Laboratorio di Algoritmi e Strutture Dati

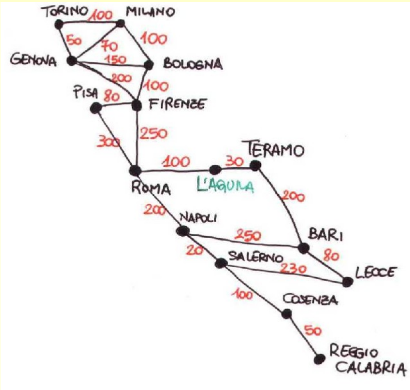
Aniello Murano

http://people.na.infn.it/ ~murano/

Algoritmi per il calcolo di percorsi minimi su un grafo

Un semplice problema

- Problema: Supponiamo che un motociclista voglia raggiungere Genova partendo da Napoli. Avendo a disposizione una mappa dell'Italia in cui per ogni collegamento diretto tra città è segnata la sua lunghezza, come può il motociclista trovare il percorso minimo?



Soluzione del problema

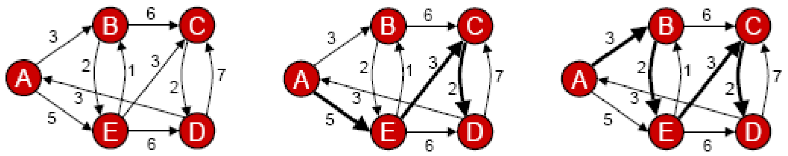
- Una soluzione è quella di numerare tutti i possibili cammini da Napoli a Genova, per ognuno calcolare la lunghezza complessiva e poi selezionare il più breve
- Questa soluzione non è la più efficiente perché ci sono milioni di cammini da analizzare.
- In questa lezione vediamo come risolvere questo problema in modo efficiente.
- In pratica, modellando la cartina dell'Italia come un grafo orientato pesato G=(V, E), dove ciascun vertice rappresenta una città, ogni arco (u,v) rappresenta una strada diretta da u a v ed ogni peso w(u,v) corrispondente ad un arco (u,v) rappresenta la distanza tra u e v, il problema da risolvere è quello di trovare il cammino minimo che collega il vertice corrispondente a Napoli con quello corrispondente a Genova.

Definizione di Shortest path (SP)

- Dato un grafo pesato orientato G=(V,E), il peso di un cammino $p=(v_0v_1,\ldots,v_k)$ è dato dalla somma dei pesi degli archi che lo costituiscono, cioè

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

- Uno **shortest path** (cammino minimo) dal nodo u al nodo v di V è un cammino $p = (u,v_1,v_2,\ldots,v)$ tale che w(p) è minimo
- Il costo del cammino minimo da u a v è denotato con $\delta(u, v)$.
- Se non esiste un cammino da u a v allora $\delta(u, v) = \infty$



Grafo pesato orientato

Uno SP da A a D
w(p) = 10

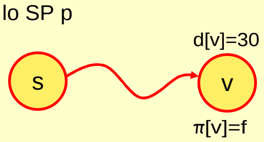
Un altro SP da A a D
w(p) = 10

Principio di ottimalità

- Dato un grafo pesato orientato G=(V,E) e uno shortest path $p = (v_0,v_1,\ldots,v_k)$ da v_0 a v_k, qualsiasi sottocammino $p' = (v_i,v_{i+1},\ldots,v_j)$ contenuto in p è anch'esso uno shortest path tra v_i e v_j

Algoritmi per il calcolo dello SP

- Dato un grafo pesato connesso orientato G=(V,E) e un nodo sorgente s di V, esistono diversi algoritmi per trovare uno SP da s verso ogni altro nodo di V (**single- source shortest path problem**)
- Dall'esecuzione di tali algoritmi si ottiene, per ogni nodo destinazione v di V, uno SP p (da s a v) e si calcola
  - d[v] = distanza del nodo v dal nodo sorgente s lungo lo SP p
  - π[v] = predecessore del nodo v lungo lo SP p



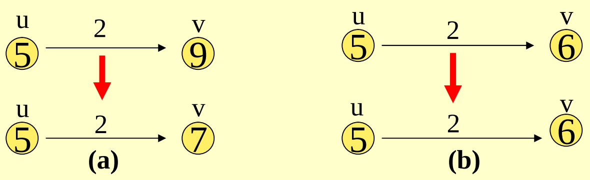
- Inizializzazione: per ogni nodo v di V
  - d[v] = ∞ se v $\neq$ s, altrimenti d[s] = 0
  - π[v] = Ø
- L'idea è ad ogni passo d[v] tale che d[v] = δ(s, v)
- Durante l'esecuzione si usa la tecnica del **rilassamento** (relaxation) di un generico arco (u,v) di E, che serve a migliorare la nostra stima per d.
- Gli algoritmi si differenziano sulla modalità di eseguire il rilassamento
  - Algoritmo di **Dijkstra** O(E + V log V)
  - Algoritmo di **Bellman- Ford** O(E V)

Rilassamento di un arco

- Il rilassamento di un arco (u,v) di E, consiste nel valutare se, utilizzando u come predecessore di v, si può migliorare il valore corrente della distanza d[v] e, in tal caso, si aggiornano d[v] e π[v]
- Procedura relax(u,v):

  se **d[v] > d[u] + w(u,v);** allora

  d[v] = d[u] + w(u,v); e **π[v] = u;**



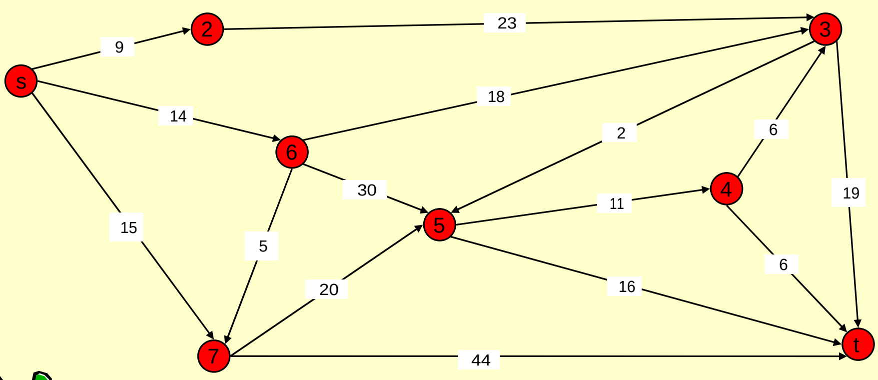
- In (a), d[v] > d[u] + w(u,v). Quindi il valore di d[v] decresce
- In (b), d[v] $\leq$ d[u] + w(u,v). Quindi d[v] non viene modificato

Algoritmo di Dijkstra

- L'algoritmo di Dijkstra risolve il problema di cammini minimi con sorgente singola su un grafo orientato e pesato G = (V, E) nel caso in cui tutti i pesi degli archi siano non negativi.
- Assumeremo quindi che il peso w(u, v) ≥ 0 per ogni arco (u, v) di E.
- L'algoritmo di Dijkstra mantiene un insieme S che contiene i vertici il cui peso di cammino minimo dalla sorgente s è già stato determinato.
- Inizialmente S viene inizializzato vuoto (inizializzazione).
- L'algoritmo poi seleziona ripetutamente un vertice u di S'=V - S con la minima stima di cammino minimo, inserisce u in S e rilassa tutti gli archi uscenti da u.
- Viene usata una coda con priorità Q che contiene tutti i vertici in S'
- L'algoritmo termina quando S=V

Dijkstra's Shortest Path Algorithm

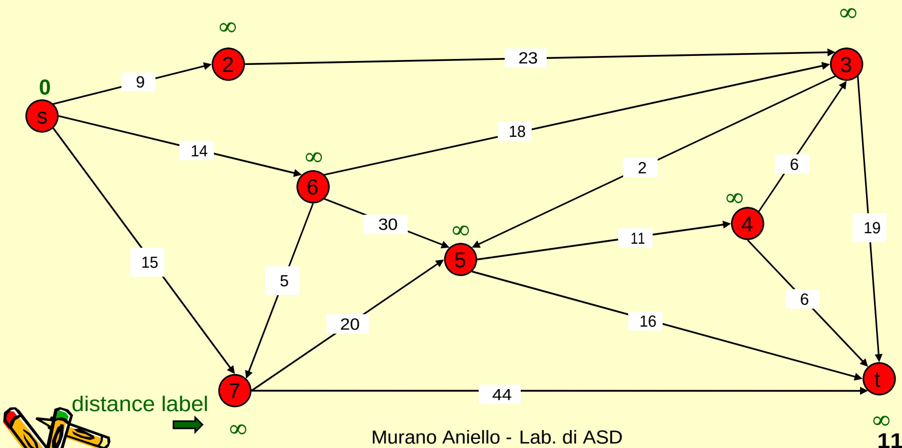
Consideriamo il seguente grafo e il problema di trovare il cammino minimo da s a t



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { }

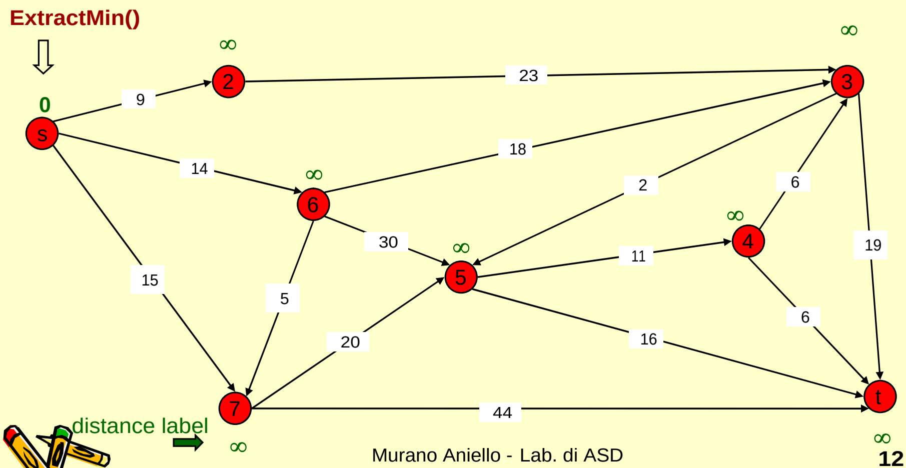
Q = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { }

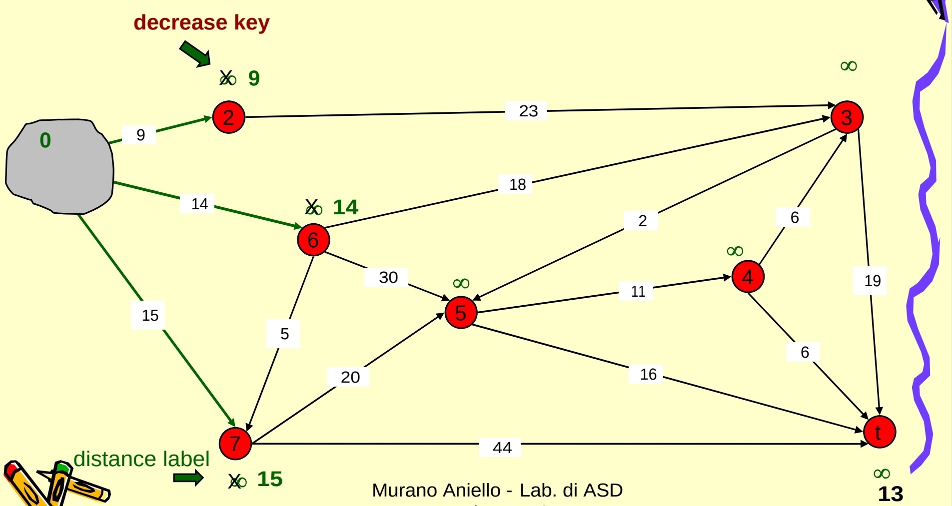
Q = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s }

Q = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }

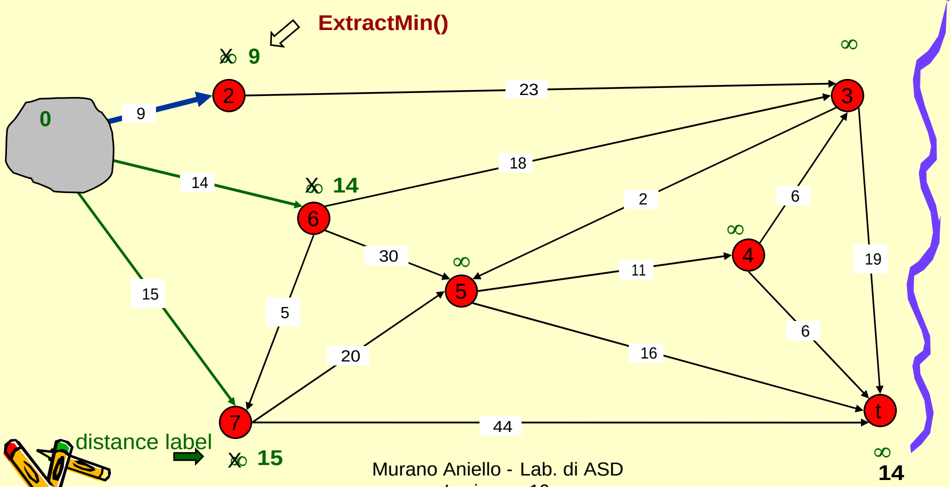


Murano Aniello - Lab. di ASD
Lezione n.19

Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s }

Q = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }

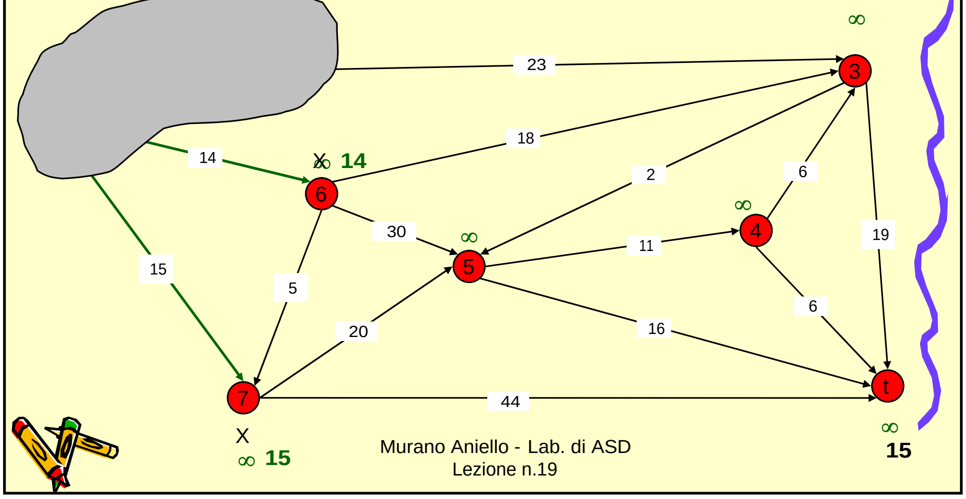


Murano Aniello - Lab. di ASD
Lezione n.19

Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2 }

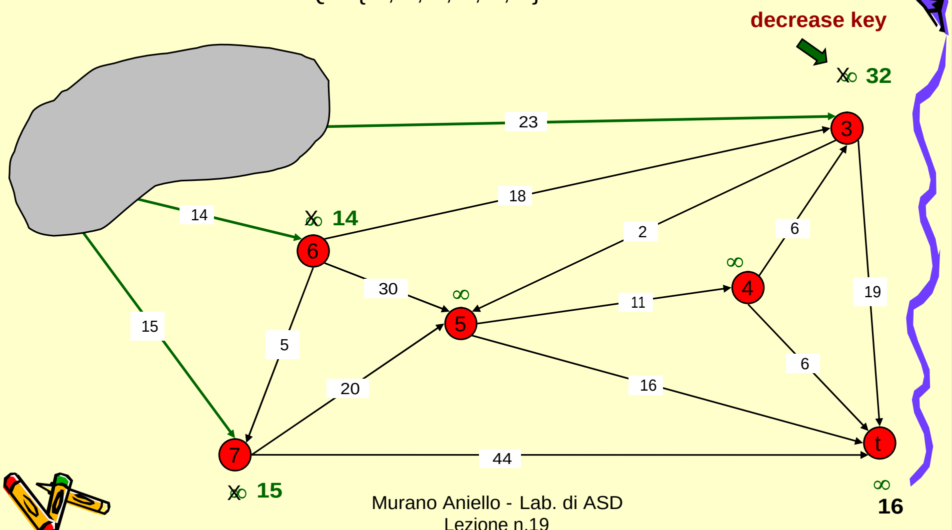
Q = { 3, 4, 5, 6, 7, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

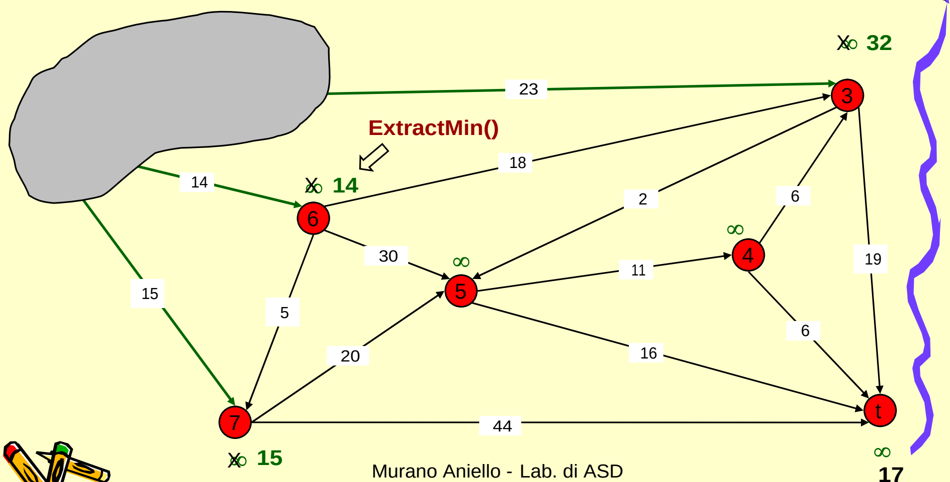
S = { s, 2 }

Q = { 3, 4, 5, 6, 7, t }



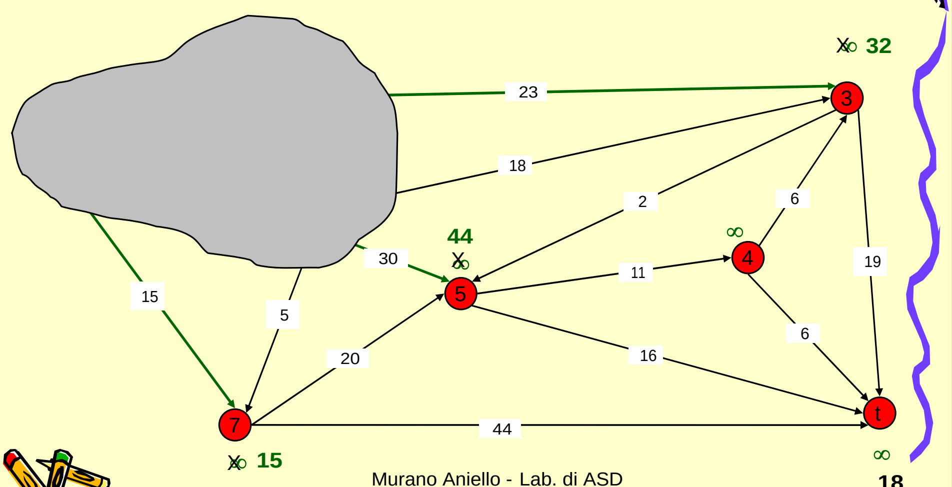
Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2 }
Q = { 3, 4, 5, 6, 7, t }



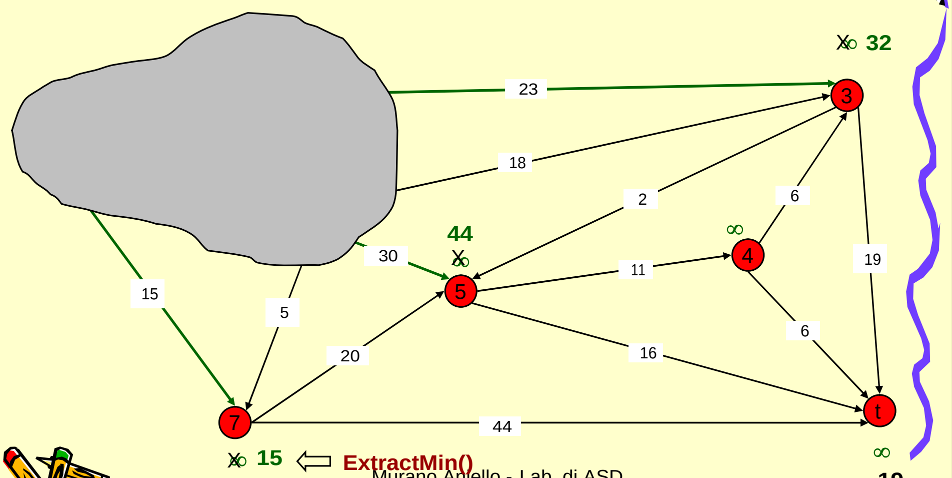
Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 6 }
Q = { 3, 4, 5, 7, t }



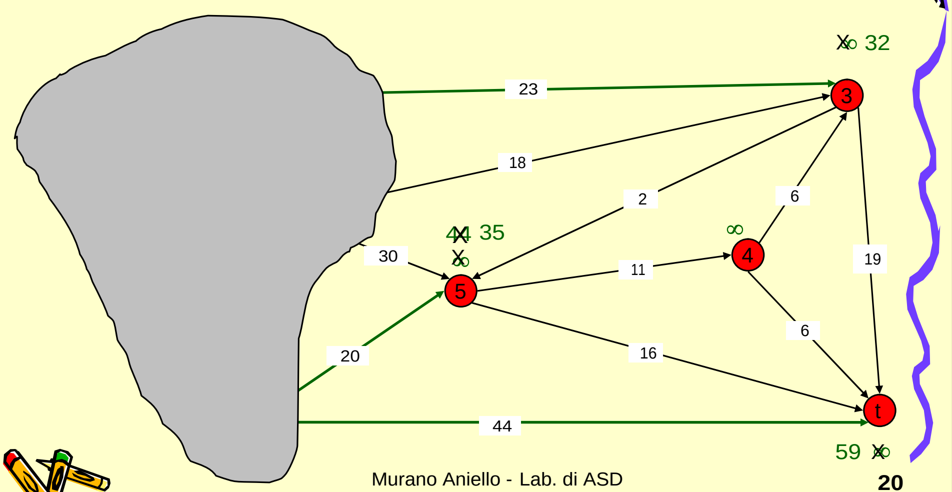
Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 6 }
Q = { 3, 4, 5, 7, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

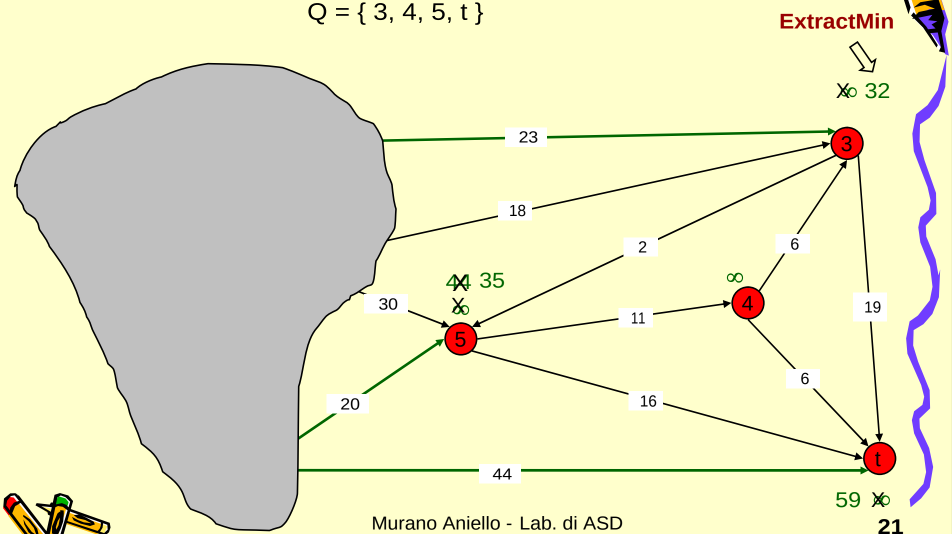
S = { s, 2, 6, 7 }
Q = { 3, 4, 5, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 6, 7 }

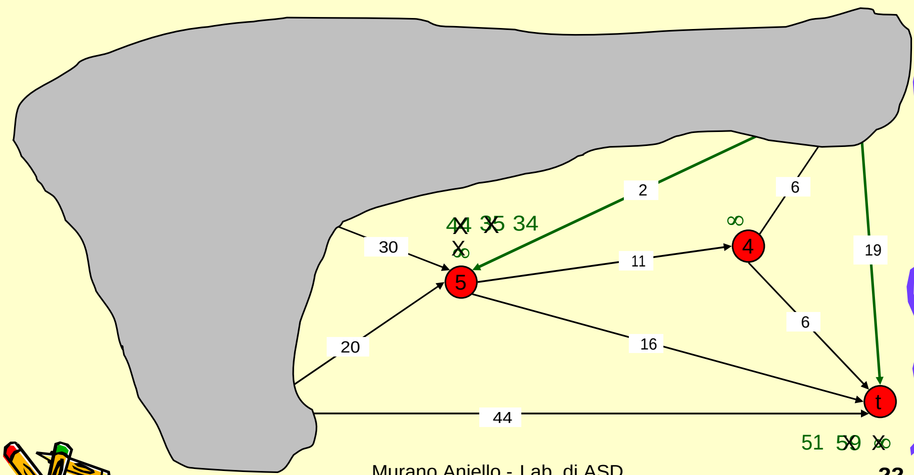
Q = { 3, 4, 5, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 3, 6, 7 }

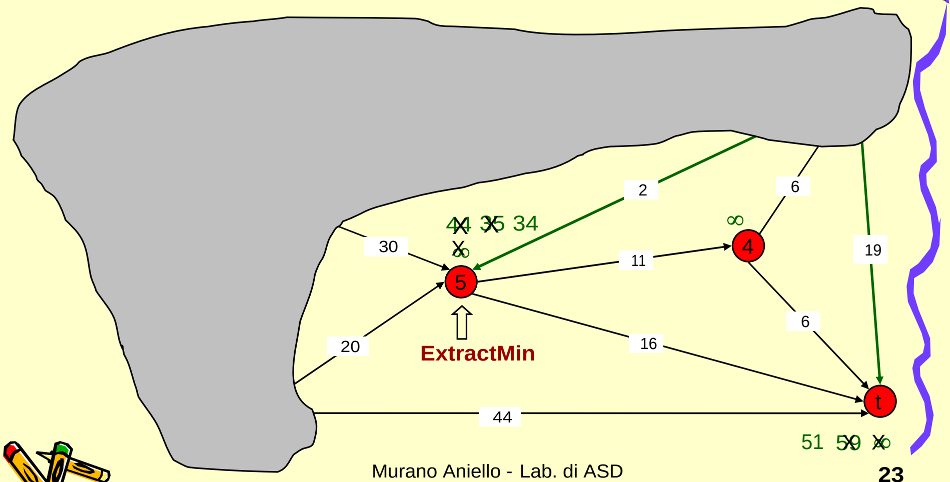
Q = { 4, 5, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 3, 6, 7 }

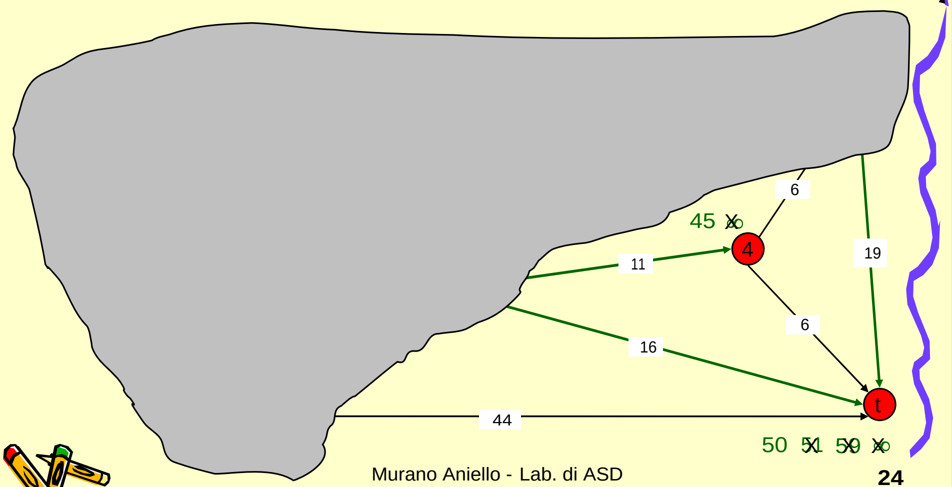
Q = { 4, 5, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 3, 5, 6, 7 }

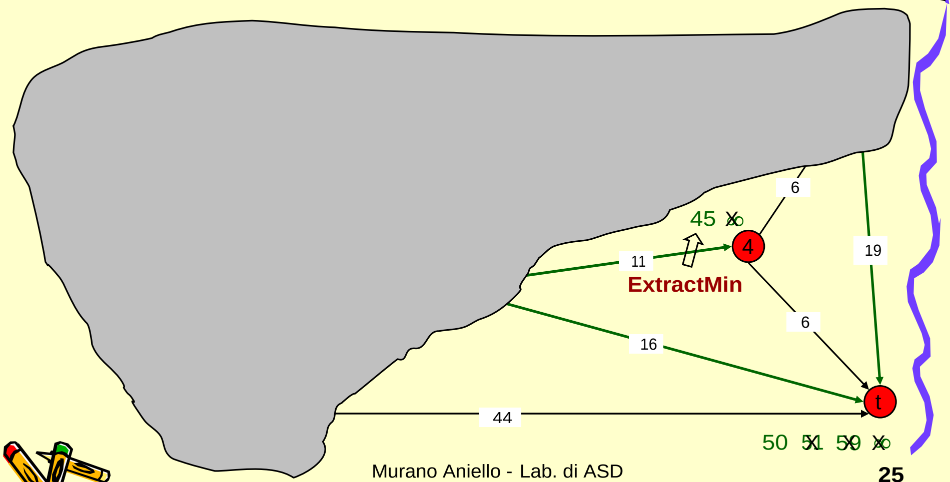
Q = { 4, t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 3, 5, 6, 7 }

Q = { 4, t }



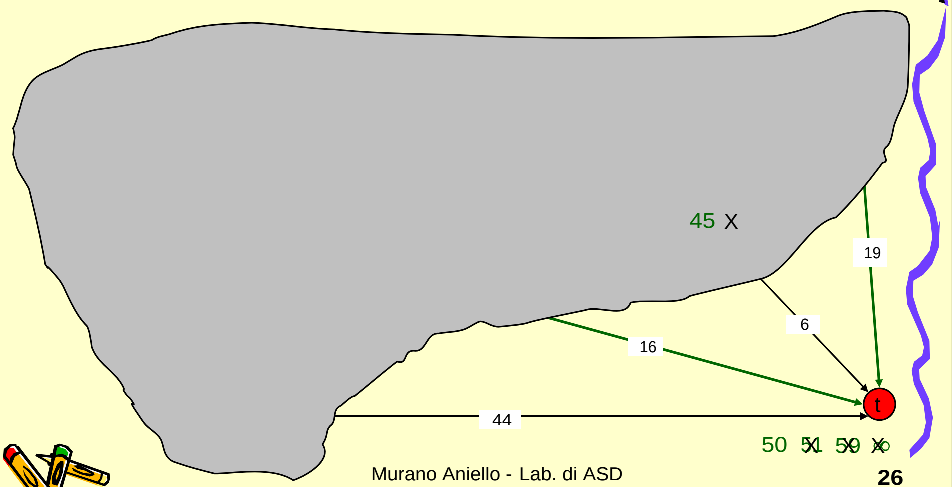
Murano Aniello - Lab. di ASD
Lezione n.19

25

Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

Q = { t }



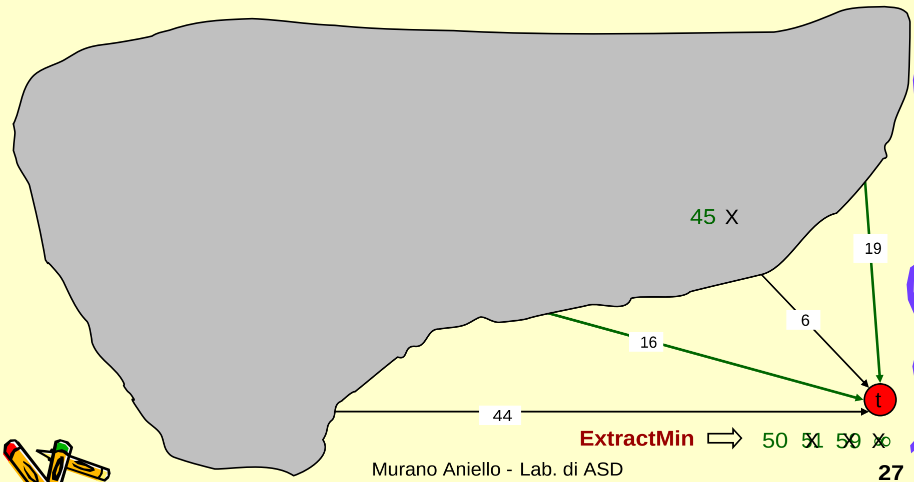
Murano Aniello - Lab. di ASD
Lezione n.19

26

Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

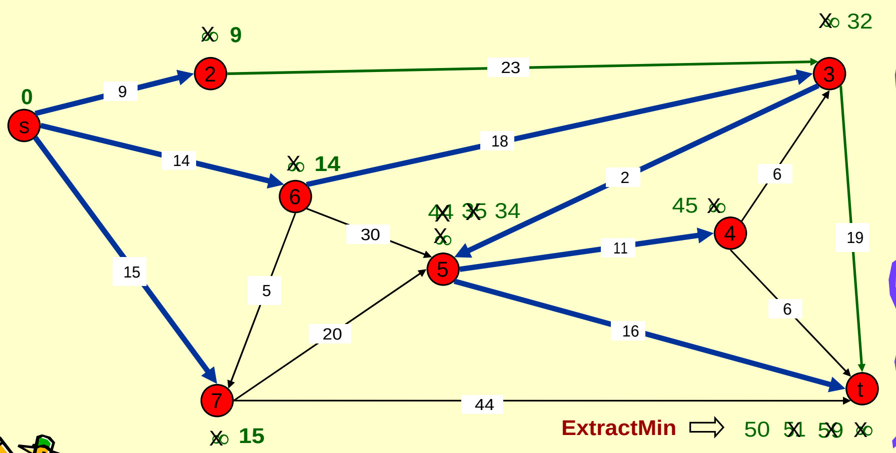
Q = { t }



Dijkstra's Shortest Path Algorithm

S = { s, 2, 3, 4, 5, 6, 7, t }

Q = { }



Inizializzazione

For ogni vertice v **di V**
do d[v] ← ∞
π[v] ← **NIL**
d[s] ← **0**

DIJKSTRA(G,s)

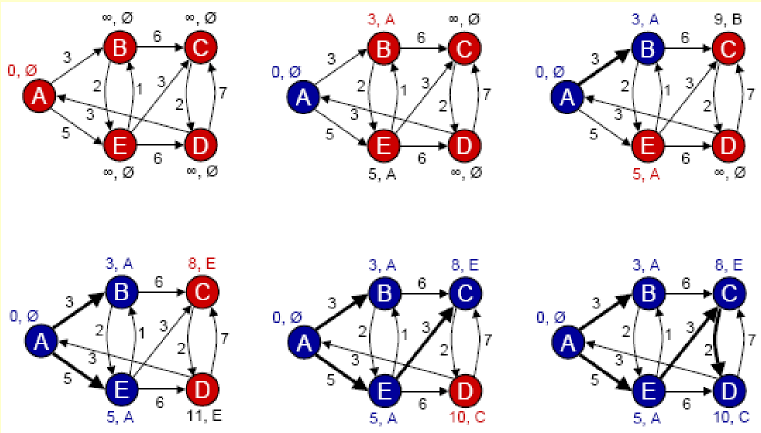
1. INIZIALIZE-SINGLE-SOURCE(G ,s)
2. S ← Ø
3. Q ← V[G]
4. **while** Q ≠ Ø
5. **do** u ← EXTRACT-MIN(Q)
6. S ← S unito {u}
7. **for** ogni vertice v di Adj[u]
8. **do** RELAX(u, v)

Tratto da:
Introduzione agli algoritmi
Di H.Cormen

- La linea 1 esegue l'inizializzazione,
- la linea 2 inizializza l'insieme S con l'insieme vuoto.
- La linea 3 inizializza la coda con priorità Q con tutti i vertici in V-S.
- Ad ogni esecuzione del ciclo while un vertice u viene estratto da Q e viene inserito in S (la prima volta u = s).
- Infine le linee 7-8 rilassano ogni arco (u, v) che esce da u, aggiornando la stima d[v] ed il predecessore π[v] se il cammino minimo per v può essere migliorato passando per u.
- Si osservi che ogni vertice viene estratto da Q ed inserito in S una sola volta;
- Quindi il ciclo while viene ripetuto |V| volte.

Un altro esempio

Supponiamo di voler calcolare il cammino minimo da A a D



Complessità (1/2)

```
INIZIALIZE-SINGLE-SOURCE(G ,s)
S ← Ø                    // Inizializzazione: θ(V) //
Q ← V[G]                 // Per costruire la coda a priorità: θ(V) //
while Q ≠ Ø              // eseguito |V| volte //
      do u ← EXTRACT-MIN(Q)
         S ← S unito {u}
            for ogni vertice v di Adj[u]  // |E| volte //
            do RELAX(u, v)
```

- Ciclo "while" eseguito |V| volte
- |V| chiamate a EXTRACT-MIN
- ciclo interno su archi fatto |E| volte
- Al più |E| chiamate a Relax
- Tempo totale:
- $\Theta(V + V \times T_{EXTRACT\text{-}MIN} + E \times T_{RELAX})$
- Dunque, la complessità dipende molto da come è implementata la coda di priorità

Complessità (2/2)

- Usando un array non ordinato per implementare la coda:
- EXTRACT-MIN in tempo $\Theta(n)$, Relax in $\Theta(1)$
- Tempo totale: $\Theta(V + V V + E) = \Theta(V^2)$
- In un grafo non fortemtente conesso conviene usare un heap binario invece di una coda di priorità
- Usando un heap, la complessità diventa: $\theta((V+E) \log V)$
  - Per costruire un heap: θ (V)
  - ExtractMin prende tempo $\theta(\lg V)$ (se si pensa ad un heap con minimo nella radice) e questa operazione viene eseguita |V| volte
  - Il costo di relax è $O(\lg V)$ e questo viene effettuato |E| volte.

Algoritmo Bellman - Ford

- L'algoritmo di Bellman-Ford risolve il problema di cammini minimi con sorgente singola nel caso più generale in cui i pesi degli archi possono essere negativi.
- Dato un grafo orientato e pesato G = (V, E) con sorgente s, l'algoritmo di Bellman-Ford restituisce un valore booleano che indica se esiste oppure no un ciclo di peso negativo raggiungibile dalla sorgente. In caso affermativo, l'algoritmo indica che non esiste alcuna soluzione; se invece tale ciclo non esiste, allora l'algoritmo produce i cammini minimi ed i loro pesi.
- Anche questo algoritmo usa la tecnica del rilassamento, diminuendo progressivamente una stima d[v] del peso di un cammino minimo dalla sorgente s ad ogni vertice v di V fino a raggiungere il reale peso di cammino minimo $\delta(s, v)$.
- L'algoritmo restituisce TRUE solo se il grafo non contiene un ciclo di peso negativo raggiungibile dalla sorgente

Bellman- Ford (G,s)

```
1.  INIZIALIZE-SINGLE-SOURCE (G, s)
2.  For i ←1 to |V[G]| - 1
3.          do for ogni vertice (u, v) di E[G]
4.                  do Relax (u, v, w)
5.  For ogni arco (u, v)  di E[G]
6.          do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7.                  then return FALSE
8.  Return TRUE
```

Tratto da:
Introduzione agli algoritmi
Di H.Cormen

Dopo aver effettuato l'inizializzazione, l'algoritmo fa |V| - 1 passate sugli archi del grafo:ogni passata è una iterazione del ciclo for delle linee 2-4 e consiste nel rilassare ogni arco del grafo una volta.
infine le linee 5-8 controllano l'esistenza di un ciclo di peso negativo e restituiscono il valore booleano appropriato.

Analisi Bellman- Ford

- L'algoritmo di Bellman - Ford richiede tempo O(VE), poiché l'inizializzazione in linea 1 richiede tempo $\Theta(V)$ mentre i cicli **for** richiedono tempo O(E)

Algoritmi:complessità

In definitiva l'algoritmo di Dijkstra è più conveniente rispetto a quello di Bellman-Ford,mentre l'ultimo algoritmo citato ha una duttilità maggiore perché é in grado di trovare il cammino minimo anche su grafi con archi di peso negativo.

Cammini minimi tra tutte le coppie di vertici di un grafo

- Oltre ad algoritmi che risolvono il problema del cammino minimo su grafi con sorgente singola, ve ne sono alcuni che considerano il problema di trovare i cammini minimi tra tutte le coppie di vertici in un grafo.
- Qui riportiamo l'algoritmo di Floyd-Warshall.

Algoritmo di Floyd-Warshall (1/2)

Si considerano tutti i cammini da **i** a **j** in cui vertici intermedi sono nell'insieme **{1,…,k}** e sia **p** un **cammino minimo** tra di essi.

E' possibile definire una relazione tra **p** e i cammini minimi tra i vertici **i** e **j** i cui vertici intermedi sono nell'insieme

{1,…,k-1}

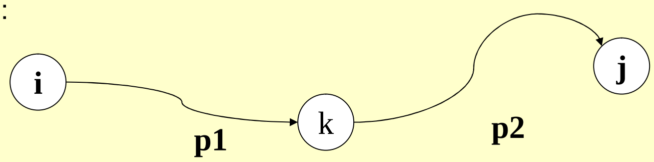
Se **k non** e' un vertice intermedio di **p**, allora **tutti** i vertici intermedi di **p** sono nell'insieme

{1,…,k-1}.

Questo significa che **il** peso di un cammino minimo da **i** a **j** in cui **tutti** i vertici intermedi sono in **{1,…,k}** è dato dal peso di un cammino minimo da **i** a **j** in cui **tutti** i vertci intermedi sono in **{1,…,k-1}**.

Algoritmo di Floyd-Warshall (2/2)

- Se **k** è un vertice intermedio di **p** allora possiamo spezzare p così:



• **p1** e' un *cammino minimo* da **i** a **k** in cui tutti i vertici intermedi sono nell'insieme **{1,…,k-1}**.

• **p2** e' un *cammino minimo* da **i** a **k** in cui tutti i vertici intermedi sono nell'insieme **{1,…,k-1}**.

Questo significa che il peso di un cammino minimo da **i** a **j** in cui tutti i vertici intermedi sono in **{1,…,k}** è dato dal peso di un cammino minimo da **i** a **k** in cui tutti i vertci intermedi sono in **{1,…,k-1} +** il peso di un cammino minimo da **k** a **j** in cui tutti i vertci intermedi sono in **{1,…,k-1}**.