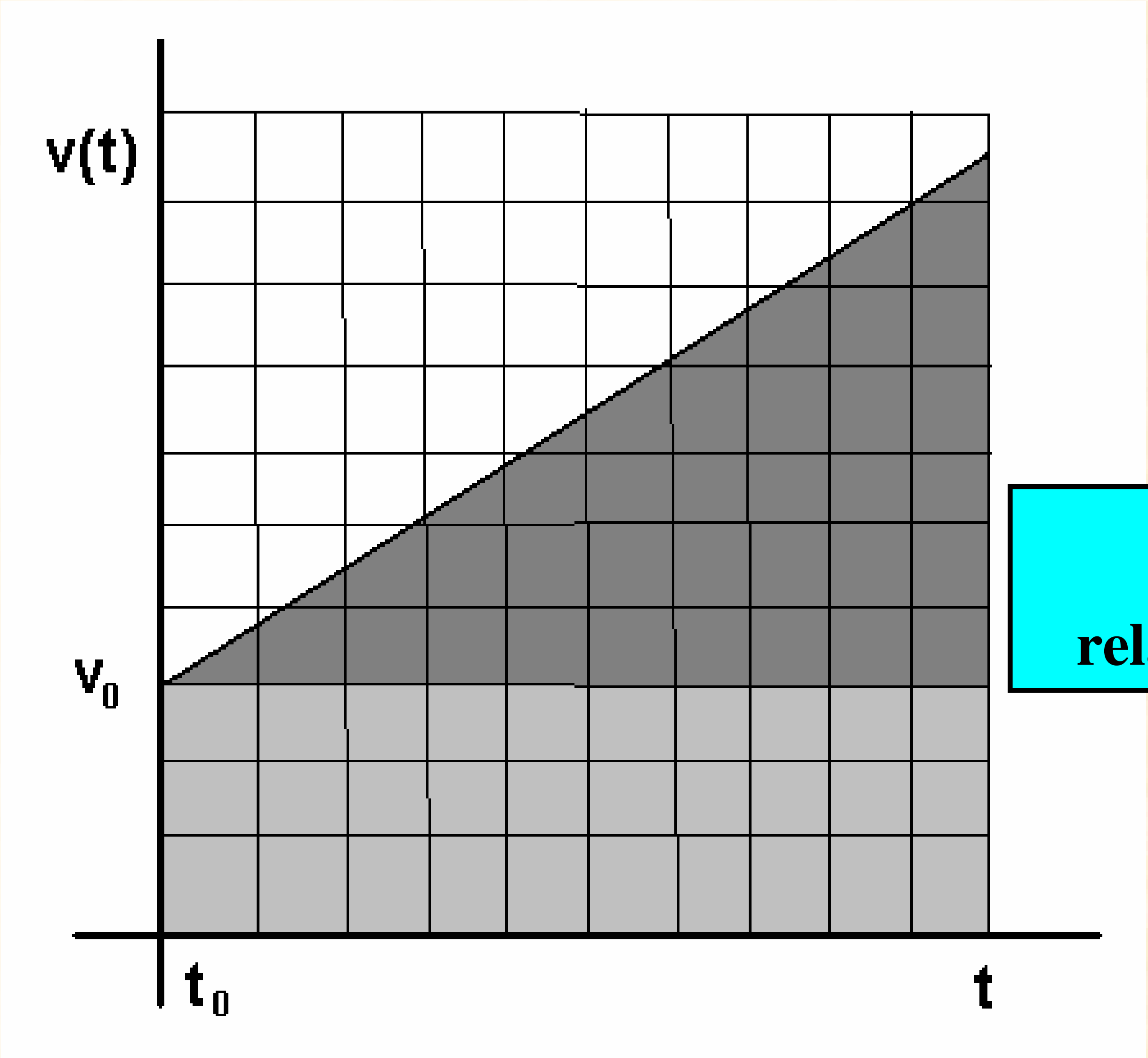
$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}(t-t_0)$$

$$v_x(t)=v_{x0}+a_x(t-t_0)$$

$$v_y(t)=v_{y0}+a_y(t-t_0)$$

$$v_z(t)=v_{z0}+a_z(t-t_0)$$

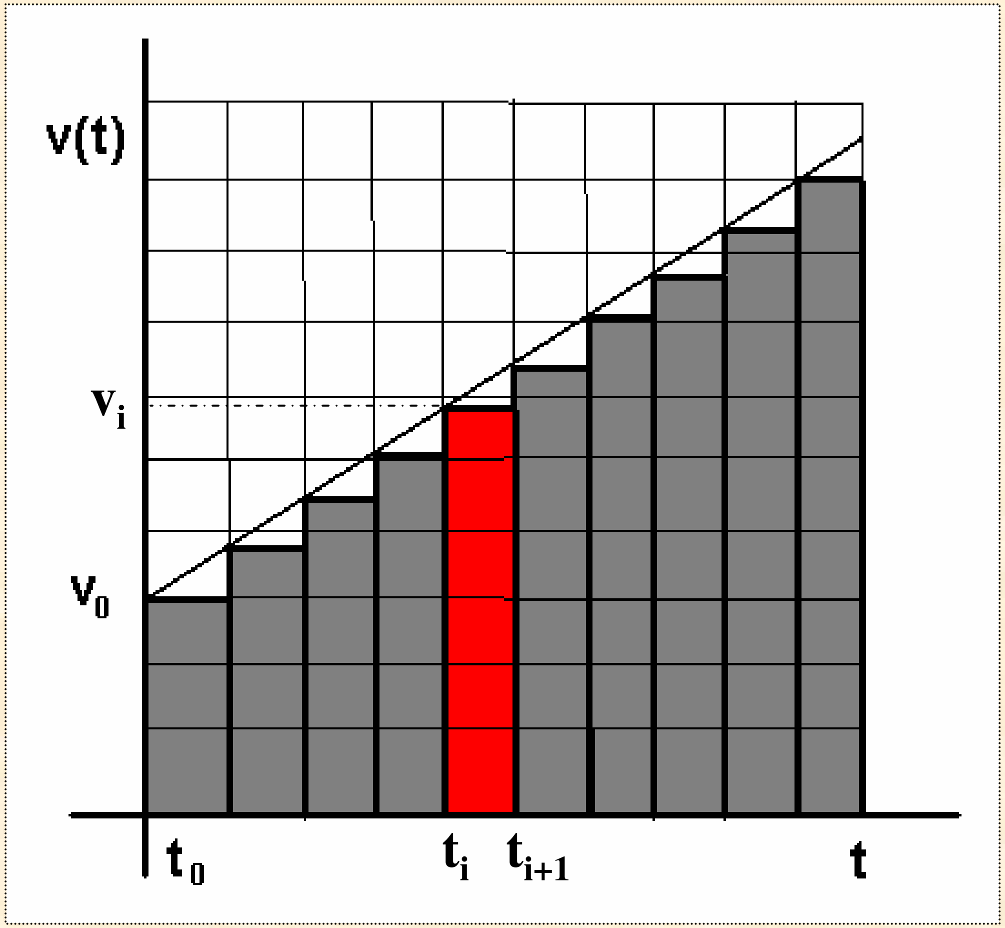
**Legge oraria per le velocità nel moto accelerato uniforme**




***y=a x+b***

**relazione di linearità**

$$v(t) = v_0 + a\left(t - t_0\right)$$



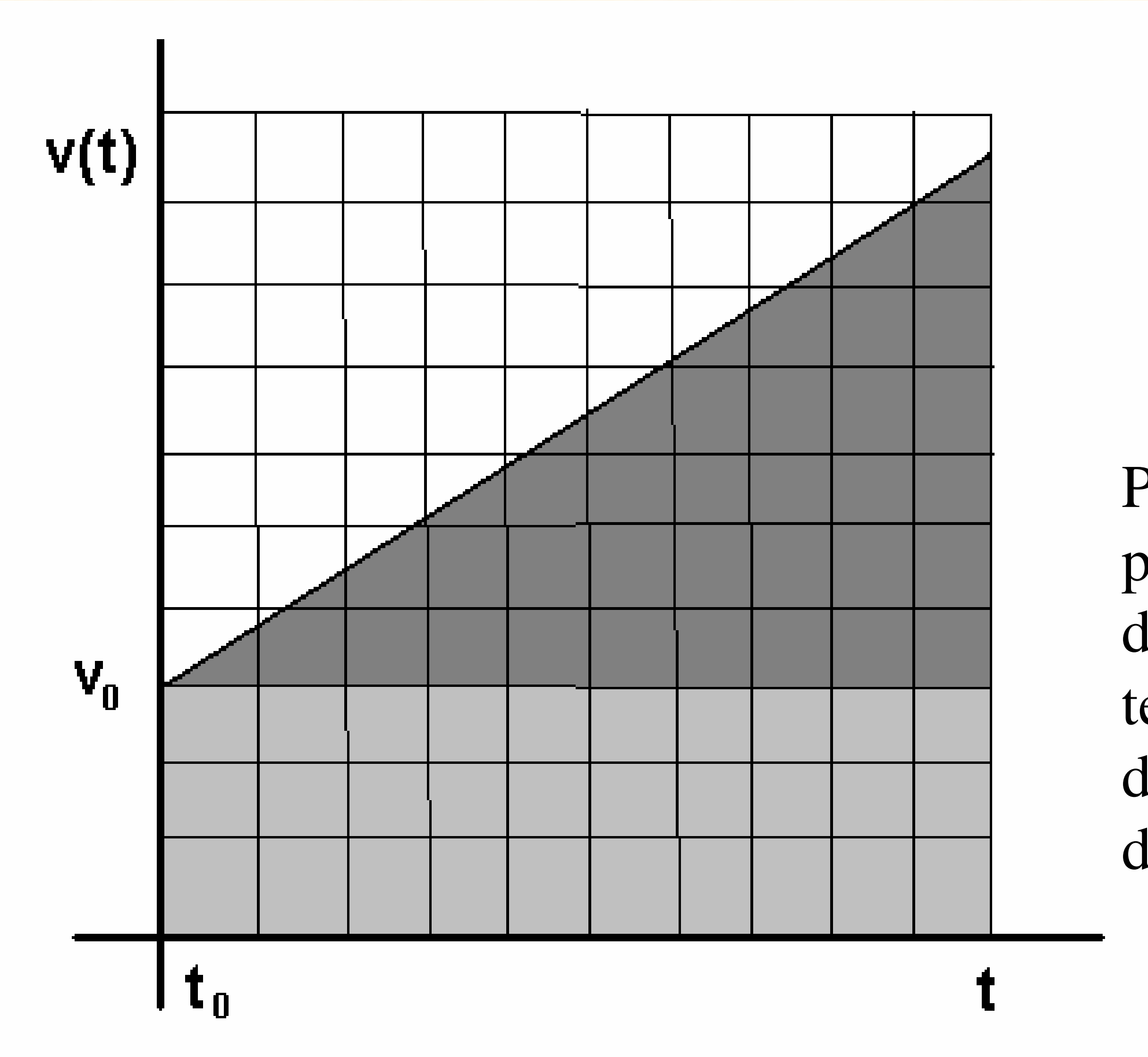

area del rettangolo rosso

$$\Delta x_i \cong \overbrace{v_i\left(t_{i+1}-t_i\right)}$$

$$\Delta x \cong \sum_i v_i\left(t_{i+1}-t_i\right)$$

$$x(t)-x_0 \cong \sum_i v_i\left(t_{i+1}-t_i\right)$$

La sommatoria al secondo membro rappresenta l'area totale dei rettangoli sotto la traiettoria.




Passando al limite per $t_{i+1} \rightarrow t_i$, il valore della sommatoria tende a quello dell'area sottesa dalla curva.

L'area sottesa dalla curva, ovvero la somma delle regioni in grigio rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\mathbf{t - t_0}$.

Sommando l'area delle due regioni grigie otteniamo

$$x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{(v(t) - v_0)(t - t_0)}{2}$$

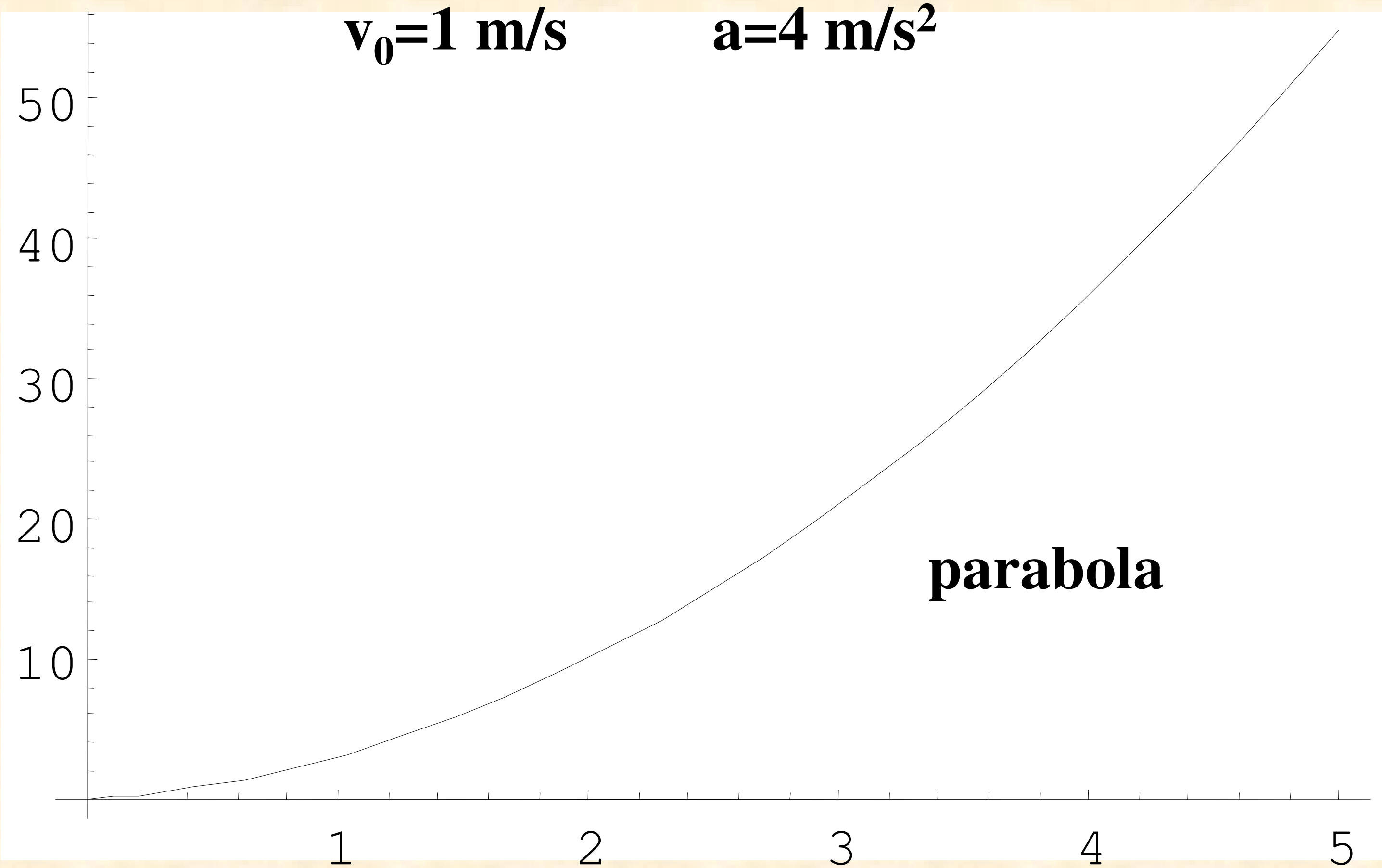
$$= v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

**che è la** **Legge oraria per il moto accelerato uniforme**

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

$$x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

$x(t) - x_0$




$t - t_0$

**Legge oraria nei moti uniformemente accelerati**

$$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \frac{a_x}{2}(t - t_0)^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{a_y}{2}(t - t_0)^2$$

$$z(t) = z_0 + v_{z0}(t - t_0) + \frac{a_z}{2}(t - t_0)^2$$

## Moto misto

Consideriamo un moto uniformemente accelerato nel piano, ma con accelerazione diretta solo lungo l'asse ***y*** in verso negativo. In questo caso la legge oraria è:

$$(t - t_0) = \frac{x(t) - x_0}{v_{x0}}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

Questo è un moto misto, perchè è la composizione di un moto a velocità costante lungo ***x*** e accelerato uniforme lungo ***y***.

Ricavando $\boldsymbol{t - t_0}$ dalla prima e sostituendo nella seconda otteniamo:

$$y - y_0 = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}(x - x_0) - \frac{a}{2(v_{x0})^2}(x - x_0)^2$$

Se grafichiamo $\boldsymbol{y - y_0}$ in funzione di $\boldsymbol{x - x_0}$ otteniamo il grafico di una parabola.

Consideriamo, ad esempio, un cannone posto nell'origine degli assi, inclinato di 45° rispetto all'orizzontale, che spari un proiettile che esca dalla canna con velocità di **100 m/s**.

Il moto del proiettile è misto. Infatti ogni corpo è sottoposto alla forza gravitazionale che gli imprime una accelerazione costante verticale $\boldsymbol{g = 9.81\ m/s^2}$ (indipendente dalla massa del corpo), diretta verso il centro della Terra.

In questo caso, quindi, l’accelerazione nella legge oraria è uguale all’accelerazione di gravità.

$$a = g = 9.81\ m/s^2$$

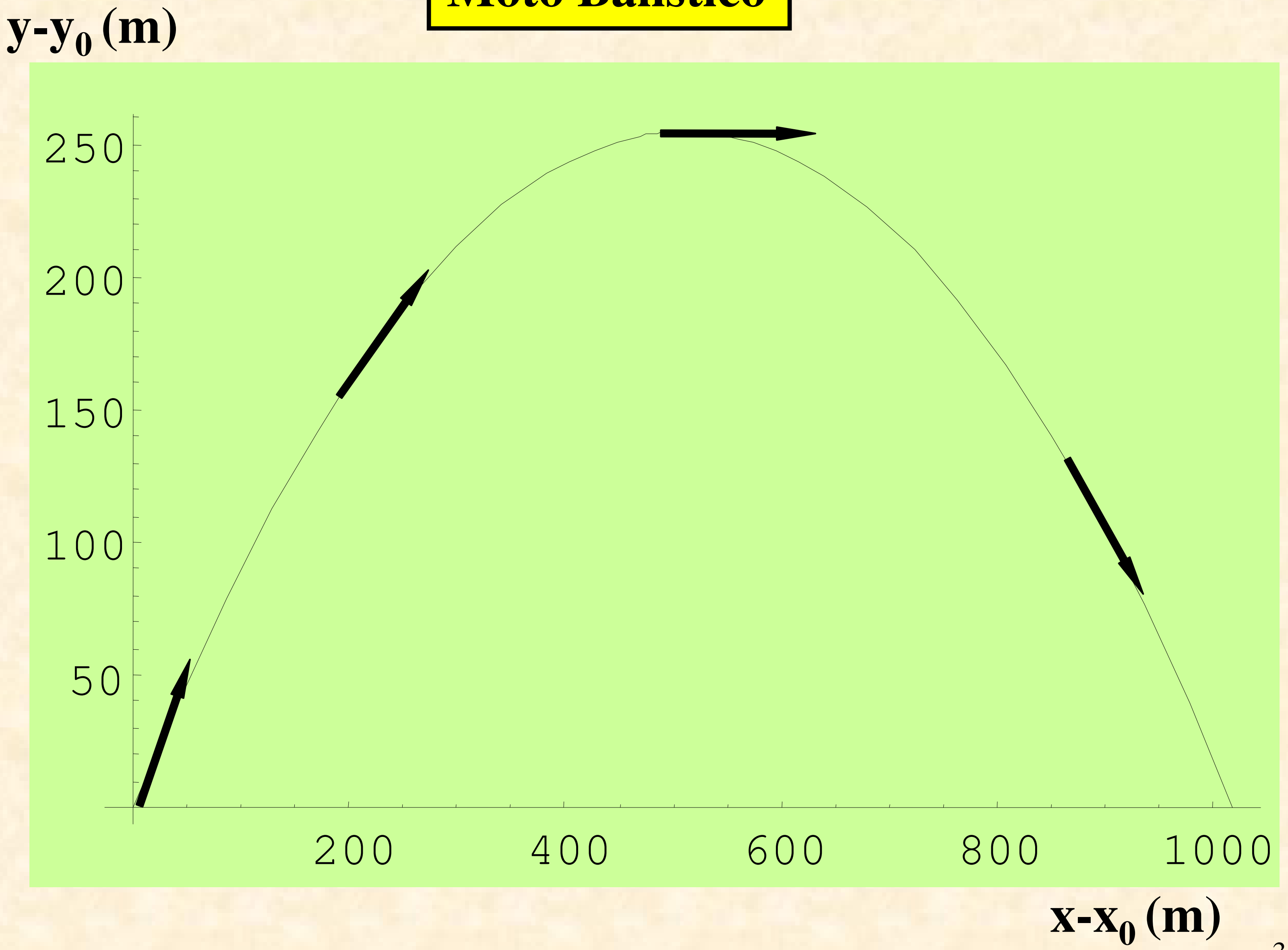
$y_0$ e $x_0$ sono nulli perchè per semplicità il cannone è posto nell’origine degli assi. $V_{x0}$ e $V_{y0}$ sono le componenti della velocità iniziale il cui modulo è fissato a 100 m/s con angolo di $45^0$ ($\pi/4$) rispetto alla verticale. Ne consegue:

$$V_{x0} = 100\ m/s\ \cos(\pi/4) = 70.71\ m/s$$

$$V_{y0} = 100\ m/s\ \sin(\pi/4) = 70.71\ m/s$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

# Moto Balistico



# Moto periodico

Un moto si dice periodico quando si ripete identico (ovvero assume stesse posizioni, velocità, accelerazioni, etc.) al trascorrere di intervalli fissi di tempo. L'intervallo di tempo minore che bisogna attendere per ritornare alla situazione iniziale è detto periodo e si indica con **T**.

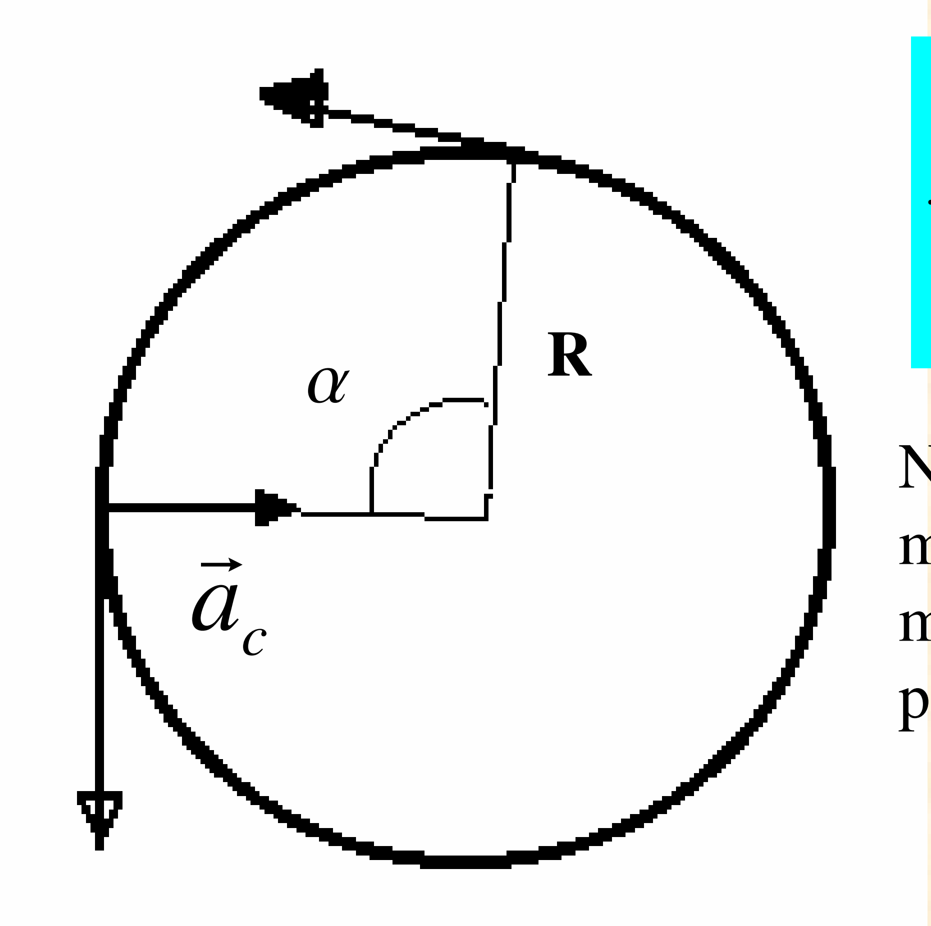
L'inverso del periodo è la frequenza

$$f = 1/T \ [s^{-1}] \qquad [s^{-1}]=Hz$$

Essa rappresenta il numero di volte che si ripete il ciclo in un secondo.

## Moto circolare uniforme

E' il moto che avviene lungo una circonferenza, nel quale vengono percorsi angoli (o archi) uguali in tempi uguali.




$$\frac{\alpha}{\Delta t} = \omega \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante ma la direzione cambia istante per istante.

$$V = \frac{R\alpha}{\Delta t} = \omega R$$

Dalla definizione di velocità angolare, di periodo e frequenza si ottiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Nel moto circolare uniforme, variando la sola direzione della velocità istantanea, non c'è accelerazione tangenziale. Vi è solo accelerazione centripeta, $\vec{a}_c$.

In modulo essa vale

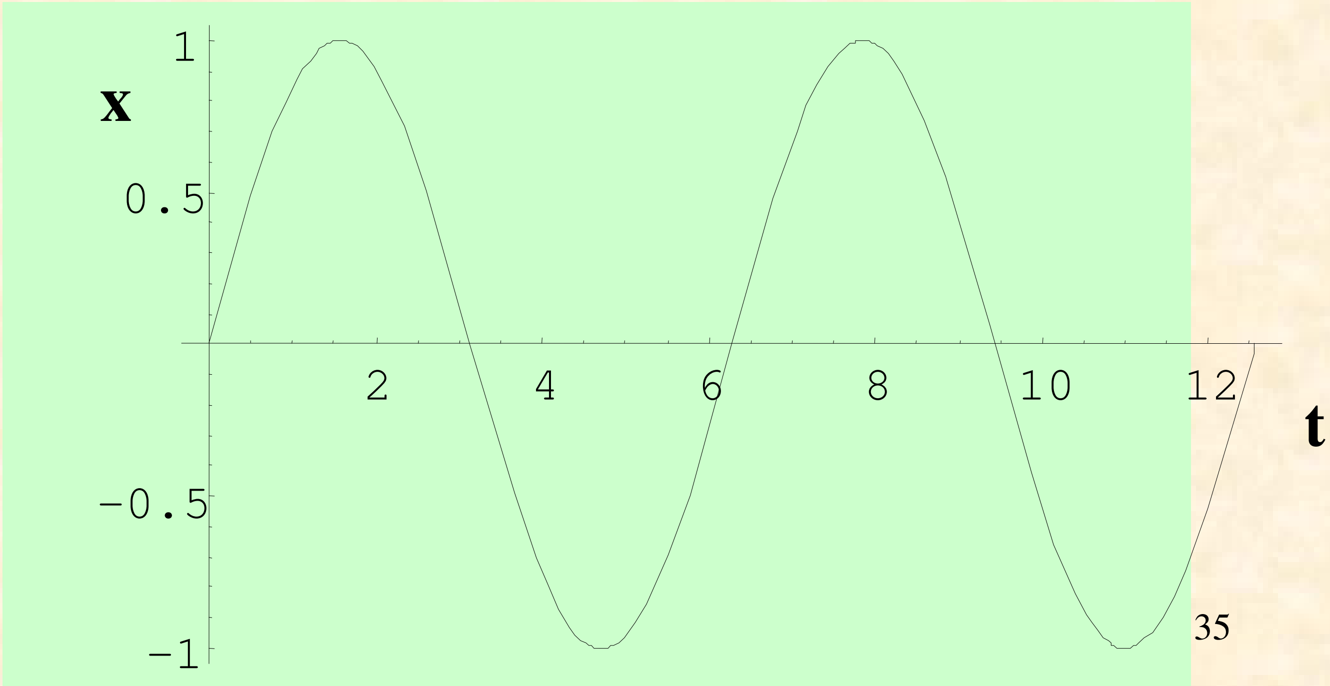
$$a_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

# Moto armonico

Il moto armonico è un particolare caso di moto periodico. Esso si caratterizza per la relazione di diretta proporzionalità che c'è tra accelerazione e posizione:

$$\mathbf{a = -\,\omega^2\,x}$$

La legge oraria di un moto armonico è di tipo sinusoidale o cosinusoidale.



Alcuni esempi di moto armonico:

- Nel moto circolare uniforme se si considerano le proiezioni del moto su uno degli assi, il punto proiezione si sposterà secondo un moto armonico.

- Un corpo sottoposto all'azione di una forza elastica si muove di moto armonico.

- Tutti i moti periodici possono essere decomposti come sovrapposizione di moti armonici.