Università degli Studi di Napoli

"Federico II"

Tesi di Laurea in Fisica

Il Limite Classico della Meccanica Quantistica nella Formulazione à la Weyl-Wigner

Alessandro Zampini
matr. 060/091

Sessione Estiva A.A. 2000-2001

Relatori: Ch.mo Prof. Giuseppe Marmo

Dr. Fedele Lizzi

Introduzione

La meccanica classica è una teoria sviluppata per formalizzare il concetto di evoluzione dinamica di un sistema fisico, ovvero dell'evoluzione temporale del valore delle grandezze osservabili che lo caratterizzano. Essa è nata dalle assunzioni newtoniane, e si è sviluppata fino a raggiungere un notevole rigore formale, attraverso la progressiva evoluzione di uno specifico linguaggio matematico, noto oggi come geometria differenziale.

Essa si è rivelata però incapace di modellizzare correttamente le caratteristiche di sistemi fisici delle dimensioni atomiche e molecolari. È stata quindi introdotta una teoria quantistica, con lo scopo di definire un formalismo in cui avesse un ruolo esplicito il valore finito della costante di Planck, o quanto d'azione, $\hbar$, misurato in modo inequivocabile attraverso molteplici evidenze sperimentali.

È noto, d'altro canto, che la formalizzazione quantistica della meccanica è profondamente differente da quella classica. Diverso è il modo di rappresentare l'insieme degli stati, diverso è il modo di rappresentare le grandezze osservabili, diverso è il modo di rappresentare l'evoluzione temporale. In particolare, in meccanica classica l'evoluzione temporale è letta come un gruppo di trasformazioni su una varietà, detta di supporto, che rappresenta l'insieme degli stati, mentre in meccanica quantistica l'insieme degli stati è descritto dagli elementi di uno spazio di Hilbert, e l'evoluzione temporale da un gruppo di trasformazioni unitarie su di esso. Ma la caratteristica probabilmente più interessante che sottolinea la differenza fra i due ambiti è che le grandezze osservabili sono formalizzate classicamente dall'insieme delle funzioni definite sulla varietà supporto, e quantisticamente da operatori autoaggiunti sullo spazio di Hilbert degli stati. Questa differenza è evidente se la si legge da un punto di vista algebrico. L'algebra delle osservabili classiche è commutativa, rispetto alle usuali definizioni di somma e prodotto, mentre l'algebra delle osservabili quantistiche non lo è, in quanto è non commutativa l'operazione di composizione fra operatori. Ed è proprio la non commutatività di quest'algebra ad essere legata alla formulazione matematica delle relazioni di indeterminazione, e quindi alla formulazione matematica della nozione di incompatibilità nella misura di certe osservabili, che è uno dei concetti di più profonda frattura rispetto al modello classico. In quest'ottica risulta chiaro come proprio il valore finito di $\hbar$ sia introdotto, nel formalismo quantistico, a caratterizzare la non commutatività dell'algebra delle osservabili: è in questo senso che va interpretata, seguendo la linea tracciata da Dirac, la posizione delle cosiddette regole di commutazione canoniche, per la dinamica quantistica di particella:

$$[\hat{Q}_a, \hat{P}_b] = i\hbar\delta_{ab}\mathbf{1}$$

Invero, le differenze così sottolineate introducono ad un profondo interrogativo. In che modo attribuire una natura classica o quantistica ad un sistema fisico, soprattutto alla luce della notevole capacità predittiva della teoria classica per sistemi macroscopici? In altri termini, come stabilire se un fissato sistema fisico sia macroscopico o microscopico? La risposta più naturale è ancora una volta attribuire ad $\hbar$ il ruolo di unità di misura. Sarà quantistico un sistema caratterizzato da valori delle grandezze osservabili in confronto ai quali il valore di $\hbar$ non sia trascurabile: sarà classico un sistema in cui, invece, il peso di $\hbar$ sia trascurabile rispetto ai valori delle osservabili che lo caratterizzano.

Pur l'assunzione di tale modus operandi cela un altro enorme quesito. In quale significato è possibile assumere che la meccanica classica costituisca un limite della meccanica quantistica? Ancora una volta, la risposta più naturale sembra essere considerare, come procedura di limite, quella per cui il ruolo di $\hbar$ divenga, specificatamente, sempre più marginale: come usualmente si dice, nel limite per $\hbar \to 0$. Proprio le relazioni di commutazioni canoniche rendono intuitivo il significato di questa procedura: nel limite per $\hbar \to 0$ la non commutatività dell'algebra delle osservabili classiche si annulla.

Il tema centrale di questo lavoro di tesi è lo studio di un formalismo, introdotto dai lavori di Hermann Weyl e Eugene Wigner, in virtù del quale è possibile tradurre alcuni aspetti della formalizzazione classica per la dinamica di un sistema in ambito quantistico, e viceversa, e condurre un'accurata analisi sia di temi legati al problema della quantizzazione di un sistema classico, sia del limite classico per un sistema quantistico.

A tal fine, il primo capitolo di questa tesi costituisce un'introduzione alle principali caratteristiche del formalismo classico e del formalismo quantistico. Le nozioni in esso presentate sono assolutamente note: ciò che si è cercato di illustrare in dettaglio sono alcuni aspetti, funzionali allo sviluppo successivo della trattazione. In primis si analizza in che modo il linguaggio, come è stato chiamato, della geometria differenziale, sia quello che permette la formalizzazione più naturale dei risultati della misura delle osservabili legate ai concetti di posizione e velocità. In seguito, chiarito ciò, si sviluppa la formulazione della dinamica classica nota come poissoniana, e quella della dinamica quantistica nella rappresentazione à la Heisenberg. Infatti, viene sottolineata la notevole analogia fra le proprietà della struttura di Parentesi di Poisson su una varietà, nell'insieme delle funzioni su essa definite, e quelle del commutatore nell'insieme degli operatori su uno spazio di Hilbert.

Il formalismo à la Weyl-Wigner è sviluppato nel terzo capitolo. Esso si fonda sulla definizione di un'applicazione $\hat{\Omega}$, che associa ad una funzione definita su uno spazio vettoriale un operatore definito su uno spazio di Hilbert. Essa è detta mappa di Weyl: la sua inversa mappa di Wigner[1]:

$$\hat{\Omega} \, : \, f \in \mathcal{F}\left(S\right) \, \rightarrow \, \hat{\Omega}\left(f\right) \in \, \mathcal{O}p\left(\mathcal{H}\right)$$

Le proprietà di questa applicazione fanno sì che essa si possa leggere come una procedura di quantizzazione: un modo per associare ad un'osservabile classica un'osservabile quantistica. Lo studio delle proprietà dei sistemi di Weyl, che sono una delle nozioni su cui si fonda la definizione della mappa $\hat{\Omega}$, permette di definire una quantizzazione per un sistema dinamico classico la cui evoluzione è descritta da equazioni lineari, ovvero da un hamiltoniana quadratica. In dettaglio, ad esempio, si è utilizzato questo studio per definire una quantizzazione per la dinamica di una particella carica in un campo magnetico costante senza ricorrere alla prescrizione dell'accoppiamento minimale, quindi senza introdurre il potenziale vettore del campo magnetico.

Parallelamente, la mappa di Wigner permette di definire, nell'insieme delle funzioni definite su S, l'algebra delle osservabili classiche, un prodotto non commutativo, detto prodotto star:

$$f * g = \hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{\Omega}\left(f\right) \cdot \hat{\Omega}\left(g\right)\right)$$

Questo prodotto è molto interessante, poichè esso dipende esplicitamente da $\hbar$, e nel limite in cui $\hbar \rightarrow 0$ si riduce al solito prodotto commutativo. Ciò significa che questo prodotto permette di definire nell'insieme delle funzioni una struttura di algebra naturalmente non commutativa, ma che diventa commutativa nella direzione, per quanto detto, propria del limite classico. Inoltre si vede che in quest'algebra è possibile tradurre le equazioni della dinamica quantistica nella formulazione à la Heisenberg, in modo tale che, sempre nel limite per $\hbar \rightarrow 0$, si riducono alle equazioni della dinamica classica nella formulazione à la Poisson. Questo formalismo, in altri termini, permette di definire una sorta di espansione in potenze di $\hbar$ per le equazioni di Heisenberg, per certi versi in modo simile a quello che la cosiddetta approssimazione semiclassica, o W.K.B., permette per l'equazione di Schrödinger, che, come noto definisce una differente formulazione per la dinamica quantistica.

Le proprietà di questo prodotto, e di altri che si ottengono attraverso un'estensione della mappa di Weyl, sono analizzati in dettaglio, in quanto essi sono utilizzati in svariati temi di studio nel settore della geometria non commutativa, e poichè rivestono un ruolo centrale nella formalizzazione di problemi di teoria di campo quantistica in termini di strings e branes.

[1]Qui $\mathcal{F}\left(S\right)$ è l'insieme delle funzioni definite sullo spazio vettoriale S, e $\mathcal{O}p\left(\mathcal{H}\right)$ è l'insieme degli operatori sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Il quarto e il quinto capitolo di questa tesi costituiscono lo sviluppo di applicazioni del tutto originali di questo formalismo.

Nel quarto capitolo si realizza un analogo classico della mappa di Jordan-Schwinger per algebre di Lie tridimensionali qualora come algebra di funzioni si consideri quella definita attraverso il prodotto star.

Il quinto capitolo è più strettamente legato a temi di geometria non commutativa: in esso si studia come il formalismo sviluppato permette di caratterizzare completamente l'insieme dei generatori dell'azione del gruppo di gauge $U(1)$ su un piano non commutativo, ovvero uno spazio vettoriale bidimensionale in cui è definito un prodotto non commutativo, qualora si identifichi questo prodotto proprio con il prodotto star.

Questa è la successione dei capitoli di questo lavoro, e degli argomenti che sono sviluppati. Ognuno di essi si apre con una sezione che prova ad inquadrare un proprio tema specifico, e funge da ulteriore, più specifica, introduzione. Parallelamente, ogni capitolo è correlato ad una serie di appendici, poste per comodità al termine dell'ultimo capitolo, in cui sono stati posti molti dei dettagli, sia relativamente a nozioni di carattere formale, e sia riguardanti un'analisi di molti degli aspetti di calcolo semplicemente richiamati nel testo, al fine di non interrompere troppo insistentemente la linea di presentazione svolta. Tra il primo e il terzo capitolo è posto un capitolo di digressioni: una tratta la nozione di sottospazio lagrangiano per uno spazio vettoriale, l'altra la nozione di trasformata di Fourier simplettica: sono questi due concetti poco sviluppati nei testi di riferimento, e ampiamente utilizzati per sviluppare compiutamente i temi successivi.

Questo lavoro termina con un capitolo di conclusioni, in cui una breve nota traccia una possibile rotta di sviluppo futuro per gli argomenti qui affrontati, ed introduce ad un'ultima sezione, in cui si delineano alcuni aspetti di un'analisi in questa direzione.

Indice

Capitolo 1

Sulla nozione di dinamica di un sistema fisico: la formulazione classica e quella quantistica

1.1 Un'introduzione ai concetti di sistema fisico, stati, ed osservabili

È ben noto che un sistema fisico viene di solito definito come una porzione di universo, soggetta ad influenze esterne in qualche modo controllabili, sulla quale è possibile compiere esperimenti quantitativi, detti misurazioni. Gli oggetti di tali misurazioni sono dette osservabili, i risultati di queste procedure dette misure. Ciò significa che sono le osservabili, ovvero le proprietà ed i valori delle grandezze fisiche che si misurano, a caratterizzare un sistema fisico.

Senza entrare nel dettaglio dell'analisi, assai complessa, di questi temi, si può assumere, in termini complementari, che un sistema fisico è di fatto definito dalle osservabili che vengono misurate, e l'attribuzione a queste di uno tra i loro possibili valori (insieme che viene detto spettro dell'osservabile) è ciò che si indica come stato.

Lo studio della meccanica è, in quest'ottica, lo studio dell'evoluzione, rispetto al tempo, dei valori delle osservabili: allora è naturale definire $\mathcal{S}$, l'unione degli stati di un sistema dinamico, come quell'insieme in cui l'evoluzione temporale si può pensare come una trasformazione dell'insieme in sè stesso, per ogni istante di tempo:

$$U_t : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$$

Se $s \in \mathcal{S}$, allora $U_t\left(s\right)$ rappresenta lo stato in cui è evoluto s dopo un tempo

t. Perciò si ha che

$$U_0 = \mathbf{1}$$

e pure che $U_{t'}\left(U_t\left(s\right)\right)$ rappresenta lo stato in cui è evoluto $U_t\left(s\right)$ dopo un tempo t' . In altre parole, per $t > 0$ e $t' > 0$, si ha che:

$$U_{t+t'} = U_t \circ U_{t'}$$

e che:

$$U_t \circ U_{t'} = U_{t'} \circ U_t$$

Ciò significa che la semiretta reale parametrizza l'insieme U_t : le proprietà di composizione lo caratterizzano come un semigruppo ad un parametro di trasformazioni. Se ogni U_t è un'applicazione biettiva di $\mathcal{S}$ in sè stesso, si pone:

$$U_t^{-1} \equiv U_{-t}$$

e l'insieme U_t definisce un gruppo ad un parametro di trasformazioni[1] su $\mathcal{S}$.

Un sistema per cui valga questa proprietà è detto reversibile: fissato $s \in \mathcal{S}$, in un sistema reversibile $U_t\left(s\right)$ definisce, al variare di t, una curva in $\mathcal{S}$. Questa è detta orbita del sistema dinamico passante per s. Proprio la biettività delle mappe U_t comporta che ogni stato s giaccia su una, e una sola, orbita: ovvero che due orbite siano disgiunte, o coincidano.

Poste in questa prospettiva, la meccanica classica e la meccanica quantistica non sono che due modi per formalizzare, e studiare, questi temi.

Questo primo capitolo è inteso come introduzione alle principali caratteristiche del formalismo classico e del formalismo quantistico, alla luce dei temi finora esposti. Esso è inteso ad illustrare come una teoria classica e una teoria quantistica siano state sviluppate al fine di formalizzare i concetti di osservabili, stati, ed evoluzione dinamica.

Nella prima parte di esso si analizzano i principali aspetti della teoria classica di un sistema dinamico. La dinamica classica è di solito presentata, qualora si intenda utilizzare appieno il linguaggio della geometria differenziale, come lo studio del problema di integrazione di un campo vettoriale X su una varietà differenziale M. Lo scopo delle prime sezioni di questo capitolo è delineare una traccia attraverso la quale, dall'analisi della misura delle osservabili legate ai concetti di posizione e velocità, sia naturale formalizzare l'insieme degli stati come una varietà differenziale e l'evoluzione temporale in essi come generata da un campo vettoriale.

L'esame della misura dell'osservabile posizione di un corpo, intuitivamente correlata alle proprietà dello spazio tridimensionale reale, e la naturale assunzione che più osservatori siano in grado di confrontare i risultati delle proprie misure, introducono al concetto di spazio delle configurazioni per un sistema dinamico. L'ulteriore richiesta che su di esso si possa

[1] L'applicazione che associa a $t \in \mathbb{R}$ una trasformazione $U_t : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ viene letta, in termini algebrici, come un omomorfismo fra $\left(\mathbb{R}, +\right)$, lo spazio vettoriale reale unidimensionale, e l'insieme delle trasformazioni su $\mathcal{S}$, rispetto all'usuale legge di composizione.

sviluppare compiutamente una nozione di calcolo conduce a riconoscere allo spazio delle configurazioni le caratteristiche di ciò che viene formalizzato, più astrattamente, come varietà differenziale.

L'analisi del modello newtoniano indica senza dubbio che però lo spazio delle configurazioni non è in grado di rappresentare correttamente ciò che è stato chiamato S, l'insieme degli stati di un sistema fisico. E proprio la nozione di velocità, che insieme alla posizione conclude la caratterizzazione di uno stato per un sistema dinamico nelle assunzioni newtoniane, viene utilizzata per definire la nozione di vettore sullo spazio delle configurazioni, e più in generale su una qualunque varietà. Attraverso essa è immediata l'introduzione del concetto di varietà fibrato tangente e di campo vettoriale. L'estensione dei teoremi di risolubilità di sistemi di equazioni differenziali chiarisce, a questo punto, quali siano i legami fra la nozione di campo vettoriale e quello di gruppo a un parametro di trasformazioni. In questa direzione, allora, acquista un significato chiaro e leggibile sia la formalizzazione dell'insieme degli stati di un sistema dinamico come varietà differenziale, sia dell'evoluzione temporale come di un campo vettoriale, e, parallelamente, delle grandezze osservabili in termini delle funzioni definite sulla varietà.

Solo a questo punto si introduce l'analisi delle proprietà di un campo vettoriale dinamico. La formulazione che si sviluppa è quella detta poissoniana, poichè è quella più strettamente legata al formalismo quantistico sorto con i lavori di Heisenberg, Dirac,....

Esso si fonda sulla definizione, nell'insieme delle funzioni sulla varietà, della nozione di parentesi di Poisson, e di campo hamiltoniano definito attraverso essa. In questa prospettiva, la formulazione hamiltoniana, basata sulla nozione di struttura simplettica, è interpretata come un caso particolare di quella poissoniana. L'argomento di queste sezioni è assolutamente noto: due sono, d'altro canto, gli aspetti di questi temi che si è cercato di analizzare con cura, alla luce dell'importanza del ruolo che rivestiranno nello sviluppo di questo lavoro. Il primo è quello di trasformazione canonica, definita sulla varietà, legata al problema di studiare quali siano le trasformazioni in virtù di cui la forma delle equazioni del moto rimane invariata. Il secondo è legato al teorema di Darboux, attraverso il quale viene recuperata, almeno localmente, l'usuale formulazione hamiltoniana.

La seconda parte di questo capitolo è intesa ad illustrare alcuni aspetti della formulazione quantistica per la dinamica di un sistema fisico. Anche qui, ovviamente, gli argomenti toccati sono del tutto noti: in questa presentazione, invero, si è cercato di sottolineare da un lato quali siano le principali differenze fra la formalizzazione classica e quella quantistica, e dall'altro, parallelamente, le possibili analogie fra esse.

Dapprima si illustra come la meccanica quantistica assuma un principio di sovrapposizione lineare per gli stati, in virtù del quale l'insieme degli stati è rappresentato da uno spazio di Hilbert: il problema della dinamica quantistica è perciò intrinsecamente lineare, e in questo fortemente dissimile da quello classico. Il secondo aspetto che si sottolinea è che le osservabili quantistiche sono rappresentate da operatori in questo spazio di Hilbert, e quindi definiscono un'algebra che è naturalmente non commutativa. Questo è un ulteriore aspetto peculiare della teoria quantistica rispetto a quella classica, in cui, come si è visto, l'algebra delle osservabili è rappresentata da un insieme di funzioni e perciò commutativa rispetto all'ordinaria definizione di prodotto. In questa prospettiva si pone il ruolo della costante di Planck, $\hbar$, legata proprio alla non commutatività di quest'algebra, e della nozione di commutatore di due grandezze osservabili, attraverso il quale è possibile dare un'espressione matematica alle relazioni di indeterminazione.

Parallelamente, proprio la scrittura delle equazioni della dinamica quantistica nella rappresentazione à la Heisenberg evidenzia le profonde analogie fra la struttura di commutatore nell'insieme delle osservabili quantistiche, e quella di Poisson nell'insieme delle osservabili classiche. In tal senso, allora, si inizia a delineare quale sarà la rotta che si seguirà nello sviluppo di questo lavoro per analizzare sia il problema della quantizzazione di un sistema classico, che del limite classico per un sistema quantistico.

1.2 Su alcune nozioni di dinamica classica

1.2.1 Sullo spazio delle configurazioni di un sistema dinamico

L'analisi del moto in ambito classico inizia da un'analisi delle misure dell'osservabile posizione, per un corpo o un sistema di corpi [13], [15]. È noto quanto sia arduo definire correttamente l'osservabile posizione:[2] evitando tentativi poco approfonditi in tal senso, è ragionevole assumere come naturale, ed intuitiva, la localizzazione di un oggetto in termini di punti di uno spazio reale tridimensionale.

Se come esempio si considera il moto di un punto materiale, ovvero di una corpo di cui si trascura l'estensione, un osservatore otterrà dalle misure un insieme di traiettorie percorse in funzione del tempo, cioè curve nello spazio euclideo in cui è immerso, e così formalizzerà lo spettro dell'osservabile posizione come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ (in questa prospettiva risulta chiaro che la posizione di due punti materiali sarà associata a sottoinsiemi di $\mathbb{R}^6$, e di un corpo rigido a sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$). Se si assume che degli osservatori abbiano, attraverso procedure peraltro proprie, desunto degli insiemi, U_i, di posizioni possibili per lo stesso sistema, allora devono necessariamente esistere delle biezioni fra parti di U_i qualora esse rappresentino la stessa posizione.[3] Esse sono dette mappe di transizione:

$$\tau_{ij} : U_i \mapsto U_j$$

[2]È bene sottolineare che questo studio viene condotto in ambito non relativistico: lo spazio ha natura distinta dal tempo, che è letto solo come parametro di evoluzione.

[3]Anche quella di stessa posizione è una nozione che si assume come naturale.

$$\tau_{ii} = \mathbf{1}$$
$$\tau_{ij} = \tau_{ji}^{-1}$$
$$\tau_{ij} \circ \tau_{jk} \quad \text{è una restrizione di} \quad \tau_{ik}$$

Nell'unione dei punti degli insiemi U_i si definisce una relazione di equivalenza. Se $x \in (U_i)$ e $y \in (U_j)$ allora:

$$x \cong y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = \tau_{ji}(y)$$

Con questa relazione si identificano gli elementi che rappresentano la stessa posizione: l'insieme quoziente delle classi di equivalenza in cui esso viene ripartito da questa relazione definisce Q, lo spazio delle configurazioni del sistema dinamico in esame. Due questioni bisogna ora sottolineare.

La prima è che, come si vede, Q riflette la struttura dei vincoli spaziali a cui è soggetto il sistema in esame: per una particella libera si avrà $Q = \mathbb{R}^3$, ma per una particella vincolata ad una superficie, o ad una curva, in $\mathbb{R}^3$, Q coinciderà proprio con la superficie, o con la curva. In altre parole, qui gli insiemi U_i si potranno considerare come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, o di $\mathbb{R}$, e Q sarà letto come bidimensionale, o monodimensionale. L'esempio forse più immediato è quello di una sfera: si può leggere come sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ i cui punti sono soggetti al vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (e in tal senso si dirà che è bidimensionale), oppure si possono interpretare i suoi punti come descritti da funzioni biettive che trasformano aperti di $\mathbb{R}^2$ in sottoinsiemi di S^2, identificando opportunamente le sovrapposizioni, visto che si può provare che non esistono funzioni biettive che trasformano tutto S^2 in un aperto di $\mathbb{R}^2$, ma che tali biezioni esistono solo localmente.[4]

La seconda è che, affinchè sia possibile formalizzare un problema della dinamica su Q, è necessario definire una nozione di calcolo differenziale su di esso, attraverso la posizione di una struttura topologica e di una struttura differenziale (che è un po' come dire una nozione di quali sottoinsiemi di Q siano aperti, e chiusi, e una nozione di derivazione per funzioni, ad esempio, da Q in $\mathbb{R}$).

Questo ulteriore studio conferisce a Q la struttura di ciò che si definisce varietà differenziale. In modo un po' grossolano - per un'analisi più accurata si rimanda in appendice - una varietà n-dimensionale è fatta incollando (in un senso più o meno esemplificato dalle mappe di transizione) sottoinsiemi aperti di uno spazio vettoriale n-dimensionale. Invero, in futuro, si considererà come varietà semplicemente uno spazio vettoriale, altre volte un'opportuna superficie immersa in uno spazio ambiente di dimensionalità superiore, ad esempio una curva in $\mathbb{R}^2$, oppure una curva o una superficie (come una sfera) in $\mathbb{R}^3$. In realtà, questa esemplificazione è paradigmatica:

[4]Se $A \subset S^2$, e b non appartiene ad A, una possibile biezione è data dalla proiezione stereografica di A rispetto a b su un piano tangente a S^2 in un punto appartenente ad A.

il teorema di Whitney [23] prova che ogni varietà di dimensione finita si può realizzare come sottoinsieme di un opportuno $\mathbb{R}^n$. In questa prospettiva assume un significato il concetto di coordinate locali, ovvero di coordinate di un aperto di $\mathbb{R}^n$ che rappresenta un sottoinsieme della varietà.

1.2.2 Una prima caratterizzazione dell'insieme degli stati: il modello newtoniano

Una volta analizzata la misura dell'osservabile posizione, bisogna ora riconsiderare il problema di caratterizzare l'insieme degli stati. Una volta attribuito un valore alla posizione di un corpo è possibile prevedere quale ne sarà l'evoluzione futura? Ovvero, fissato un punto nello spazio delle configurazioni, ne risulta univocamente determinata l'evoluzione? La risposta a questa domanda è no, come è evidente dal fatto che è esperienza comune che due corpi possono trovarsi, ad istanti di tempo diversi, nella stessa posizione ma con velocità differenti. Del resto questo è uno dei contenuti della legge di Newton: se, ancora una volta, ci si limita a considerare la dinamica di un punto materiale, nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ -che secondo quanto detto precedentemente è una varietà caratterizzata dall'avere un sistema globale di coordinate- essa è descritta da curve che sono soluzioni delle equazioni differenziali del secondo ordine[5] nella posizione:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) \tag{1.1}$$

Fissare un dato iniziale equivale a studiare la risolubilità di quello che è noto come problema di Cauchy: i teoremi a riguardo assicurano che la soluzione di questo esiste ed è unica qualora si fissi non solo la posizione iniziale, cioè il punto della curva:

$$\vec{x}\,(t=0) \equiv \vec{x}_0 \tag{1.2}$$

ma anche la derivata rispetto al tempo della funzione $\vec{x}\,(t)$:

$$\left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{t=0} \equiv \vec{v}_0 \tag{1.3}$$

detta velocità iniziale. Equivalentemente, nel modello newtoniano si assume che lo spazio degli stati per un punto materiale non soggetto a vincoli sia $\mathcal{S} = \mathbb{R}^6$. Su di esso, infatti, le equazioni le cui soluzioni rappresentano le orbite del sistema dinamico sono:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \tag{1.4}$$

[5] Un esempio di dinamica non del secondo ordine è quello di una particella carica che irradia onde elettromagnetiche: è il classico problema dell'interazione fra una carica e il campo elettromagnetico che essa stessa genera.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}) \tag{1.5}$$

Questo è un sistema del primo ordine, univocamente risolubile fissati:

$$\vec{x}(t=0) \equiv \vec{x}_0$$

$$\vec{v}(t=0) \equiv \vec{v}_0$$

Sullo spazio degli stati le soluzioni a questo problema sono le curve:

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0, \vec{v}_0) \tag{1.6}$$

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{x}_0, \vec{v}_0) \tag{1.7}$$

Esse realizzano esplicitamente l'operatore U_t introdotto in precedenza: U_t è proprio l'applicazione che trasforma la coppia $(\vec{x}, \vec{v})$ nella coppia $(\vec{x}(t), \vec{v}(t))$, soluzione del problema di Cauchy di dato iniziale $(\vec{x}, \vec{v})$

osservazione. *Risulta chiaro che si è considerato solo il caso in cui la forza, nell' impostazione newtoniana, dipende da t non esplicitamente, ma solo implicitamente, attraverso $\vec{x}$ e $\vec{v}$. Sebbene il formalismo che si sta introducendo sia generalizzabile, in un certo significato, anche a queste situazioni, si considereranno, in futuro, solo casi di sistemi, come si dice, invarianti per traslazioni temporali.*

1.2.3 Sull' introduzione della nozione di vettore su una varietà

L'analisi fin qui condotta indica che è di centrale importanza introdurre il concetto di vettore nello spazio delle configurazioni, Q, e più in generale su una varietà. Inoltre, sebbene una varietà sia sempre rappresentabile come sottoinsieme di uno spazio vettoriale, l'applicazione di questo formalismo a questioni di carattere vieppiù generali richiede che ogni nuovo aspetto venga introdotto in modo, come si dice, intrinseco: senza cioè far riferimento ad una sua specifica realizzazione.[6]

Come risulta dalle considerazioni svolte a proposito dello spazio $\mathbb{R}^3$, quello che si è interpretato come insieme dei vettori in un punto x è proprio l'insieme dei vettori tangenti alle curve che passano per x. In particolare bisogna notare che fissare $\xi_1(s)$ e $\xi_2(s)$, due curve che passano per x in $s = 0$:

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = x$$

per le quali:

$$\left.\frac{d\xi_1}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{d\xi_2}{ds}\right|_{s=0}$$

[6]Per un'analisi più rigorosa di alcuni aspetti di questo approccio, qui semplicemente menzionati, cfr. [13],[1].

equivale a definire lo stesso vettore tangente.

A questo punto l'idea è tradurre questa identificazione nel linguaggio in cui più elementarmente si esprime il concetto di varietà. Come si è detto, esso è quello in cui i suoi punti vengono etichettati da un sistema di coordinate definite in un sottoinsieme, che si può assumere aperto, di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, in cui n indica la dimensione della varietà.

Se, per fissare le notazioni, si sceglie come varietà proprio Q, allora $\mathcal{F}(Q)$ indica l'insieme delle funzioni da Q in $\mathbb{R}$. Esso è rappresentato dall'insieme delle funzioni da aperti di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Se $\gamma(s)$ è una curva su Q, allora è rappresentata da una curva definita in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Inoltre queste assunzioni permettono di utilizzare come nozione di calcolo differenziale su Q proprio quello su aperti di $\mathbb{R}^n$.

Ora si considera un sottoinsieme U di Q, per il quale un sistema di coordinate è x^a; e ancora una funzione f definita in Q e a valori in $\mathbb{R}$ e una curva $\gamma(s)$ in U, per cui $\gamma(0) = x$:

$$U \subset Q \qquad f \in \mathcal{F}(Q)$$

Si definisce vettore in x l'operatore di derivazione direzionale v associato a $\gamma(s)$:[7]

$$v(f) = \frac{d}{ds}\left(f \circ \gamma(s)\right)\Big|_{s=0} \tag{1.8}$$

Questo insieme diviene uno spazio vettoriale definendo:

$$\left(v + v'\right)(f) \equiv v(f) + v'(f)$$

e se $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha v)(f) \equiv \alpha v(f)$$

Esso si dice spazio vettoriale tangente a Q in x : T_xQ. Una base è data dagli operatori $\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_x$, che sono i vettori che descrivono la derivazione direzionale lungo le curve coordinate. Se:

$$\gamma_{(i)}(s) = x + se_{(i)}$$

dove $e_{(i)}$ indica l'i-esimo elemento di base in $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_x (f) = \frac{d}{ds}\left(f \circ \gamma_{(a)}(s)\right)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} f\left(x + se_{(a)}\right)\Big|_{s=0} = \frac{\partial f}{\partial x^a}\Big|_x \tag{1.9}$$

L'unione di tutti gli spazi tangenti T_xQ si indica con:

$$TQ \equiv \bigcup_{x \in Q} T_xQ \tag{1.10}$$

[7]Più propriamente, associato alle curve in U che passano per x e hanno lo stesso valore del vettore tangente.

Nel caso in cui $Q = \mathbb{R}^n$, uno spazio vettoriale, allora T_xQ è isomorfo a Q, e perciò TQ è isomorfo a $Q \times Q$. In generale questa identificazione non è possibile: però si può provare che a TQ si può attribuire una struttura di varietà differenziale. Visto che TQ è definito da coppie del tipo (x, v), con $x \in Q$ e $v \in T_xQ$, si può definire una mappa di proiezione:

$$\pi \; : \; TQ \; \mapsto \; Q$$

attraverso:

$$\pi\left(x, v\right) \equiv x \tag{1.11}$$

La terna (TQ, Q, π) si definisce fibrato tangente[8] di Q. Come esempio, se Q è un cerchio, S^1 , allora $TQ = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro. Chiaramente, l'applicazione π non è invertibile: essa è suriettiva, ma non iniettiva. Una sorta di inversa si può considerare su Q. Si definisce σ quell'applicazione per cui:

$$\sigma : \, Q \, \rightarrow \, TQ$$

$$\pi \circ \sigma \equiv \mathbf{1}_Q \tag{1.12}$$

Essa è detta sezione, ed equivale ad associare ad ogni punto di Q un elemento nell'insieme dei vettori tangenti a Q in quel punto: quindi σ formalizza la nozione di campo vettoriale. Perciò si dice che un campo vettoriale è una sezione del fibrato tangente. Esso ha l'espressione locale:

$$A \in \mathcal{X}\left(Q\right) \qquad A = A^s\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x^s} \tag{1.13}$$

le funzioni $A^s\left(x\right)$ sono le componenti del campo A. Si possono leggere come l'immagine di A sulle funzioni che rappresentano le curve coordinate:

$$A^s\left(x\right) = A{\cdot}x^s \tag{1.14}$$

Le proprietà dell'operatore di derivazione parziale rendono plausibile (e questa affermazione si può comunque provare in dettaglio) che, per un cambiamento di coordinate, rappresentato dalle trasformazioni, $\tilde{x}^a = \tilde{x}^a\left(x^b\right)$ si ha :

$$A = A^j\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \tilde{A}^j\left(\tilde{x}\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \tag{1.15}$$

con:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^a} = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial}{\partial x^b} \tag{1.16}$$

e:

$$\tilde{A}^j\left(\tilde{x}\right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^n} A^n\left(x\right) |_{x = x(\tilde{x})} \tag{1.17}$$

Queste formule si riducono, per trasformazioni lineari, alle ben note formule di trasformazione delle componenti di un vettore in uno spazio lineare.

[8]Viene di solito indicata, per brevità, TQ come varietà fibrato tangente di Q , Q come base del fibrato, e T_xQ come fibra su x.

1.2.4 Sulla nozione di sistema dinamico come campo vettoriale

È ora possibile sistematizzare quanto introdotto in precedenza, a proposito dell'interpretazione della meccanica classica come studio di trasformazioni, dipendenti da un parametro nello spazio degli stati di un sistema, alla luce dei concetti di varietà differenziale e di campo vettoriale.

Su una varietà M si definisce gruppo globale di trasformazioni ad un parametro un'applicazione differenziabile:[9]

$$\Phi \ : \ (t, x) \ \in \ \mathbb{R}\times M \ \mapsto \ \Phi_t (x) \ \in M \tag{1.18}$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

$$1)\forall \ t \in \mathbb{R} \ , \ \phi_t \text{ è una mappa da } \ M \text{ in } M$$

$$2)\forall \ t, s \ \in \ \mathbb{R}, \ \forall \ x \ \in \ M \ , \ \ \Phi_{t+s} (x) = (\Phi_t \circ \Phi_s) (x)$$

Attraverso queste definizioni, $\forall \ x_0 \in M$, l'applicazione $\Phi_t (x_0)$ è una curva differenziabile γ di M, detta orbita o traiettoria di Φ per x_0. Inoltre l'applicazione $X \ : M \ \mapsto \ TM$ che associa il vettore tangente in x all'orbita del gruppo passante per x è un campo vettoriale differenziabile, che si dice generatore infinitesimo di Φ. In coordinate:

$$X_x = \left(\left. \frac{d\Phi^a}{dt} \right|_{t=0} \right) (x) \, \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{1.19}$$

e ciò chiarisce che l'orbita $\gamma \ : \ t \ \mapsto \ \Phi_t (x)$ è una curva integrale del campo. Ad esempio, se $M = \mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y) si può considerare il gruppo:

$$\Phi_\theta \ : \ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \ \mapsto \ \mathbb{R}^2$$

$$\Phi_\theta (x, y) \equiv (x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta) \tag{1.20}$$

Come si può esplicitamente calcolare, le orbite di questo gruppo sono cerchi centrati nell'origine. Il generatore è il campo:

$$R = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

che è proprio il generatore dell'azione del gruppo delle rotazioni $SO (2)$ sul piano.

Parallelamente, si definisce gruppo locale di trasformazioni ad un parametro un'applicazione:

$$\Phi \ : \ I_\epsilon\times U \ \mapsto \ M \text{ con } I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \text{ e } U \subset M \tag{1.21}$$

[9] Qui, e nel seguito, le condizioni sulla continuità o la derivabilità di funzioni si interpreteranno come quelle delle funzioni espresse nel sistema di coordinate a cui possono localmente ricondursi.

per cui:

$$1)\forall\, t\ \in I_\epsilon\ ,\ \Phi_t\ :\ x\ \mapsto\ \Phi_t\left(x\right)\text{ è un diffeomorfismo da } U \text{ in } \Phi_t\left(U\right)$$

$$2)\text{ se } s,t,t+s\ \in\ I_\epsilon,\text{ e se } x \text{ e } \Phi_s\left(x\right)\ \in\ U \text{ allora } \Phi_t\left(\Phi_s\left(x\right)\right)=\Phi_{t+s}\left(x\right)$$

Il risultato importante, analogo ai teoremi sulla risolubilità di sistemi autonomi di equazioni differenziali del primo ordine, è che si può dimostrare che:

se X è un campo vettoriale differenziabile su M, allora $\forall\ x_0\ \in\ M$ esistono:

- un aperto $U \subset M$ con $x_0 \in U$
- un intervallo $I_\epsilon \equiv (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$
- un gruppo locale di trasformazioni a un parametro $\Phi\ :\ I_\epsilon{\times}U\ \mapsto\ M$ il cui generatore è X

Inoltre, il campo vettoriale X si dice completo se $I_\epsilon = \mathbb{R}$, e $U = M$, ovvero se genera un gruppo globale di trasformazioni a un parametro. A questo punto è possibile interpretare la meccanica classica in termini di una formalizzazione dell'insieme degli stati di un sistema fisico come varietà differenziale, e degli operatori $U_t\ : \mathcal{S}\ \mapsto\ \mathcal{S}$ come un gruppo globale di trasformazioni ad un parametro su $\mathcal{S}$, e pertanto equivalente ad un campo vettoriale completo su $\mathcal{S}$.

Poichè si è visto che un campo vettoriale è associato ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, è in questa prospettiva che assume un significato preciso la caratterizzazione dello spazio degli stati come di quell'insieme in cui l'evoluzione temporale di un punto (cioè del valore delle osservabili) sia univocamente determinata dalla legge dinamica. Ciò comporta pure che ogni osservabile si potrà assumere come rappresentato da una funzione f da $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}$. Per esso la legge infinitesima di evoluzione sarà:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{dx^a}{dt} = X{\cdot}f \tag{1.22}$$

cioè sarà data dall'azione del campo dinamico su f. Tra le differenti formulazioni sviluppate, quella più naturalmente correlata alla formulazione della dinamica quantistica è nota come poissoniana, ed è di essa che si illustreranno le principali caratteristiche.

osservazione. *Nel seguito si farà riferimento ad alcune nozioni di geometria differenziale, come quella di campi tensoriali su una varietà, di derivazione di Lie, di calcolo esterno. Esse non sono state introdotte nel testo, come invece quelle di varietà differenziale e di campo vettoriale, poichè si possono considerare come strumenti per una più compiuta formalizzazione della teoria: alcuni elementari richiami, sufficienti per l'uso che se ne farà, sono posti in appendice.*

1.2.5 Sulla definizione di parentesi di Poisson

Su una varietà M, nell'algebra $\mathcal{F}(M)$ delle funzioni reali, si definisce parentesi di Poisson un'applicazione:

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

che sia:

- bilineare
- antisimmetrica
- che soddisfi l'identità di Jacobi:

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$$

- e che soddisfi la regola di Leibnitz rispetto alla struttura di algebra associativa e commutativa definita dall'usuale prodotto di funzioni:

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$$

In particolare,una struttura di Poisson si definisce regolare (o non degenere) qualora la relazione $\{f,g\} = 0 \;\forall g \in \mathcal{F}(M)$ implichi che f è costante.

Il primo, e più noto esempio di varietà di Poisson regolare è quello per cui $M = \mathbb{R}^{2n}$, e rispetto alle coordinate (q^i, p_i) con $i \in 1, \ldots, n$, che nel formalismo canonico sono usati per descrivere le variabili posizione e impulso di un sistema di punti materiali, si ha:

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{1.23}$$

Il fatto che questa applicazione soddisfi la cosiddetta regola di Leibnitz è molto importante ed esistono infatti mappe bilineari, antisimmetriche, che soddisfano l'identità di Jacobi (e quindi conferiscono ad $\mathcal{F}(M)$ una struttura di algebra di Lie), per le quali essa non è verificata.

Una di esse è data, nel caso in cui X sia un arbitrario campo vettoriale, da (qui L_X definisce la derivazione di Lie lungo il campo X):

$$\{f,g\}' \equiv fL_X g - gL_X f \tag{1.24}$$

Un calcolo esplicito mostra infatti che:

$$\begin{aligned} \{fg,h\}' &= fgL_X h - hL_X(fg) \\ &= fgL_X h - hfL_X g - hgL_X f \end{aligned}$$

mentre:

$$f\{g,h\}' + \{f,h\}'g = fgL_X h - fhL_X g + gfL_X h - ghL_X f$$

Invero questa proprietà permette di leggere, fissata una funzione $f \in \mathcal{F}(M)$, l'espressione:

$$\{\cdot, f\} \ : \mathcal{F}(M) \mapsto \mathcal{F}(M)$$

come un operatore di derivazione su $\mathcal{F}(M)$, e quindi associare alla funzione f un campo vettoriale X_f, attraverso la posizione:[10]

$$X_f \cdot g = \{g, f\} \tag{1.26}$$

I campi per cui esiste una funzione per la quale valga questa uguaglianza sono detti hamiltoniani. Si dice, perciò, che un sistema dinamico ammette una descrizione in termini di una struttura di Poisson qualora esista una funzione, detta appunto hamiltoniana, H, in virtù della quale il campo vettoriale, che descrive il generatore infinitesimo delle traslazioni temporali, sia X_H.

Per l'evoluzione temporale di un'osservabile si pone:

$$\frac{df}{dt} \ = \ \{f, H\} \ = \ L_{X_H} f \tag{1.27}$$

L'associazione di un campo vettoriale ad una funzione definisce un anti-omomorfismo fra algebre di Lie: quella delle funzioni sulla varietà rispetto alla parentesi di Poisson e quella dei campi vettoriali sulla stessa varietà rispetto al commutatore:[11]

$$[X_k, X_h]\, f \ = \ X_{-\{k,h\}}\, f$$

Infatti, dalla definizione di commutatore di due campi vettoriali e di campo hamiltoniano rispetto ad una parentesi di Poisson, si ha che:

$$\begin{aligned} [X_h, X_k]f &= X_h X_k f - X_k X_h f \\ &= \{X_k f, h\} - \{X_h f, k\} \\ &= \{\{f, k\}, h\} - \{\{f, h\}, k\} \\ &= \{\{f, k\}, h\} + \{\{h, f\}, k\} \end{aligned}$$

[10] Ciò che viene sottolineato con maggiore puntualità in appendice è che un generico operatore di derivazione $\mathcal{D}$ in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^m\right)$, cioè un operatore $\mathbb{R}$-lineare per cui valga la regola di Leibnitz, definisce un campo vettoriale: $\mathcal{D}(f) = D^i(x)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}$

$$X_f \cdot g \ \equiv \ \{g, f\} \tag{1.25}$$

[11] Si definisce commutatore di due campi l'operatore differenziale in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^m\right)$

$$\begin{aligned} [A, B]f &\equiv A{\cdot}Bf - B{\cdot}Af \\ &= \left(A^i \frac{\partial B^k}{\partial x^i} - B^i \frac{\partial A^k}{\partial x^i}\right) \frac{\partial f}{\partial x^k} \end{aligned}$$

e per l'identità di Jacobi questa espressione è proprio:[12]

$$\{f, \{k, h\}\} = X_{-\{h,k\}} f \tag{1.28}$$

Rispetto ad un sistema di coordinate $\{\xi^a\}$, le componenti di un campo vettoriale sono l'immagine dell'operatore proprio sulle curve coordinate:

$$X \; = \; X^s \left(\xi\right) \frac{\partial}{\partial \xi^s}$$

con:

$$X^s \left(\xi\right) \; = \; X \cdot \xi^s$$

da cui:

$$X_f \; = \; \{\xi^a, f\} \frac{\partial}{\partial \xi^a}$$

e perciò:

$$\{g, f\} \; = \; X_f \left(g\right) \; = \; \{\xi^a, f\} \frac{\partial g}{\partial \xi^a}$$

Parallelamente si può sviluppare in tal senso l'espressione:

$$\{\xi^a, f\} \; = \; -\{f, \xi^a\} \; = \; -\{\xi^b, \xi^a\} \frac{\partial f}{\partial \xi^b}$$

e ottenere:

$$\{g, f\} \; = \; \frac{\partial g}{\partial \xi^a} \{\xi^a, \xi^b\} \frac{\partial f}{\partial \xi^b} \tag{1.29}$$

Se si definisce una trasformazione sulle coordinate: $\eta^a \; = \; \eta^a \left(\xi^s\right)$ allora:

$$\{\eta^a, \eta^b\} \; = \; \{\eta^a \left(\xi\right), \eta^b \left(\xi\right)\} \; = \; \frac{\partial \eta^a}{\partial \xi^s} \{\xi^s, \xi^t\} \frac{\partial \eta^b}{\partial \xi^t} \tag{1.30}$$

ciò significa che le quantità

$$\Lambda^{ab} \; \equiv \; \{\xi^a, \xi^b\} \tag{1.31}$$

si trasformano come le componenti di un tensore 2 volte controvariante, antisimmetrico:

$$\Lambda \; = \; \Lambda^{ab} \left(\xi\right) \frac{\partial}{\partial \xi^a} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^b} \tag{1.32}$$

Quanto detto indica che la definizione di una struttura di parentesi di Poisson in $\mathcal{F}\left(M\right)$ è equivalente alla definizione di un tensore antisimmetrico, due volte controvariante detto tensore di Poisson:

$$\Lambda \; \left(df, dg\right) \; = \; \{f, g\} \tag{1.33}$$

[12]Può essere interessante sottolineare che l'applicazione fra funzioni e campi vettoriali definita attraverso:

$$f \mapsto \; X_f \cdot g \equiv \{f, g\}$$

è, invece, un omomorfismo.

In questa forma, l'identità di Jacobi diventa:

$$\Lambda^{sk}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^s}\Lambda^{ab}\right) + \Lambda^{sa}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^s}\Lambda^{bk}\right) + \Lambda^{sb}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^s}\Lambda^{ka}\right) = 0 \tag{1.34}$$

Può essere utile considerare degli esempi.

Se $M \equiv \mathbb{R}^2$ con variabili (q,p), la posizione

$$\{q,p\} = 1$$

dà proprio:

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

e, ancora, il campo vettoriale

$$X = p\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial p}$$

che descrive la dinamica dell'oscillatore armonico, è hamiltoniano con:

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right)$$

Un altro è quello in cui si considerano i soli gradi di libertà di spin di una particella in un campo magnetico B: se $s^i s_i = l^2 = cost.$ (e ciò significa che $M = S^2$, cioè è una sfera nello spazio tridimensionale) si pone:

$$\{s_a, s_b\} = \varepsilon_{abc}s_c$$

e se si sceglie $H = s^a B_a$ le equazioni del moto sono:

$$\dot{s}_k = -\varepsilon_{kab}s^a B^b$$

Scritta nella notazione vettoriale, questa equazione assume la forma:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = -\vec{s} \wedge \vec{B}$$

Ancora, se $M = \mathbb{R}^3$ e si pone:

$$\{x,y\} = z \qquad \{y,z\} = x \qquad \{z,x\} = y$$

si ha una stuttura di Poisson degenere: se $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, si può calcolare che $\{a(r), g\} = 0$ per ogni g.

Di particolare importanza è lo studio delle trasformazioni di M in sè stesso che lasciano invariata la struttura di Poisson.

Un'applicazione

$$\Phi : M \mapsto M$$

si dice di Poisson, o canonica, qualora:

$$\{f,g\}\circ\Phi \;=\; \{f\circ\Phi, g\circ\Phi\} \tag{1.35}$$

per ogni f e g in $\mathcal{F}(M)$[13]. Più in generale, un gruppo a un parametro di trasformazioni Φ_s su M si definisce canonico quando:

$$L_X\,\Lambda \;=\; 0 \tag{1.36}$$

se X è il generatore infinitesimo di Φ_t. Si può provare che questa condizione è equivalente a che:

$$L_X\,\{f,g\} \;=\; \{L_X f, g\} \;+\; \{f, L_X g\} \tag{1.37}$$

e che, ancora, se un campo è hamiltoniano allora è canonico. Ciò significa che la dinamica può essere letta come un gruppo (se il campo è completo) o, più in generale, come un insieme di trasformazioni canoniche.

È possibile ancora vedere che l'insieme dei campi hamiltoniani non esaurisce l'insieme delle trasformazioni canoniche infinitesime. Utilizzando il tensore Λ si può associare ad ogni forma differenziale α un campo vettoriale:

$$X_\alpha \;\in\; \mathcal{X}(\mathcal{M}) \quad \text{se} \quad \alpha \;\in\; \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$$

attraverso:

$$X_\alpha\cdot\beta \;\equiv\; -\Lambda(\alpha,\beta) \quad \forall\,\beta \;\in\; \mathcal{X}^*(\mathcal{M}) \tag{1.38}$$

in coordinate:

$$(X_\alpha)^j\,\beta_j = -\Lambda^{ab}\alpha_a\beta_b \tag{1.39}$$

da cui

$$(X_\alpha)^b = -\Lambda^{ab}\alpha_a \tag{1.40}$$

si può dimostrare che X_α è canonico se e solo se

$$d\alpha\;(X_f, X_g) = 0 \quad \forall\; f \text{ e } g \;\in\; \mathcal{F}(M) \tag{1.41}$$

che in coordinate ha la forma:

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^s}[\left(dx^s\otimes dx^i\right)\cdot(X_f,X_g) - \left(dx^i\otimes dx^s\right)\cdot(X_f,X_g)] = 0 \tag{1.42}$$

ovvero

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^s}[(X_f)^s\,(X_g)^i - (X_f)^i\,(X_g)^s] = 0 \tag{1.43}$$

È interessante sottolineare che possono anche esistere, in generale, trasformazioni canoniche infinitesime, ovvero campi vettoriali che generano trasformazioni canoniche, che non sono associate a forme differenziali. Infatti, non è necessario che per ogni campo X canonico esista una 1-forma α per cui $X = X_\alpha$: per convincersi di ciò basta pensare al caso in cui la matrice Λ_{ab}, che rappresenta il tensore di Poisson, non sia invertibile.

[13] Un'analisi più approfondita, in cui siano presenti le dimostrazioni di queste e di altre affermazioni qui riportate, è in [5].

1.2.6 Dalla formulazione poissoniana a quella hamiltoniana

Come si è visto, attraverso il tensore di Poisson si è definita un'applicazione fra $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ e $\mathcal{X}(\mathcal{M})$. Qualora la matrice Λ^{ab} sia invertibile punto per punto, allora la stessa relazione:

$$X \cdot \beta \equiv -\Lambda(\alpha_X, \beta) \quad \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{M}) \ , \forall \beta \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M}) \tag{1.44}$$

stabilisce una mappa fra $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ e $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$, inversa della precedente. Utilizzando questa biezione si può definire una 2-forma:

$$\omega \cdot (X, Y) \equiv \Lambda \cdot (\alpha_X, \alpha_Y) \tag{1.45}$$

Questa espressione, scritta in coordinate, risulta:

$$\omega_{ab} X^a Y^b = \Lambda^{st} (\alpha_X)_s (\alpha_Y)_t \tag{1.46}$$

secondo la definizione, questa relazione equivale a:

$$\Lambda^{ka} \omega_{ab} = -\delta^k_b \tag{1.47}$$

perciò

$$(\alpha_X)_i = X^a \omega_{ai} \tag{1.48}$$

(spesso si riporta questa biezione come applicazione $\natural$ (diesis) e $\flat$ (bemolle) [1]:

$$\begin{aligned} X_\alpha &\equiv \alpha^\natural \\ \alpha_X &\equiv X^\flat \end{aligned}$$

La 2-forma così definita è non degenere, ed è possibile provare che l'identità di Jacobi per il tensore di Poisson è equivalente alla condizione $d\omega = 0$.

Ciò significa che se M ha una struttura di Poisson non degenere allora esiste una 2-forma chiusa non degenere: essa viene detta struttura simplettica e M varietà simplettica. Su una varietà simplettica si definiscono campi localmente hamiltoniani quelli per cui

$$L_X \omega = 0 \tag{1.49}$$

I campi localmente hamiltoniani sono quelli sulle cui orbite la struttura simplettica resta costante, ovvero sono generatori di trasformazioni simplettiche. Inoltre si ha che:

$$L_X \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_X \Lambda = 0 \tag{1.50}$$

Questo significa, in dettaglio, che l'insieme delle trasformazioni simplettiche, coincide con quello delle trasformazioni canoniche, o di Poisson.

Dall'identità di Cartan:

$$L_X \omega = 0 \quad \Rightarrow$$

$$i_X d\omega + d\, i_X \omega = 0 \quad \Rightarrow$$
$$d\, i_X \omega = 0$$

Questo chiarisce che sono detti globalmente hamiltoniani i campi per cui esiste una funzione H tale che:

$$i_X \omega = dH \tag{1.51}$$

in coordinate:

$$\frac{\partial H}{\partial x^k} = X^n \omega_{nk} \tag{1.52}$$

ovvero quelli per cui la 1-forma $i_X \omega$ sia esatta e non solo chiusa.

Ad esempio, sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, cioè il piano privato dell'origine, si ha che il campo vettoriale:

$$\Gamma = \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

è localmente hamiltoniano, ma non globalmente hamiltoniano. Infatti:

$$i_\Gamma \omega = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$$

e si può provare che questa 1-forma è chiusa, ma non esatta: del resto, essa è sì chiusa, ma su un dominio non semplicemente connesso. Il lemma di Poincarè non è perciò applicabile.

Per chiarire alcune questioni menzionate si può studiare, in maggior dettaglio, il caso in cui $M = \mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y) e le equazioni del moto sono, con $U = U(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{dU}{dx} \end{aligned}$$

Questo campo vettoriale ha una formulazione poissoniana definendo:

$$\{x, y\} = 1$$

$$H = \frac{y^2}{2} + U(x)$$

Infatti, le equazioni del moto si possono scrivere come:

$$\dot{x} = \{x, H\} \tag{1.53}$$

$$\dot{y} = \{y, H\} \tag{1.54}$$

In particolare una trasformazione

$$\Phi \ : \ (x, y) \ \mapsto \ (\tilde{x}, \tilde{y})$$

è canonica se e solo se

$$\{\tilde{x}, \tilde{y}\} = 1$$

cioè:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = 1 \tag{1.55}$$

Il tensore di Poisson è:

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.56}$$

Questo è invertibile e la 2-forma simplettica è:

$$\omega = dx \otimes dy - dy \otimes dx = dx \wedge dy \tag{1.57}$$

La biezione descritta fra campi vettoriali e 1-forme assume la forma:

$$dx \xrightarrow{\natural} -\frac{\partial}{\partial y} \xrightarrow{\flat} dx$$
$$dy \xrightarrow{\natural} \frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{\flat} dy$$

e permette di considerare il campo dinamico:

$$X_H = y\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.58}$$

e trasformarlo:

$$(X_H)^\flat = ydy + \frac{\partial U}{\partial x}dx = dH \tag{1.59}$$

$$X_H = (dH)^\natural \tag{1.60}$$

e ancora, in modo equivalente:

$$i_{X_H}\omega = dH \tag{1.61}$$

Un'ultima questione è legata a quanto sia paradigmatico l'esempio proposto. In essa si è ottenuta la 2-forma simplettica invertendo un particolare tensore di Poisson. È pur ovvio che non tutte le strutture di Poisson invertibili danno questa forma simplettica: ma si può provare [1] (teorema di Darboux) che per una arbitraria struttura simplettica (ovvero una 2-forma chiusa, non degenere) esiste una trasformazione di coordinate che, localmente, trasforma ω nella forma canonica. In $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\omega = dx^i \wedge dy^i \tag{1.62}$$

Nelle coordinate canoniche il campo hamiltoniano associato alla funzione H ha la forma:

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial y^a}\frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{\partial H}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^a} \tag{1.63}$$

Se si può identificare $M = T^*Q$ e (x, y) con (q, p) allora questa formulazione coincide con quella, ben nota, in cui le q^a sono lette come variabili di posizione e le p_a come variabili di momento. Inoltre è interessante sottolineare che il risultato del teorema di Darboux non si può rendere globale semplicemente considerando come varietà uno spazio vettoriale, come già fatto in tanti altri casi.

Infatti, se, ancora una volta si sceglie:

$$M = \mathbb{R}^2$$

con

$$\omega = e^x dx \wedge dy$$

la trasformazione

$$\tilde{x} = e^x \;\text{ e }\; \tilde{y} = y$$

porta a

$$\omega = d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}$$

ma, come è chiaro, essa non è biettiva su tutto $\mathbb{R}^2$: ω assume la forma canonica solo per $\tilde{x} > 0$.

Come ulteriore esempio, si può considerare la struttura di Poisson tridimensionale già introdotta:

$$\{x, y\} = z \qquad \{y, z\} = x \qquad \{z, x\} = y \tag{1.64}$$

Si è detto che essa è degenere: in più la matrice delle componenti di questo tensore di Poisson è antisimmetrica (per definizione) su uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ a dimensione dispari, e perciò necessariamente non invertibile: ciò chiarisce che tensori di Poisson non possono essere invertiti se non su varietà di dimensioni pari.

Quanto delineato finora mostra che la formulazione hamiltoniana della meccanica classica si può interpretare come un sottocaso di quella poissoniana su varietà a dimensione pari.

1.3 Su alcune nozioni di dinamica quantistica

La formulazione quantistica della dinamica di un sistema fisico si fonda su delle assunzioni profondamente diverse da quelle su cui si poggia la formulazione classica.

Ad un sistema fisico corrisponde uno spazio di Hilbert complesso, separabile, $\mathcal{H}_s$: uno stato è rappresentato da un elemento $\psi \in \mathcal{H}_s$ detto, appunto, vettore di stato. Questa assunzione formalizza il cosiddetto principio di sovrapposizione. Per esso si assume che nell'insieme degli stati di un sistema quantistico è possibile definire una struttura lineare in virtù della quale, se ψ

e ϕ rappresentano due stati, è uno stato fisicamente realizzabile pure quello rappresentato da $\alpha\phi + \beta\psi$, con α e β coefficienti in generale complessi.[14]

Ad ogni osservabile corrisponde un operatore autoaggiunto $\hat{A}$, in $\mathcal{H}_s$. Lo spettro dell'osservabile, cioè l'insieme dei valori che l'osservabile può assumere, corrisponde allo spettro, in senso matematico, dell'operatore $\hat{A}$: la misura dell'osservabile rappresentato dall'operatore $\hat{A}$ conduce ad una distribuzione delle frequenze con cui i singoli valori sono misurati, definita proprio sullo spettro di $\hat{A}$. Essa dipende, chiaramente, dallo stato in cui si trova il sistema. Ciò che si assume è confrontare il valor medio di questa distribuzione sperimentale col valore:

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi \equiv \frac{\langle \psi \mid \hat{A} \mid \psi \rangle}{\langle \psi \mid \psi \rangle} \tag{1.65}$$

e la dispersione con:

$$\triangle \hat{A}_\psi \equiv \left(\frac{\langle \psi \mid \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \mid \psi \rangle}{\langle \psi \mid \psi \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.66}$$

che è uguale a:

$$\triangle \hat{A}_\psi = \frac{\parallel \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right) \psi \parallel}{\parallel \psi \parallel} \tag{1.67}$$

Questa assunzione implica che le predizioni delle teoria non cambiano se lo stato è rappresentato da ψ o da $\alpha\psi$, con α arbitrario numero complesso non nullo: questa caratteristica viene riassunta dicendo che lo spazio degli stati di un sistema quantistico è in corrispondenza con $\mathcal{H}_s/\mathbb{C}^*$ detto anche spazio dei raggi di $\mathcal{H}_s$. L'insieme $\mathcal{H}_s/\mathbb{C}^*$ è detto quoziente di $\mathcal{H}_s$ rispetto a $\mathbb{C}$ privato dello zero, ed è l'insieme delle classi di equivalenza in cui $\mathcal{H}_s$ viene ripartito dalla relazione:

$$\psi \sim \phi \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}^* : \psi = \alpha\phi$$

Secondo questa definizione esistono stati per i quali la distribuzione dei valori misurati per un'osservabile è caratterizzata dall'avere dispersione nulla[15] :

$$\triangle \hat{A} = 0 \tag{1.68}$$

Essi sono detti autostati dell'osservabile rappresentato da $\hat{A}$, e si può vedere che sono rappresentati da stati ψ_i per i quali è risolubile l'equazione agli autovalori:

$$\hat{A}\psi_i = a_i\psi_i \tag{1.69}$$

[14] L'analisi più chiara delle esperienze che hanno portato all'ipotesi e poi alla formalizzazione di un principio di sovrapposizione lineare è probabilmente nel testo di P.A.M. Dirac The principles of Quantum Mechanics. [6]

[15] Per un richiamo delle principali nozioni di analisi funzionale relativi alla teoria degli operatori lineari su uno spazio di Hilbert, cfr. [18].

In questo caso:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi_i} = a_i \tag{1.70}$$

In altre parole, il valor medio dell'osservabile, quando il sistema è in un autostato, è proprio uguale all'autovalore corrispondente.

Due osservabili sono detti compatibili quando sono rappresentati da operatori, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, il cui commutatore si annulla:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right) = 0 \tag{1.71}$$

Nel caso in cui si scelga uno stato ψ, normalizzato -cioè per cui $\parallel \psi \parallel = 1$- e che appartenga all'intersezione:

$$\mathcal{D}om\left(\hat{A}\right) \cap \mathcal{D}om\left(\hat{B}\right) \cap \mathcal{D}om\left([\hat{A}, \hat{B}]\right)$$

si può provare che [16]:

$$\triangle \hat{A} \triangle \hat{B} \geq \frac{1}{2} \mid \langle \psi \mid [\hat{A}, \hat{B}] \mid \psi \rangle \mid \tag{1.72}$$

Questa è l'espressione matematica della relazione di indeterminazione: se due grandezze non sono compatibili esiste una correlazione fra le dispersioni che caratterizzano le distribuzioni dei loro valori, misurati in uno stato. La previsione teorica di un aumento della precisione con cui si stima il valor medio dell'osservabile rappresentato da $\hat{A}$ in uno stato ψ comporta una diminuzione di quella con cui si stima il valor medio di $\hat{B}$, in quello stesso stato.

L'evoluzione dinamica è descritta, in $\mathcal{H}_s/\mathbb{C}^*$, da operatori $\hat{U}(t_1, t_0)$: se $\psi(t_0)$ rappresenta lo stato al tempo t_0, allora:

$$\psi(t_1) = \hat{U}(t_1, t_0) \cdot \psi(t_0) \tag{1.73}$$

Per essi valgono le proprietà di composizione:

$$\hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_0) = \hat{U}(t_2, t_0) \tag{1.74}$$

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbf{1} \tag{1.75}$$

Ciò che si assume è che l'evoluzione temporale quantistica sia rappresentata da operatori per i quali:

$$|\langle \psi(t) | \psi'(t) \rangle|^2 = |\langle \psi(t_0) | \psi'(t_0) \rangle|^2 \tag{1.76}$$

Questa relazione chiarisce che si definisce quantistica una dinamica in virtù della quale resta costante il modulo del prodotto hermitiano fra vettori di stato. Il teorema di Wigner [25] prova che una trasformazione $\mathcal{T}$ che lascia invariato il modulo del prodotto hermitiano fra raggi di uno spazio di Hilbert è rappresentabile mediante un operatore unitario o antiunitario $\hat{U}_{\mathcal{T}}$

su tutto lo spazio di Hilbert, e che su di esso risulta definito a meno di un fattore di fase. Ciò comporta che gli operatori $\hat{U}(t_1, t_0)$ possono essere unitari o antiunitari: una naturale richiesta di continuità rispetto all'operatore $\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbf{1}$ forza ad assumere che la dinamica quantistica sia rappresentata da operatori unitari, per cui:

$$\hat{U}^{\dagger}(t_1, t_0) = \hat{U}^{-1}(t_1, t_0) = \hat{U}(t_0, t_1) \tag{1.77}$$

Qualora $\hat{U}(t_1, t_0)$ dipenda solo dalla differenza $t_1 - t_0 = \tau$ si dice che la dinamica è invariante per traslazioni temporali: le proprietà di composizione implicano che:

$$\hat{U}(\tau_1)\hat{U}(\tau_2) = \hat{U}(\tau_1 + \tau_2) = \hat{U}(\tau_2)\hat{U}(\tau_1) \tag{1.78}$$

e quindi che $\hat{U}(\tau)$ è un gruppo a un parametro di operatori unitari. Il teorema di Stone[16] permette di ottenere una descrizione infinitesima dell'evoluzione temporale. Se:

$$\psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\psi(t_0) = \exp[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)]\psi(t_0) \tag{1.79}$$

si ha che, per i vettori sui quali $\hat{H}$ è definito:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = \hat{H}\psi(t) \tag{1.80}$$

Essa è detta equazione di Schrödinger.

Può essere interessante, a conclusione di questa introduzione al formalismo quantistico, sottolineare due aspetti assolutamente nuovi rispetto a quello classico e assolutamente specifici.

Il primo è quello che l'algebra delle osservabili quantistiche è rappresentato dall'insieme degli operatori autoaggiunti su $\mathcal{H}_s$: diversamente dall'insieme $\mathcal{F}(M)$, che descrive l'algebra delle osservabili nella formulazione classica, essa è non commutativa, e proprio grazie a questa sua caratteristica è in grado di cogliere specifici aspetti del mondo quantistico, come il principio di indeterminazione.

Il secondo è che quello della dinamica quantistica è formulato come un problema lineare: una corretta trattazione matematica è resa peculiare, e complicata, dal fatto che è definito su spazi vettoriali a dimensione eventualmente infinita. Infatti, qualora si considerino sistemi le cui osservabili

[16] Per ogni numero reale t sia $\hat{U}_t$ un operatore unitario. Si supponga che $\langle \phi \mid \hat{U}_t\psi \rangle$ sia una funzione continua di t per tutti i vettori ψ e ϕ. Se $\hat{U}_0 = \mathbf{1}$ e $\hat{U}_t\hat{U}_s = \hat{U}_{t+s}$ per ogni t e s, allora esiste un unico operatore autoaggiunto $\hat{H}$ tale che $\hat{U} = e^{it\hat{H}}$ per tutti i t. Un vettore ψ è nel dominio di $\hat{H}$ se e solo se i vettori $\frac{(\hat{U}_t - \mathbf{1})\psi}{it}$ convergono ad un limite per $t \to 0$; allora il vettore limite si definisce $\hat{H}\psi$. Inoltre se un operatore limitato commuta con $\hat{U}_t$ allora commuta con $\hat{H}$. Per una presentazione più accurata, cfr. [18].

permettono una formalizzazione su uno spazio degli stati a dimensione finita, tutti i problemi sono esplicitamente risolubili: basta fare riferimento all'analisi del solo osservabile di spin per una particella, o della polarizzazione per un fotone.[17]

1.3.1 Dalla rappresentazione di Schrödinger alla rappresentazione di Heisenberg

Come si è più volte esplicitamente sottolineato la dinamica si può leggere come un'evoluzione nello spazio degli stati, rispetto ad un parametro identificato con il tempo, a cui corrisponde un'evoluzione dei valori delle osservabili. Nel formalismo quantistico questa impostazione è detta rappresentazione di Schrödinger: l'evoluzione di uno stato è descritta da un gruppo a un parametro di operatori unitari generato da un operatore detto hamiltoniano:

$$\mid \psi\,(t)\rangle = \exp[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,(t-t_0)] \mid \psi\,(t_0)\rangle \tag{1.81}$$

a cui corrisponde un'evoluzione del valor medio di un'osservabile:

$$\langle\hat{A}\rangle_{\psi(t)} = \langle\psi\,(t) \mid \hat{A} \mid \psi\,(t)\rangle \tag{1.82}$$

Le proprietà della struttura hermitiana permettono di scrivere:

$$\begin{aligned} \langle\psi\,(t) \mid \hat{A} \mid \psi\,(t)\rangle &= \langle\hat{U}\,(t)\,\psi\,(0) \mid \hat{A} \mid \hat{U}\,(t)\,\psi\,(0)\rangle \\ &= \langle\psi\,(0) \mid \hat{U}^{\dagger}\,(t)\,\hat{A}\hat{U}\,(t) \mid \psi\,(0)\rangle \end{aligned}$$

ciò indica che, se si definisce:

$$\hat{A}\,(t) \equiv \hat{U}^{\dagger}\,(t)\,\hat{A}\hat{U}\,(t) \tag{1.83}$$

si ha che:

$$\langle\hat{A}\rangle_{\psi(t)} = \langle\hat{A}\,(t)\rangle_{\psi(0)} \tag{1.84}$$

Questa espressione chiarisce che si può leggere l'evoluzione del valor medio di un'osservabile non come implicitamente determinata dall'evoluzione di uno stato, ma come un'evoluzione dell'operatore che descrive l'osservabile, rispetto ad uno stato che è fissato.

Si può pure considerare la forma infinitesima di queste due relazioni. Si vede che:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}\,(t) = [\hat{A}\,(t)\,,\hat{H}] \tag{1.85}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}\,(t) = \hat{U}^{\dagger}\,(t)\,[\hat{A},\hat{H}]\hat{U}\,(t) \tag{1.86}$$

[17] Sono proprio questi gli esempi proposti in molti testi introduttivi alla meccanica quantistica, al fine di indurre a pensare in modo quantomeccanico: cfr., ad esempio, [19].

Questo modo di interpretare la dinamica quantistica è detta rappresentazione di Heisenberg: in essa, cioè, si assume che le variabili dinamiche siano gli operatori che formalizzano le osservabili.

Le equazioni che rappresentano queste variabili richiamano, ancora una volta, che il concetto di commutatore di due operatori riveste un ruolo centrale nel formalismo quantistico. Dalla definizione:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)$$

si vede che:

- $[\cdot, \cdot] : Op(\mathcal{H}_s) \times Op(\mathcal{H}_s) \mapsto Op(\mathcal{H}_s)$ è un'applicazione bilineare, e antisimmetrica.
- soddisfa l'identità di Jacobi:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

- soddisfa la regola di Leibnitz rispetto all'operazione di composizione. Un calcolo esplicito prova infatti che:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
&= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
&= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}
\end{aligned}$$

Le proprietà del commutatore di due operatori sono analoghe a quella della parentesi di Poisson di due funzioni definite su una varietà, qualora vengano lette in termini algebrici. Entrambe sono bilineari e antisimmetriche, soddisfano l'identità di Jacobi, e definiscono una derivazione rispetto al prodotto associativo: quello puntuale, abeliano, fra funzioni, e quello, non abeliano, della composizione fra operatori.

Questa analogia si può naturalmente estendere alla forma delle equazioni di evoluzione delle osservabili in ambito classico e quantistico:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad \text{e} \quad i\hbar\frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]$$

Una prima osservazione è rivolta alla presenza dell'unità immaginaria nell'equazione di Heisenberg: essa si può leggere come una conseguenza del fatto che le osservabili quantistiche sono rappresentate da operatori autoaggiunti, e che $[\hat{A}, \hat{B}]$ è antiautoaggiunto. Invero una manipolazione formale (ovvero un calcolo che prescinde dallo stretto rigore necessario nell'analisi di operatori su spazi vettoriali a dimensione infinita) conduce a:

$$\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)^{\dagger} = -\hat{A}^{\dagger}\hat{B}^{\dagger} + \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger} = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}$$

Parallelamente, $i[\hat{A}, \hat{B}]$ è, ancora almeno formalmente, autoaggiunto.

Una seconda osservazione è rivolta al problema di capire se esista, nell'algebra degli operatori su uno spazio di Hilbert, una diversa definizione di un'applicazione che abbia le proprietà del commutatore. In questa direzione il risultato di Dirac è definitivo: egli provò[18] che, se in un'algebra associativa ma non commutativa, con a e b elementi dell'algebra l'applicazione:

$$\{a, b\}$$

è bilineare, antisimmetrica, soddisfa l'identità di Jacobi e la regola di Leibnitz rispetto al prodotto associativo, allora è necessariamente

$$\{a, b\} = \mu\,(a{\cdot}b - b{\cdot}a) \tag{1.87}$$

con μ un generico elemento che commuta con tutti gli elementi dell'algebra (questo insieme viene detto centro dell'algebra). Se l'algebra in questione è quella degli operatori su uno spazio di Hilbert si ha che il centro è formato dai soli multipli dell'operatore identità, e perciò un'arbitraria struttura di commutatore è definita da:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \mu[\hat{A}, \hat{B}] \qquad \text{con}\, \mu \in \mathbb{C} \tag{1.88}$$

La richiesta che il commutatore di due operatori autoaggiunti sia autoaggiunto porta a scegliere:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = ia[\hat{A}, \hat{B}] \qquad \text{con}\, a \in \mathbb{R} \tag{1.89}$$

Come si è visto in ambito classico, il fatto che una parentesi di Poisson nell'algebra commutativa delle funzioni su una varietà soddisfi la proprietà di derivazione rispetto al prodotto permette di scrivere che:

$$\{g, f\} \;=\; \frac{\partial g}{\partial \xi^a}\,\{\xi^a, \xi^b\}\,\frac{\partial f}{\partial \xi^b} \tag{1.90}$$

rispetto ad un sistema di coordinate, e perciò che sia sufficiente definire le quantità $\{\xi^a, \xi^b\}$ per definire $\{g, f\}$. Qual è il significato di una possibile traduzione di ciò in ambito quantistico? È possibile spingere l'analogia formale fra le proprietà di una struttura di Poisson su una varietà e quelle del commutatore nell'algebra degli operatori su $\mathcal{H}_s$ fino ad ottenere un'espressione simile in ambito quantistico?

Per provare a rispondere è preliminarmente necessario analizzare la nozione di funzione di operatori.[19] Dapprima si considera un operatore $\hat{A}$, limitato,

[18]La dimostrazione di questo risultato è in appendice

[19]L'analisi di questo tema non è assolutamente esaustiva: essa serve ad illustrare gli aspetti più direttamente legati allo sviluppo della trattazione. Per un approfondimento [18].

su $\mathcal{H}_s$: ciò è equivalente a dire che il suo dominio coincide con tutto $\mathcal{H}_s$. Questo permette di definire:

$$\hat{A}^2 = \hat{A} \cdot \hat{A}$$

$$\hat{A}^3 = \hat{A} \cdot \hat{A} \cdot \hat{A}$$

e in generale

$$\hat{A}^k = \overbrace{\hat{A} \cdots \hat{A}}^{k}$$

Essi sono limitati, e se $\hat{A}$ è autoaggiunto, si può provare che ogni operatore ottenuto come potenza di $\hat{A}$ è autoaggiunto.

Allora se

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

è una funzione analitica nella variabile reale z si può ancora provare che l'espressione $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{A}^n$ definisce un operatore limitato: esso è pure autoaggiunto se i coefficienti c_n sono reali. Risulta perciò naturale definire:

$$f\left(\hat{A}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{A}^n \tag{1.91}$$

e, più in generale, considerare come funzioni di $\hat{A}$ tutte quelle esprimibili come polinomi in $\hat{A}$ o come serie di potenze i cui coefficienti coincidono con quelli dello sviluppo di funzioni con un raggio di convergenza non nullo. È bene sottolineare che quest'analisi incontra notevoli difficoltà se $\hat{A}$ non è limitato: ad esempio, se $\mathcal{D}om\left(\hat{A}\right) \cap \mathcal{R}ange\left(\hat{A}\right) = \emptyset$, allora $\hat{A} \cdot \hat{A}$ non si può definire, poichè avrebbe dominio vuoto. Si possono ancora considerare funzioni di un operatore $\hat{A}$ gli operatori che si ottengono come polinomi, o serie di potenze di $\hat{A}$, ma bisogna specificare di volta in volta quali siano rigorosamente realizzabili: in generale funzioni di un operatore autoaggiunto sono definite attraverso il ricorso alla teoria spettrale.

In seguito si analizza il problema di attribuire un significato a funzioni di due (o più) operatori: e questa dipende, in modo cruciale, dal fatto che gli operatori commutino oppure no. Funzioni di operatori che commutano possono effettivamente ottenersi estendendo quanto illustrato a proposito del problema per un singolo operatore. Però, in generale, ed è il caso degli operatori più utilizzati in meccanica quantistica, si ha che: $\hat{A} \cdot \hat{B} \neq \hat{B} \cdot \hat{A}$. Questa espressione già indica che, pur quando siano stati compiutamente studiati i problemi di una rigorosa definizione del prodotto di operatori, a causa di una loro eventuale non limitatezza, assumere che funzioni di $\hat{A}$ e $\hat{B}$ siano date da polinomi, ovvero somme e prodotti dei due operatori, presuppone di considerare, caso per caso, ogni termine come caratterizzato da uno specifico ordinamento. Ad esempio l'operatore:

$$\hat{A} \cdot \hat{A} \cdot \hat{B} = \hat{A}^2 \cdot \hat{B}$$

è diverso da:

$$\hat{A}\cdot\hat{B}\cdot\hat{A}$$

ed è ancora diverso da:

$$\hat{B}\cdot\hat{A}\cdot\hat{A} = \hat{B}\cdot\hat{A}^2$$

Essi coincidono quando $\hat{A}$ e $\hat{B}$ commutano e sempre solo se i loro domini di definizione coincidono. È questa l'accezione nella quale si considerano funzioni di operatori le espressioni nella forma di polinomi di essi.

Come nella formulazione hamiltoniana usuale della dinamica di un punto materiale non soggetto a vincoli si assume che $M = T^*\mathbb{R}^3$, che $\left(q^i, p_i\right)$ sono le variabili che formalizzano posizione e impulso della particella e che:

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$$

così in ambito quantistico si assume che nello spazio di Hilbert degli stati che descrivono la dinamica di una particella siano definiti degli operatori autoaggiunti, detti canonici, per i quali valga:

$$[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] = 0 \tag{1.92}$$
$$[\hat{Q}_a, \hat{P}_b] = i\hbar\delta_{ab}\mathbf{1} \tag{1.93}$$
$$[\hat{P}_a, \hat{P}_b] = 0 \tag{1.94}$$

in cui $a, b \in 1 \ldots 3$

Essi vengono identificati con le componenti delle osservabili posizione e impulso. Questa definizione caratterizza il ruolo di $\hbar$ nella teoria: esso è messo in corrispondenza alla non commutatività del prodotto nell'insieme delle osservabili quantistiche.

Può essere interessante sottolineare che, anche nel formalismo classico, la quantità $\{q^i, p_j\}$ dovrebbe essere uguale ad una quantità che abbia le dimensioni fisiche di un'azione: in quest'ottica, la differenza fra teoria classica e teoria quantistica è che in quest'ultima esiste una costante di natura, proprio con le dimensioni di un'azione, sperimentalmente misurata. In altri termini, è proprio il valore finito di questa costante che crea un mondo irriducibilmente quantistico.

Se, come nel formalismo classico, si considerano come sole osservabili quantistiche le funzioni di $\hat{Q}_a$ e $\hat{P}_a$, le espressioni:

$$[\hat{Q}_a, \hat{F}\left(\hat{Q}_j, \hat{P}_j\right)] = i\hbar\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{P}_a} \tag{1.95}$$

$$[\hat{P}_a, \hat{F}\left(\hat{Q}_j, \hat{P}_j\right)] = -i\hbar\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{Q}_a} \tag{1.96}$$

si possono utilizzare per definire il significato di derivata di funzioni di operatori, che non si era ancora introdotto. Semplicemente applicando la definizione si può vedere che questa identificazione introduce un'operazione che ha tutte le proprietà formali di una derivazione. Infatti:

$$\begin{aligned}[\hat{Q}_a, \hat{F}+\hat{G}] &= [\hat{Q}_a, \hat{F}] + [\hat{Q}_a, \hat{G}] && (1.97)\\ &= i\hbar\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{P}_a} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{P}_a}\right) && (1.98)\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}[\hat{P}_a, \hat{F}+\hat{G}] &= [\hat{P}_a, \hat{F}] + [\hat{P}_a, \hat{G}] && (1.99)\\ &= -i\hbar\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}_a} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{Q}_a}\right) && (1.100)\end{aligned}$$

quindi questa operazione è lineare; poi:

$$\begin{aligned}[\hat{Q}_a, \hat{F}\cdot\hat{G}] &= \hat{F}\cdot[\hat{Q}_a, \hat{G}] + [\hat{Q}_a, \hat{F}]\cdot\hat{G} && (1.101)\\ &= \hat{F}\cdot i\hbar\left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{P}_a}\right) + i\hbar\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{P}_a}\right)\cdot\hat{G} && (1.102)\end{aligned}$$

e pure:

$$\begin{aligned}[\hat{P}_a, \hat{F}\cdot\hat{G}] &= \hat{F}\cdot[\hat{P}_a, \hat{G}] + [\hat{P}_a, \hat{F}]\cdot\hat{G} && (1.103)\\ &= -i\hbar\hat{F}\cdot\left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{Q}_a}\right) - i\hbar\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}_a}\right)\cdot\hat{G} && (1.104)\end{aligned}$$

perciò soddisfa una regola à Leibnitz. E, ancora, ha immagine nulla sulle costanti:

$$[\hat{Q}_a, c\mathbf{1}] = 0 \qquad (1.105)$$

$$[\hat{P}_a, c\mathbf{1}] = 0 \qquad (1.106)$$

Per chiarire alcuni di questi concetti si possono analizzare due esempi: (in essi si considera, per non appesantire la notazione, giusto una coppia di operatori canonici).

- se $\hat{F} = \hat{Q}\cdot\hat{P}\cdot\hat{Q}$ allora proprio secondo la regola di Leibnitz:

$$\begin{aligned}[\hat{Q}, \hat{Q}\cdot\hat{P}\cdot\hat{Q}] &= \hat{Q}[\hat{Q}, \hat{P}\cdot\hat{Q}]\\ &= \hat{Q}[\hat{Q}, \hat{P}]\hat{Q}\\ &= i\hbar\hat{Q}\cdot\hat{Q}\end{aligned}$$

  e pure:

$$\begin{aligned}[\hat{P}, \hat{Q}\cdot\hat{P}\cdot\hat{Q}] &= \hat{Q}[\hat{P}, \hat{P}\cdot\hat{Q}] + [\hat{P}, \hat{Q}]\hat{P}\cdot\hat{Q}\\ &= \hat{Q}\cdot\hat{P}[\hat{P}, \hat{Q}] + [\hat{P}, \hat{Q}]\hat{P}\cdot\hat{Q}\\ &= -i\hbar\left(\hat{Q}\cdot\hat{P} + \hat{P}\cdot\hat{Q}\right)\end{aligned}$$

- se $\hat{F} = \hat{Q}\cdot\hat{P} + \hat{P}\cdot\hat{Q}$ si ha:

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}, \hat{F}] &= i\hbar\left(\hat{Q} + \hat{Q}\right) = 2i\hbar\hat{Q} \\
[\hat{P}, \hat{F}] &= -i\hbar\left(\hat{P} + \hat{P}\right) = -2i\hbar\hat{P}
\end{aligned}$$

Come mostrano questi esempi una regola di derivazione così definita dà risultati, sempre formalmente, analoghi a quelli che darebbe una definizione intuitiva, qualora essa si ponesse estendendo le regole di derivazione nell'insieme dei polinomi di variabili reali, con l'unica aggiuntiva, esplicita prescrizione che, visto che quest'algebra è non abeliana, questa regola di derivazione rispetti l'ordinamento. Grazie a questa definizione:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}\hat{Q}_a(t) &= [\hat{Q}_a(t), \hat{H}] && (1.107) \\
&= \hat{U}^\dagger(t)\, i\hbar\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{P}_a}\hat{U}(t) && (1.108) \\
&= i\hbar\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{P}_a}\right)(t) && (1.109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}\hat{P}_a(t) &= [\hat{P}_a(t), \hat{H}] && (1.110) \\
&= -\hat{U}^\dagger(t)\, i\hbar\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{Q}_a}\hat{U}(t) && (1.111) \\
&= -i\hbar\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{Q}_a}\right)(t) && (1.112)
\end{aligned}$$

e pure:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\hat{Q}_a(t)\rangle &= \langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{P}_a}\rangle && (1.113) \\
\frac{d}{dt}\langle\hat{P}_a(t)\rangle &= -\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{Q}_a}\rangle && (1.114)
\end{aligned}$$

Quindi la posizione di una regola di commutazione fra operatori scelti come fondamentali permette di scrivere le equazioni di evoluzione temporale à la Heisenberg delle osservabili fondamentali rispetto ad una derivata di un operatore hamiltoniano, estendendo l'analogia con le equazioni della meccanica classica. Nel parallelismo finora delineato fra la scrittura dell'evoluzione temporale degli osservabili classici e quantistici è importante sottolineare quale sia l'analogo del concetto di trasformazione canonica. Ad esempio, se $\hat{U}$ è un operatore unitario:

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}_a(t), \hat{P}_b(t)] &= [\hat{U}^\dagger(t)\,\hat{Q}_a\hat{U}(t), \hat{U}^\dagger(t)\,\hat{P}_b\hat{U}(t)] \\
&= \hat{U}^\dagger(t)\,[\hat{Q}_a\hat{P}_b]\hat{U}(t) \\
&= i\hbar\delta_{ab}\mathbf{1}
\end{aligned}$$

e in generale, se $\hat{S}$ è un operatore invertibile:

$$\hat{Q}_a^{(s)} \equiv \hat{S}^{-1}\hat{Q}_a\hat{S}$$

e

$$[\hat{Q}_a^{(s)}, \hat{P}_b^{(s)}] = [\hat{Q}_a, \hat{P}_b]$$

Ciò induce naturalmente a considerare queste trasformazioni come quelle che lasciano invariata il valore del commutatore delle variabili canoniche e quindi la forma delle equazioni del moto.

Capitolo 2

Una digressione

2.1 Sulla nozione di sottospazio lagrangiano

In questa breve digressione si introdurrà la nozione di sottospazio lagrangiano, in seguito utilizzata per l'analisi del concetto di sistema di Weyl [13] [1].

Se (S, ω) è uno spazio vettoriale simplettico di dimensioni pari, con $dim\ S = \mu = 2n$, allora si definisce, per un sottospazio $F \subset S$, il complemento ortosimplettico $F^{\perp(\omega)}$:

$$F^{\perp(\omega)} = \{v \in S\ :\ \omega\left(v, v'\right) = 0\ \forall\, v' \in\ F\}$$

In generale, il fatto che ω sia una matrice antisimmetrica implica che l'intersezione fra un sottospazio e il suo complemento ortosimplettico sia non vuota:

$$F \cap F^{\perp(\omega)} \neq \emptyset$$

Un sottospazio F si dice isotropo rispetto a ω se $F \subset F^{\perp(\omega)}$, ovvero se

$$\omega\left(v, v'\right) = 0\ \forall\, v, v'\ \in\ F$$

Un sottospazio F si dice lagrangiano se:

$$F = F^{\perp(\omega)} \tag{2.1}$$

È possibile dimostrare che F è un sottospazio lagrangiano se e solo se F è isotropo e $dim\, F = dim\, F^{\perp(\omega)} = n$. Inoltre si può dimostrare pure che, se F è lagrangiano, allora anche il complemento di F rispetto alla nozione di somma diretta, $\tilde{F}$, è lagrangiano, e si ha $S = F \oplus \tilde{F}$.

2.2 Sulla definizione di trasformata di Fourier simplettica

In questa digressione si introdurrà la nozione di trasformata di Fourier simplettica, che è di centrale importanza nello studio del formalismo à la Weyl, analizzato nel successivo capitolo.

Come è noto, se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ si definisce trasformata di Fourier di f la funzione:

$$\check{f}(\lambda) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\lambda x}$$

e si può provare che, qualora per f valga la condizione del Dini[1] allora vale la relazione di antitrasformazione:

$$f(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \check{f}(\lambda) e^{i\lambda x}$$

Il teorema di Plancherel chiarisce come si possa estendere il significato di trasformata di Fourier alle funzioni in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$, in quanto non tutte le funzioni a quadrato sommabile sono anche assolutamente integrabili, e definire così un operatore unitario nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$: esso viene solitamente indicato come:

$$\left(\check{F}f\right)(\lambda) = \check{f}(\lambda) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\lambda x} \tag{2.2}$$

$$f(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \check{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \tag{2.3}$$

Questa espressione indica chiaramente ciò che viene di solito riassunto dicendo che λ e x sono variabili coniugate: in un'ottica più strettamente geometrica, si può dire che la trasformata di Fourier è definita da una rappresentazione unitaria del gruppo $(\mathbb{R}, +)$. Il fattore di fase nell'espressione $e^{i\lambda x}$ si può infatti leggere come l'immagine di x attraverso il funzionale lineare λ: questo comporta che si può interpretare $\check{f}$ come una funzione definita sullo spazio duale a $\mathbb{R}$, per cui, invero, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$.

Queste considerazioni possono naturalmente estendersi a funzioni definite su un generico $\mathbb{R}^n$: per essere aderenti a quanto sarà maggiormente utilizzato si continuerà questa analisi nell'insieme delle funzioni definite in $\mathbb{R}^2$. Se $f \in \mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, dxdy\right)$ si ha:

$$\check{f}(\eta, \xi) = \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} f(q, p) e^{-i(q\eta + p\xi)} \tag{2.4}$$

$$f(q, p) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi}} \check{f}(\eta, \xi) e^{i(q\eta + p\xi)} \tag{2.5}$$

Proprio come si vede in questo caso specifico, si ha che ora si può considerare η come variabile coniugata a q e ξ coniugata a p: inoltre anche il

[1] f soddisfa la condizione del Dini se, per ogni punto x, esiste un intervallo $(-\delta, \delta)$ per cui è finito l'integrale:

$$\int_{-\delta}^{\delta} du \left| \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \right|$$

fattore di fase $e^{i(q\eta+p\xi)}$ si può leggere come una rappresentazione unitaria del gruppo $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$. Ma l'interpretazione più ricca di significati è quella di considerare l'elemento $(q\eta+p\xi)$ come il prodotto scalare, rispetto alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$, fra i vettori di componenti (q,p) e (η,ξ).

In questa prospettiva, se si considera $\mathbb{R}^2$ come uno spazio vettoriale simplettico, per ora rispetto alla struttura simplettica nella forma canonica rappresentata da $\omega_D = dq\wedge dp$, si definisce trasformata di Fourier simplettica della funzione f la funzione:

$$\left(\check{F}_s(f)\right)(\eta,\xi) = \check{f}_s(\eta,\xi) = \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}}\, f(q,p)\, e^{-i\omega_D[(q,p);(\xi,\eta)]} \tag{2.6}$$

dove $\omega_D[(q,p);(\xi,\eta)]$ indica l'immagine di ω_D sui vettori di componenti (q,p), (ξ,η). In questa definizione, come si vede, il ruolo della forma associata alla struttura metrica viene svolto dalla forma associata alla struttura simplettica. Ciò comporta che ora:

$$\check{f}_s(\eta,\xi) = \check{f}(\eta,-\xi) \tag{2.7}$$

e che quindi la possibilità di invertire questa relazione esiste, ed è data da:

$$f(q,p) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi}}\, \check{f}_s(\eta,\xi)\, e^{-i\omega_D[(\xi,\eta);(q,p)]} \tag{2.8}$$

Quanto detto ha un'interpretazione geometrica molto puntuale. In uno spazio vettoriale V una struttura metrica g è rappresentata da una 2-forma simmetrica non degenere, e il prodotto scalare fra due vettori dall'immagine di g su di essi. In componenti, rispetto ad un sistema di coordinate:

$$\vec{a}\cdot\vec{u} = a^k g_{ks} u^s$$

Questa scrittura evidenzia che il prodotto scalare si può leggere pure come l'immagine del vettore $\vec{a}$ attraverso il funzionale lineare, cioè elemento di V^*, di componenti $g_{ks}u^s$. In altri termini, il prodotto scalare si può vedere come l'azione di V^* su V definita da g: in tal senso la trasformata di Fourier viene definita da una rappresentazione unitaria di questa azione. Come risulta evidente, nella trasformata di Fourier simplettica il ruolo della struttura metrica viene svolto dalla struttura simplettica: questo comporta che, se $V = F \oplus \tilde{F}$, con F e $\tilde{F}$ sottospazi lagrangiani, allora si ha che, identificando V con V^*, le coordinate in F sono coniugate, nel significato illustrato, a quelle in $\tilde{F}$. Questa condizione viene di solito riassunta dicendo che la trasformata di Fourier simplettica manda un sottospazio lagrangiano nel suo complemento.

Il significato precipuo di questa definizione si coglie estendendo questa analisi al caso in cui si consideri una generica struttura simplettica, costante, su $\mathbb{R}^2$. Se ω è la matrice che la rappresenta, allora esiste sempre una trasformazione $T \in \mathcal{A}ut\left(\mathbb{R}^2\right)$ per cui:

$$\omega = T^t \omega_D T$$

Se $J = det\, T$, si definisce trasformata di Fourier simplettica:

$$\check{f}_{s_T}(\eta, \xi) = \int dq \int dp \frac{J}{2\pi} f(q, p)\, e^{-i\omega[(q,p);(\xi,\eta)]} \tag{2.9}$$

Attraverso una trasformazione di coordinate:

$$T : (q, p) \mapsto (x, k)$$

si ha:

$$\check{f}_{s_T}(\eta, \xi) = \int dx \int dk \frac{1}{2\pi} \left(f \circ T^{-1}\right)(x, k)\, e^{-i\omega_D[(x,k);T(\xi,\eta)]}$$

e perciò si vede che:

$$\check{f}_{s_T}(\eta, \xi) = \left(f \circ \check{T}^{-1}\right)_s (T(\eta, \xi)) \tag{2.10}$$

Questa relazione permette di chiarire che anche questa trasformata si può invertire. Infatti si ha:

$$f(q, p) = \int d\xi \int d\eta \frac{J}{2\pi} e^{-i\omega[(\xi,\eta);(q,p)]} \check{f}_{s_T}(\eta, \xi) \tag{2.11}$$

Per provare questa relazione è sufficiente considerare ancora il cambiamento di coordinate:

$$T : (\xi, \eta) \mapsto (\alpha, \beta)$$

per cui si ha che l'integrale al membro destro assume la forma:

$$f(q, p) = \int d\alpha \int d\beta e^{-i\omega_D[(\alpha,\beta);T(q,p)]} \check{f}_{s_T}\left(T^{-1}(\beta, \alpha)\right)$$

Secondo la (2.10) si vede che esso è uguale a:

$$= \int d\alpha \int d\beta e^{-i\omega_D[(\alpha,\beta);T(q,p)]} \left(f \circ \check{T}^{-1}\right)_s (\beta, \alpha)$$

Ma questa è proprio, per la (2.8):

$$= \left(f \circ T^{-1}\right)(T(q, p)) = f(q, p)$$

L'ultima questione è legata allo studio del ruolo della trasformazione T. Come è evidente, essa non è univocamente determinata, fissata ω: più precisamente, essa è definita a meno di una trasformazione simplettica lineare. Però una volta definita la trasformata di Fourier simplettica rispetto alla forma simplettica canonica si è utilizzata, per definirla rispetto a strutture simplettiche costanti ma non canoniche, proprio una trasformazione T che la renda in forma normale.

Cosa accade se si compone T con una generica trasformazione simplettica lineare, cioè si considera la possibilità di definire:

$$\check{f}_{s_T}(\eta,\xi) = \left(f \circ (U \check{\circ} T)^{-1}\right)_s (U \circ T(\eta,\xi)) \tag{2.12}$$

in cui $U \in Sp\left(\mathbb{R}^2\right)$?

Se si valuta esplicitamente si vede che:

$$\begin{aligned}\left(f \circ (U \check{\circ} T)^{-1}\right)_s (U \circ T(\eta,\xi)) &= \\ \frac{1}{2\pi}\int dq \int dp \left(f \circ T^{-1} \circ U^{-1}\right)(q,p) &\cdot \quad e^{-i\omega_D[(q,p);U\circ T(\xi,\eta)]}\end{aligned}$$

Definendo una trasformazione nelle variabili di integrazione proprio attraverso l'applicazione U:

$$(q,p) = U(x,k)$$

si ha, poichè $det\, U = 1$, che l'espressione diviene:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi}\int dx \int dk \left(f \circ T^{-1}\right)(x,k)\, e^{-i\omega_D[U(x,k);U\circ T(\xi,\eta)]} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int dx \int dx \left(f \circ T^{-1}\right)(x,k)\, e^{-i\omega_D[(x,k);T(\xi,\eta)]}\end{aligned}$$

in quanto:

$$\omega_D[U(x,k); U\circ T(\xi,\eta)] = \omega_D[(x,k); T(\xi,\eta)]$$

poichè U è simplettica. In conclusione si vede che:

$$\left(f \circ (U \check{\circ} T)^{-1}\right)_s (U \circ T(\eta,\xi)) = \left(f \circ \check{T}^{-1}\right)_s (T(\eta,\xi)) \tag{2.13}$$

e questo chiarisce che la definizione posta non dipende da una specifica T, ma solo dalla matrice che rappresenta ω.

osservazione. *A questo risultato si può dare anche un'interpretazione geometrica più stringente: ciò che si è visto è che, se $\phi \in Sp\left(\mathbb{R}^2\right)$, allora:*

$$\left(\check{F}_s\left(f \circ \phi^{-1}\right)\right) \circ \phi = \check{F}_s f$$

Ma secondo la definizione di push-forward indotto dalla trasformazione ϕ nell'insieme $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$ si ha:

$$\phi_* f = f \circ \phi^{-1}$$

e perciò la relazione si esprime come:

$$\check{F}_s(\phi_* f) = \phi_*\left(\check{F}_s f\right) \tag{2.14}$$

Capitolo 3

Sul formalismo à la Weyl-Wigner

3.1 Un'introduzione all'interpretazione della meccanica classica come limite della meccanica quantistica

Nella seconda parte del capitolo precedente si sono tracciati i caratteri distintivi del formalismo quantistico. In particolare, si è sottolineato come sia stato costruito, per quanto fosse possibile, al fine di rendere esplicita la più ampia analogia con quello classico. Ma qual è il significato di questa analogia?

Come è già stato sottolineato, la meccanica quantistica è stata introdotta come soluzione al fallimento dei tentativi di ottenere stime teoriche, per le misure delle grandezze osservabili, attraverso una modellizzazione classica per sistemi fisici delle dimensioni atomiche e molecolari. È altrettanto chiaro che la meccanica classica fornisce una buonissima descrizione per la dinamica di sistemi, rispetto a questi ultimi, macroscopici: basti pensare, e la generalizzazione relativistica non ne sminuisce affatto il significato, allo studio dei problemi di dinamica celeste.

Il ruolo di unità di misura rispetto al quale confrontare un particolare sistema al fine di attribuirgli una natura macroscopica o microscopica, e quindi studiarlo attraverso criteri classici o quantistici, è interpretato dalla costante di Planck, $\hbar$: è il valore finito di questa a creare, definitivamente, un mondo quantistico. Ma, allora, diviene naturale assumere che la meccanica classica si possa leggere come un caso limite di quella quantistica, e che il significato di questo limite è proprio ricondotto al peso che ha, in ogni caso specifico, il valore di $\hbar$.

In quest'ottica, il valore dell'analogia introdotta risiede nel tentativo di sviluppare un formalismo quantistico che si riduca a quello classico, come usualmente si dice, nel limite per $\hbar \to 0$, cioè nella direzione in cui il peso di $\hbar$ diviene sempre più trascurabile.

Questi argomenti permettono di leggere, ad esempio, più compiutamente il significato della definizione, nell'insieme delle osservabili quantistiche associato alla dinamica di una particella, di operatori canonici come quelli che soddisfano una peculiare regola di commutazione. Limite classico può essere infatti interpretato in modo esplicito: per esso l'algebra delle osservabili di questo sistema diviene commutativa, riacquistando quindi una delle caratteristiche specifiche della formalizzazione classica.

In questa prospettiva, inoltre, acquista un significato effettivo il tema della quantizzazione di un sistema dinamico classico. Qual è il modo di formalizzare le osservabili di uno specifico sistema quantistico? Come associare ad un osservabile un operatore autoaggiunto, il cui spettro rappresenti l'insieme dei risultati delle misure?

Esistono dei sistemi caratterizzati da osservabili che non hanno controparte classica: si pensi ad esempio allo spin delle particelle, che non è riconducibile ad una dinamica classica di punto materiale. Invero, per le osservabili quantistiche pure classicamente realizzabili, si è ipotizzato un principio di corrispondenza. Si definiscono degli operatori canonici attraverso regole di commutazione mutuate dalla struttura di Poisson sullo spazio in cui è formalizzata la dinamica classica, e si assume che ogni osservabile sia funzione di questi operatori, col vincolo che, nel limite classico in cui l'algebra a cui appartengono diviene commutativa, questa funzione si riduce alla funzione che classicamente formalizza l'osservabile corrispondente. È evidente quanto questa procedura sia ambigua: per provare ad analizzare sia il problema della quantizzazione di un sistema classico, che quello del limite classico di un sistema quantistico, si sviluppa ciò che è stato indicato come formalismo à la Weyl-Wigner.

Per iniziare ad esaminare il tema della quantizzazione di un sistema dinamico classico la prima parte di questo capitolo è dedicata all'introduzione della nozione di sistema di Weyl. Come è noto, uno dei principali problemi delle usuali procedure di quantizzazione, legate alla definizione di operatori che soddisfano a regole di commutazione canoniche, è rappresentato dal fatto che essi non sono limitati. Un sistema di Weyl è un'applicazione che associa ad un vettore in uno spazio lineare un operatore unitario, quindi limitato: il dettaglio dell'analisi permette di chiarire che un sistema di Weyl è legato alla struttura simplettica definita sullo spazio vettoriale. Grazie a ciò è possibile leggere gli operatori che rappresentano le osservabili canoniche, solitamente posizione ed impulso per un sistema di particelle, come generatori di opportuni gruppi ad un parametro di operatori unitari, ed ottenere così una caratterizzazione delle regole di commutazione a cui sono soggetti senza introdurre le difficoltà dovute ad una eventuale non limitatezza.

L'analisi prosegue con lo studio della natura di questa rappresentazione per trasformazioni indotte attraverso trasformazioni definite sullo spazio vettoriale simplettico in esame. Questo è un tema molto interessante. Infatti, qualora per un sistema dinamico classico lo spazio degli stati sia descritto da uno spazio vettoriale, l'evoluzione temporale si può leggere come un gruppo di trasformazioni canoniche su di esso, secondo quanto sviluppato nel capitolo precedente. Ciò che viene analizzato in dettaglio è il modo attraverso il quale queste trasformazioni, nel caso specifico in cui siano lineari, possano essere rappresentate, attraverso le proprietà di un sistema di Weyl, in ambito quantistico. In questo modo è possibile definire una procedura di quantizzazione per sistemi dinamici classici lineari.

L'analisi diviene poi del tutto originale nell'estensione ai casi di sistemi dinamici classici lineari hamiltoniani rispetto a strutture simplettiche costanti, arbitrarie. In dettaglio, si è delineata una procedura di quantizzazione per la dinamica di una particella carica in un campo magnetico costante. Ciò che è peculiare di questa procedura è che essa non fa riferimento alla solita prescrizione dell'accoppiamento minimale, che introduce nella quantizzazione in modo esplicito il potenziale vettore del campo magnetico, e quindi un'ambiguità dovuta alla simmetria dettata dall'invarianza di gauge. Invero questa ambiguità viene riscoperta attraverso lo studio dei problemi di equivarianza insiti nella definizione di sistema di Weyl.

La seconda parte di questo capitolo è dedicata allo studio della nozione di mappa di Weyl e di Wigner, che rivestono un ruolo di centrale importanza in questo lavoro.

La mappa di Weyl è un'applicazione che associa, ad un elemento dell'algebra classica delle funzioni definite su uno spazio vettoriale, un operatore in uno spazio di Hilbert. Le sue proprietà fanno sì che essa possa essere letta come un tentativo di quantizzazione. In particolare questa mappa è in grado di formalizzare compiutamente, attraverso l'introduzione di un opportuno fattore, detto peso, un altro dei gravi problemi presentato dalle solite procedure di quantizzazione, quello del, cosiddetto, ordinamento.

Esso è infatti un'altra conseguenza della differenza fra la commutatività dell'algebra delle osservabili classiche e la non commutatività dell'algebra delle osservabili quantistiche. Giusto come chiarimento: all'osservabile classico rappresentato dalla funzione $f = q^2p^2$ quale operatore quantistico corrisponde? Forse $\hat{P}\hat{Q}^2\hat{P}$? Oppure $\frac{1}{2}\left(\hat{Q}^2\hat{P}^2 + \hat{P}^2\hat{Q}^2\right)$? Quello che si mostra è che la mappa di Weyl definisce un formalismo in grado di affrontare in modo corretto questo problema.

Lo studio della mappa di Wigner, inversa della mappa di Weyl, permette di definire, nell'insieme delle funzioni che rappresentano le osservabili di un sistema classico, una nuova struttura di prodotto, già detto prodotto star, o di Moyal. Esso è non commutativo, e ciò permette di definire una formulazione delle equazioni della dinamica quantistica in termini di equazioni nell'insieme delle funzioni rispetto a questo nuovo prodotto. Ciò che è assolutamente interessante è che questo prodotto dipende esplicitamente da $\hbar$, e si riduce, nel limite in cui $\hbar \to 0$, al prodotto usuale. In questo senso è considerato una deformazione di quello usuale. In queste sezioni, allora è analizzato in quali significati questa proprietà permetta di costruire un formalismo per la dinamica quantistica in cui sia esplicitamente riconoscibile il tema del limite classico. Per cercare di definire correttamente i termini di questo problema, il capitolo si chiude con un'analisi delle proprietà di trasformazione di questa mappa rispetto a trasformazioni nello spazio vettoriale su cui sono definite, e di possibili nozioni di equivalenza fra differenti prodotti deformati.

3.2 Sulla definizione di sistema di Weyl

Come si è visto, la possibilità di formulare le equazioni che descrivono l'evoluzione delle osservabili quantistiche, lette come variabili dinamiche nella rappresentazione di Heisenberg, e dei valori medi, in modo molto somigliante a quelle che descrivono l'evoluzione delle osservabili classiche, si fonda sulla definizione delle regole di commutazione canoniche.

Un'analisi più attenta rivela che una relazione del tipo:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar \mathbf{1} \tag{3.1}$$

deve essere letta con stretto rigore, oppure conduce rapidamente a delle incongruenze: il teorema di Wintner prova che se due operatori autoaggiunti soddisfano questa regola di commutazione allora almeno uno di essi è non limitato. Dalla definizione di commutatore e dalla (3.1) si ha che:

$$[\hat{Q}^n, \hat{P}] = i\hbar n \hat{Q}^{n-1}$$

e quindi, se entrambi gli operatori fossero limitati, da questa relazione si avrebbe, considerando la norma:

$$\| \hat{Q}^n \hat{P} - \hat{P}\hat{Q}^n \| = \hbar n \| \hat{Q}^{n-1} \|$$

Dalla disuguaglianza triangolare si ha:

$$\| \hat{Q}^n \hat{P} - \hat{P}\hat{Q}^n \| = \| \hat{Q}^n \hat{P} + \left(-\hat{P}\hat{Q}^n\right) \| \leq \| \hat{Q}^n \hat{P} \| + \| \hat{P}\hat{Q}^n \| \leq 2 \| \hat{Q} \|^n \| \hat{P} \|$$

Quindi:

$$\hbar n \| \hat{Q}^{n-1} \| \leq 2 \| \hat{P} \| \| \hat{Q}^n \| \leq 2 \| \hat{P} \| \| \hat{Q} \| \| \hat{Q}^{n-1} \|$$

da cui, per $n \in \mathbb{N}$ si avrebbe:

$$\| \hat{Q} \| \| \hat{P} \| \geq \frac{n\hbar}{2}$$

Ciò è assurdo: perciò almeno uno di essi è non limitato. Questo significa che il membro di sinistra della relazione (3.1) non ha come dominio di definizione l'intero spazio di Hilbert, mentre il membro di destra sì, essendo multiplo dell'operatore identità. Questo chiarisce esplicitamente che un'uguaglianza in cui è presente un commutatore vale solo sul sottoinsieme di $\mathcal{H}$ su cui esso è definito.

Per evitare che il formalismo quantistico fosse basato sulla nozione di operatori non limitati, Weyl [22] propose di considerare un'applicazione da uno spazio vettoriale reale, in cui sia definita una struttura simplettica costante ω, (cioè propriamente invariante per traslazioni) all'insieme degli operatori unitari su un'opportuno spazio di Hilbert.

$$W \ : S \ \mapsto \ \mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right) \tag{3.2}$$

con

- W continua in senso forte[1]
- se $z \in S$
$$\hat{W}\left(z + z'\right) = \hat{W}\left(z\right) \hat{W}\left(z'\right) e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega(z,z')} \tag{3.3}$$

da cui:
$$\hat{W}\left(z\right) \hat{W}\left(z'\right) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega(z,z')} \hat{W}\left(z'\right) \hat{W}\left(z\right) \tag{3.4}$$

Come si vede, questa applicazione, detta sistema di Weyl, è una rappresentazione unitaria proiettiva dello spazio vettoriale S, in cui i fattori di fase di essa sono legati alla struttura simplettica, sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$[2] . Se si considera $S = \mathbb{R}^2$, con coordinate in cui $z = (q,p)$ e $\omega = dq \wedge dp$, queste definizioni si riducono a:

$$\hat{W}\left((q,p) + \left(q',p'\right)\right) = \hat{W}\left(q,p\right) \hat{W}\left(q',p'\right) e^{-\frac{i}{2\hbar}(qp'-q'p)} \tag{3.5}$$

ovvero:
$$\hat{W}\left(q,p\right) \hat{W}\left(q',p'\right) = e^{\frac{i}{\hbar}(qp'-q'p)} \hat{W}\left(q',p'\right) \hat{W}\left(q,p\right) \tag{3.6}$$

[1] Nell'insieme degli operatori su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, si dice che una successione di operatori T_n converge in senso forte a T se $\lim_{n\to\infty} \parallel T_n\phi - T\phi \parallel = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{H}$. Ciò significa che, nella definizione di W, la richiesta di continuità forte corrisponde a che :

$$\lim_{z\to z_0} \parallel W\left(z\right) - W\left(z_0\right) \parallel = 0$$

qualora $z \to z_0$ nello spazio vettoriale S.

[2] A rigore, un sistema di Weyl è una rappresentazione unitaria proiettiva dell'azione del gruppo delle traslazioni, identificato da uno spazio vettoriale S, su una varietà. Nell'analisi che segue si considererà come varietà proprio lo spazio vettoriale S, e ciò permetterà, a prezzo di un piccolo abuso, di asserire che un sistema di Weyl è una rappresentazione unitaria proiettiva di uno spazio vettoriale. Questa distinzione è però importante, perchè, nel capitolo di conclusioni, si svilupperà proprio il tema dell'azione di un gruppo delle traslazioni su uno spazio vettoriale S, senza che sia possibile identificare il gruppo delle traslazioni con lo spazio S.

Grazie alla nozione di sottospazio lagrangiano se ne può dare un'ulteriore caratterizzazione. Se:

$$S = S_1 \oplus S_2 \quad \text{con } \omega/S_1 = 0 \ ; \omega/S_2 = 0$$

per cui ogni vettore z si può decomporre in modo univoco:

$$z = z_1 \oplus z_2 \ \text{ e } \ z' = z_1' \oplus z_2'$$

allora, dalla definizione:

$$\hat{W}\left(z + z'\right) = \hat{W}\left(z\right) \hat{W}\left(z'\right) e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega(z,z')} \tag{3.7}$$

si considerano $\hat{U}$ e $\hat{V}$ le restrizioni di $\hat{W}$ ai due sottospazi:

$$\begin{aligned} \hat{U} : S_1 &\mapsto \mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right) \\ \hat{U} &\equiv \hat{W}/S_1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

e pure:

$$\begin{aligned} \hat{V} : S_2 &\mapsto \mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right) \\ \hat{V} &\equiv \hat{W}/S_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Siccome ω si annulla su ogni sottospazio lagrangiano si ha che:

$$\hat{U}\left(z_1 + z_1'\right) = \hat{U}\left(z_1\right) \hat{U}\left(z_1'\right) \tag{3.10}$$

$$\hat{V}\left(z_2 + z_2'\right) = \hat{V}\left(z_2\right) \hat{V}\left(z_2'\right) \tag{3.11}$$

mentre:

$$\hat{U}\left(z_1\right) \hat{V}\left(z_2\right) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega(z_1,z_2)} \hat{V}\left(z_2\right) \hat{U}\left(z_1\right) \tag{3.12}$$

Quindi un sistema di Weyl ristretto ad ognuno dei due sottospazi lagrangiani su cui è definito, costituisce una rappresentazione unitaria, fedele, abeliana, di essi.

Viceversa, se si definiscono $\hat{U}$ e $\hat{V}$ due rappresentazioni unitarie, abeliane, fedeli, continue in senso forte, di due sottospazi lagrangiani di uno spazio vettoriale simplettico, con la proprietà:

$$\hat{U}\left(z_1\right) \hat{V}\left(z_2\right) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega(z_1,z_2)} \hat{V}\left(z_2\right) \hat{U}\left(z_1\right)$$

e si definisce ancora:

$$\hat{W}\left(z\right) \equiv e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega(z_1,z_2)} \hat{U}\left(z_1\right) \hat{V}\left(z_2\right) \tag{3.13}$$

allora si prova che $\hat{W}\left(z\right)$ è un sistema di Weyl.[3]

[3] La dimostrazione è in appendice.

In dettaglio, su un sottospazio unidimensionale, se α e β sono scalari reali e $z \in S$ si ha:

$$\hat{W}(\alpha z)\,\hat{W}(\beta z) = \hat{W}((\alpha+\beta)\,z) \tag{3.14}$$

perciò $\hat{W}(\alpha z)$ è un gruppo ad un parametro, rispetto ad α, di operatori unitari, continuo in senso forte: il teorema di Stone allora permette di considerarlo come l'esponenziale di un operatore autoaggiunto, qui indicato con $\hat{G}(z)$ per specificare che dipende dal vettore che si usa come base di questo sottospazio:

$$\hat{W}(\alpha z) = e^{i\alpha\hat{G}(z)/\hbar} \tag{3.15}$$

Inoltre:

$$\hat{W}(\alpha\beta z) = e^{i\alpha\hat{G}(\beta z)/\hbar} \tag{3.16}$$

e se $\alpha = 1$ questa relazione diviene:

$$\hat{W}(\beta z) = e^{i\hat{G}(\beta z)/\hbar} \tag{3.17}$$

(qui è cruciale che, in uno spazio vettoriale, $(\alpha\beta)\,z = \alpha\,(\beta z)$). Ma si ha pure:

$$\hat{W}(\beta z) = e^{i\beta\hat{G}(z)} \tag{3.18}$$

e quindi un confronto indica che, a meno di aggiungere ad essi operatori del tipo $2\pi\hbar n\mathbf{1}$, con n intero:

$$\hat{G}(\beta z) = \beta\hat{G}(z) \tag{3.19}$$

Questi generatori hanno delle importanti proprietà. Dalla relazione:

$$\hat{W}(\alpha z)\,\hat{W}(\beta z') = e^{\frac{i}{\hbar}\omega(\alpha z,\beta z')}\hat{W}(\beta z')\,\hat{W}(\alpha z) \tag{3.20}$$

si ha che:

$$e^{i\alpha\hat{G}(z)/\hbar}e^{i\beta\hat{G}(z')/\hbar} = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\beta\omega(z,z')}e^{i\beta\hat{G}(z')/\hbar}e^{i\alpha\hat{G}(z)/\hbar} \tag{3.21}$$

Questo chiarisce che, nell'approccio alla Weyl, ad ogni sottospazio monodimensionale di uno spazio vettoriale simplettico corrisponde un gruppo a un parametro di operatori unitari, perciò non soggetti a problemi di illimitatezza. Questa relazione si può leggere come la versione globale, in termini di operatori limitati, delle regole di commutazione che soddisfano i generatori infinitesimi, che sono operatori autoaggiunti eventualmente non limitati. Infatti, se si considerano α e β infinitesimi si ha:

$$\begin{aligned}&[\mathbf{1} + i\alpha\hat{G}(z)/\hbar + o\left(\alpha^2\right)] \cdot [\mathbf{1} + i\beta\hat{G}(z')/\hbar + o\left(\beta^2\right)] = \\ &\left(1 + i\omega(z,z')\,\alpha\beta/\hbar + o\left((\alpha\beta)^2\right)\right) [\mathbf{1} + i\beta\hat{G}(z')/\hbar + o\left(\beta^2\right)]\cdot[\mathbf{1} + i\alpha\hat{G}(z)/\hbar + o\left(\alpha^2\right)]\end{aligned}$$

e uguagliando i termini di ordine uguale in α e β:

$$[\hat{G}(z),\hat{G}(z')] = -i\hbar\omega(z,z')\,\mathbf{1} \tag{3.22}$$

3.2.1 Sulla rappresentazione à la Von Neumann

Nell'esempio di $S=\mathbb{R}^2$, sempre rispetto alla struttura simplettica canonica in un sistema di coordinate alla Darboux, con $\omega = dq\wedge dp$ si considera:

$$\begin{aligned}(q,p) &= (q,0)\oplus(0,p)\\ &= q\,(1,0)\oplus p\,(0,1)\end{aligned}$$

e questa decomposizione è univoca una volta scelti i due sottospazi lagrangiani in $\mathbb{R}^2$:

$$(q,p) = (q,0)\oplus(0,p)$$

Perciò:

$$\hat{W}(q,p) = \hat{W}((q,0)+(0,p)) = \hat{W}(q,0)\cdot\hat{W}(0,p)\,e^{-\frac{i}{2\hbar}qp} \tag{3.23}$$

e

$$\hat{W}(q+q',0) = \hat{W}(q,0)\,\hat{W}(q',0) \tag{3.24}$$

$$\hat{W}(0,p+p') = \hat{W}(0,p)\,\hat{W}(0,p') \tag{3.25}$$

e quindi si definisce:

$$\hat{W}(q,0) = e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} \tag{3.26}$$

$$\hat{W}(0,p) = e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}} \tag{3.27}$$

(ovvero si è identificato, secondo le notazioni già introdotte: $\hat{G}(0,1)=\hat{Q}$ e $\hat{G}(1,0)=\hat{P}$). Attraverso la formula di Baker-Hausdorff[4] da queste posizioni si ha che:

$$\hat{W}(q,p) = e^{i\left(q\hat{P}+p\hat{Q}\right)/\hbar} \tag{3.28}$$

Questa scrittura è però ancora formale: non si è data una realizzazione esplicita di questi operatori, ma se ne sono solo analizzate delle proprietà. La soluzione esplicita che viene presentata è detta rappresentazione à la Von Neumann. Si considera come spazio di Hilbert quello delle funzioni a quadrato sommabile sulla retta, secondo la misura di Lebesgue invariante per traslazioni, $\mathcal{H}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R},dx)$ e si definiscono:

$$\left(\hat{U}(q)\,\psi\right)(x) = \psi(x+q) \tag{3.29}$$

$$\left(\hat{V}(p)\,\psi\right)(x) = e^{ipx/\hbar}\psi(x) \tag{3.30}$$

[4] In un'algebra associativa, non commutativa, con $e^a=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$ e $[a,b]=ab-ba$, se $[a,[a,b]]=0$ e $[b,[a,b]]=0$ allora si ha:

$$e^{a+b} = e^a e^b e^{-[a,b]/2}$$

Come è provato in appendice, $\hat{U}(q)$ e $\hat{V}(p)$ sono due gruppi a un parametro di operatori unitari per i quali:

$$\left(\hat{U}(q)\,\hat{V}(p)\,\psi\right)(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega((q,0);(0,p))}\left(\hat{V}(p)\,\hat{U}(q)\,\psi\right)(x) \tag{3.31}$$

in cui $\omega((q,0);(0,p))$ indica per esteso l'immagine attraverso la 2-forma simplettica dei vettori di componenti $(q,0)$ e $(0,p)$. Perciò:

$$\hat{W}(q,p) = \hat{U}(q)\,\hat{V}(p)\,e^{-iqp/2\hbar} \tag{3.32}$$

definisce un sistema di Weyl.

Se si pone:

$$\hat{U}(q) = e^{iq\hat{P}/\hbar} \tag{3.33}$$

$$\hat{V}(p) = e^{ip\hat{Q}/\hbar} \tag{3.34}$$

allora l'espressione ha ora un significato rigoroso[5] :

$$\hat{W}(q,p) = e^{i\left(q\hat{P}+p\hat{Q}\right)/\hbar}$$

$$\left(\hat{W}(q,p)\,\psi\right)(x) = e^{-\frac{i}{2\hbar}qp}e^{\frac{i}{\hbar}p(x+q)}\psi(x) \tag{3.35}$$

Restringendo opportunamente i domini e considerando p e q infinitesimi, si ha :

$$\left(\hat{P}\psi\right)(x) = -i\hbar\frac{d\psi}{dx} \tag{3.36}$$

$$\left(\hat{Q}\psi\right)(x) = x\psi(x) \tag{3.37}$$

che sono le note forme degli operatori che descrivono le osservabili impulso e posizione nella meccanica ondulatoria.

Il risultato fondamentale è noto [21], [11], come teorema di Von Neumann: se $\hat{U}(q)$ e $\hat{V}(p)$ sono gruppi a un parametro, continui in senso forte, di operatori unitari, che definiscono una rappresentazione irriducibile delle regole di commutazione à la Weyl:

$$\hat{U}(q)\,\hat{V}(p) = e^{iqp/\hbar}\hat{V}(p)\,\hat{U}(q)$$

su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, allora esiste una trasformazione isometrica:

$$T : \mathcal{H} \mapsto \left(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)\right)$$

[5]Per convincersi che $\hat{W}(q,p)$ è un operatore unitario basta valutare:

$$\langle\hat{W}(q,p)\,\phi|\hat{W}(q,p)\,\psi\rangle$$

Questa espressione è uguale a:

$$\int dx\,\phi^*(x)\,\psi(x)\,e^{-\frac{i}{2\hbar}qp}e^{\frac{i}{\hbar}p(x+q)}e^{\frac{i}{2\hbar}qp}e^{-\frac{i}{\hbar}p(x+q)} = \int dx\,\phi^*(x)\,\psi(x) = \langle\phi|\psi\rangle$$

in virtù della quale:

$$\left(T\hat{U}\left(q\right)T^{-1}\psi\right)\left(x\right)=\psi\left(x+q\right) \tag{3.38}$$

$$\left(T\hat{V}\left(p\right)T^{-1}\psi\right)\left(x\right)=e^{ixp/\hbar}\psi\left(x\right) \tag{3.39}$$

Questo teorema prova, in altre parole, che ogni soluzione delle regole di commutazione alla Weyl è unitariamente equivalente a quella di Schrödinger, che si considera, perciò, come paradigmatica.

3.2.2 Trasformazioni unitarie associate a trasformazioni simplettiche: una quantizzazione per dinamiche classiche lineari

Nella forma in cui è stato posto, un sistema di Weyl è una rappresentazione proiettiva di uno spazio vettoriale, nella quale i fattori proiettivi dipendono dalla struttura simplettica su esso definita. Sorge così, in modo naturale, il problema di studiare la natura di questa rappresentazione, rispetto a trasformazioni su S, in prima analisi lineari (cioè che conservano la struttura lineare di spazio vettoriale) e simplettiche (ovvero che preservano la forma del tensore ω, qui assunto canonico).

Una trasformazione lineare invertibile su S è simplettica se:

$$\omega\left(Tz,Tz'\right)=\omega\left(z,z'\right)$$

allora, se $T\in Sp\left(S,\omega\right)$, si considera:

$$\hat{W}\left(Tz+Tz'\right)=\hat{W}\left(Tz\right)\hat{W}\left(Tz'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(Tz,Tz'\right)} \tag{3.40}$$

e si ha:

$$\hat{W}\left(T\left(z+z'\right)\right)=\hat{W}\left(Tz\right)\hat{W}\left(Tz'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z,z'\right)} \tag{3.41}$$

Allora si può definire:

$$\hat{W}\left(Tz\right)\equiv\hat{W}_T\left(z\right) \tag{3.42}$$

e si ottiene:

$$\hat{W}_T\left(z+z'\right)=\hat{W}_T\left(z\right)\hat{W}_T\left(z'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z,z'\right)} \tag{3.43}$$

Questo significa che $\hat{W}_T$ è un nuovo sistema di Weyl, in quanto i fattori di fase della rappresentazione sono descritti dalla stessa struttura simplettica, e perciò è unitariamente equivalente a $\hat{W}\left(z\right)$. Quindi a T si associa un automorfismo:

$$\nu_T\ :\mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right)\mapsto\mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right)$$

attraverso:

$$\hat{W}\left(Tz\right)\equiv\nu_T\left(\hat{W}\left(z\right)\right) \tag{3.44}$$

Esso può essere scritto come una coniugazione:

$$\nu_T\left(\hat{W}(z)\right) = \hat{U}_T^{-1}\hat{W}(z)\,\hat{U}_T \tag{3.45}$$

in cui $\hat{U}_T$ è una trasformazione unitaria.

Infatti, è possibile dimostrare che ogni automorfismo per il gruppo degli operatori unitari su uno spazio di Hilbert è realizzabile come coniugazione proprio attraverso un operatore unitario.

Per esemplificare il fatto che questa equivarianza dei sistemi di Weyl rispetto al gruppo lineare simplettico è di notevole interesse, si possono studiare i casi in cui le trasformazioni sono quelle che descrivono l'evoluzione di una dinamica, su $\mathbb{R}^2$, hamiltoniana e lineare. Come primo esempio si considera la dinamica di particella libera: le equazioni del moto sono

$$m\dot{q} = p$$

$$\dot{p} = 0$$

Il campo $X = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}$ è hamiltoniano e una delle hamiltoniane possibili è $H = \frac{p^2}{2m}$. Le orbite passanti per $q(0)$ e $p(0)$, scelto come dato iniziale, sono:

$$q(t) = q(0) + \frac{p(0)}{m}t$$

$$p(t) = p(0)$$

Questo equivale a studiare un gruppo a un parametro di trasformazioni lineari simplettiche. In coordinate, l'azione di questo gruppo su $\mathbb{R}^2$ è dato da:

$$F(t)\cdot\left|\begin{array}{c} q \\ p \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & \frac{t}{m} \\ 0 & 1 \end{array}\right|\left|\begin{array}{c} q \\ p \end{array}\right| \tag{3.46}$$

Dalla definizione si ha che:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{F(t)}(q,p) &= \hat{W}\left(F(t)\cdot(q,p)\right) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}[q(t)\hat{P}+p(t)\hat{Q}]} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}[\left(q+\frac{t}{m}p\right)\hat{P}+p\hat{Q}]} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}[q\hat{P}+p\left(\frac{t}{m}\hat{P}+\hat{Q}\right)]} \end{aligned}$$

e allora si introducono dei generatori trasformati, per cui questa espressione coincide con:

$$\hat{W}_{F(T)}(q,p) = e^{\frac{i}{\hbar}[q\hat{P}_{F(t)}+p\hat{Q}_{F(t)}]} \tag{3.47}$$

ovvero:

$$\hat{P}_{F(t)} \equiv \hat{P} \tag{3.48}$$

e

$$\hat{Q}_{F(t)} = \hat{Q} + \frac{t}{m}\hat{P} \tag{3.49}$$

Dal fatto che questo sistema di Weyl è unitariamente equivalente a quello di partenza, ovvero che le trasformazioni $\hat{W}_{F(t)}$, per valori diversi del parametro, cioè a tempi diversi, sono unitariamente equivalenti, si ha che esistono degli operatori $\hat{F}(t)$ per i quali:

$$e^{iq\hat{P}_{F(t)}/\hbar} \equiv \hat{F}^{\dagger}(t)\, e^{iq\hat{P}/\hbar}\hat{F}(t) \tag{3.50}$$

$$e^{ip\hat{Q}_{F(t)}/\hbar} \equiv \hat{F}^{\dagger}(t)\, e^{ip\hat{Q}/\hbar}\hat{F}(t) \tag{3.51}$$

Le proprietà di composizione delle trasformazioni $F(t)$, che rappresentano l'evoluzione dinamica classica si riflettono in una analoga per gli operatori unitari $\hat{F}(t)$. Si ha infatti che:

$$\hat{F}(t+s) = \hat{F}(t)\cdot\hat{F}(s) = \hat{F}(s)\cdot\hat{F}(t) \tag{3.52}$$

Perciò (ancora una volta grazie al teorema di Stone) esiste un operatore autoaggiunto per cui:

$$\hat{F}(t) = e^{-i\hat{H}_F t/\hbar} \tag{3.53}$$

e le relazioni precedenti divengono:

$$e^{iq\hat{P}_{F(t)}/\hbar} = e^{i\hat{H}_F t/\hbar}e^{iq\hat{P}/\hbar}e^{-i\hat{H}_F t/\hbar} \tag{3.54}$$

$$e^{ip\hat{Q}_{F(t)}/\hbar} = e^{i\hat{H}_F t/\hbar}e^{ip\hat{Q}/\hbar}e^{-i\hat{H}_F t/\hbar} \tag{3.55}$$

In dettaglio:

$$e^{iq\hat{P}/\hbar} = e^{i\hat{H}_F t/\hbar}e^{iq\hat{P}/\hbar}e^{-i\hat{H}_F t/\hbar} \tag{3.56}$$

$$e^{ip\left(\hat{Q}+\frac{t}{m}\hat{P}\right)/\hbar} = e^{i\hat{H}_F t/\hbar}e^{ip\hat{Q}/\hbar}e^{-i\hat{H}_F t/\hbar} \tag{3.57}$$

Dalla prima di queste si ha che:

$$[\hat{P}, \hat{H}_F] = 0 \tag{3.58}$$

mentre dalla seconda, considerando q e t infinitesimi, si ha:

$$[\hat{Q}, \hat{H}_F] = \frac{i\hbar}{m}\hat{P} \tag{3.59}$$

Se si assume che l'operatore $\hat{H}_F$ sia un polinomio in $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ queste relazioni conducono, a meno di un operatore multiplo dell'identità, a:

$$\hat{H}_F = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 \tag{3.60}$$

Infatti si può considerare

$$\hat{H}_F = \alpha\hat{P}^2 + \beta\hat{Q}^2 + \gamma\left(\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}\right)$$

(Si escludono per $\hat{H}_F$ polinomi di grado $n \neq 2$ poichè, come illustrato nel capitolo precedente, il commutatore fra $\hat{Q}$ o $\hat{P}$ ed un simile operatore conduce ad un operatore che è un polinomio di grado $n-1$). In dettaglio:

$$\begin{aligned}[\hat{Q}, \hat{H}_F] &= \alpha[\hat{Q}, \hat{P}^2] + \gamma[\hat{Q}, \hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}] \\ &= 2i\hbar\alpha\hat{P} + 2i\hbar\gamma\hat{Q}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[\hat{P}, \hat{H}_F] &= \beta[\hat{P}, \hat{Q}^2] + \gamma[\hat{P}, \hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}] \\ &= -2i\hbar\beta\hat{Q} - 2i\hbar\gamma\hat{P}\end{aligned}$$

e un confronto dà:

$$\beta = 0 \quad \gamma = 0 \quad \alpha = \frac{1}{2m}$$

Ciò che questa presentazione illustra è che, attraverso il formalismo dei sistemi di Weyl, si ottiene un operatore hermitiano che genera l'evoluzione temporale degli operatori canonici che descrivono l'analogo quantistico di un opportuno sistema classico. Questo porta, in modo naturale, a definire $\hat{H}_F$ come operatore hamiltoniano che formalizza la dinamica quantistica di una particella libera: è degno di nota che questo operatore sia proprio quello che viene assunto in meccanica ondulatoria.

Un discorso analogo si può condurre per le trasformazioni lineari simplettiche che descrivono la dinamica classica di un oscillatore armonico. Il campo vettoriale associato ad essa è:

$$X = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial}{\partial p}$$

Questo ha come hamiltoniana (sempre rispetto alla struttura simplettica nella forma canonica) la funzione:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

e genera un gruppo a un parametro di trasformazioni lineari le cui orbite sono:

$$q\,(t) = q\,(0)\cos\omega t - p\,(0)\,\frac{\sin\omega t}{m\omega} \tag{3.61}$$

$$p\,(t) = p\,(0)\cos\omega t - q\,(0)\,m\omega\sin\omega t \tag{3.62}$$

Allora, se si definiscono, proprio come fatto in precedenza:

$$\hat{W}_{a(t)}\,(q, p) \equiv \hat{W}\,(q\,(t)\,, p\,(t)) \tag{3.63}$$

e pure:

$$\hat{Q}_{a(t)} \equiv (\cos\omega t)\,\hat{Q} + \frac{\sin\omega t}{m\omega}\hat{P} \tag{3.64}$$

$$\hat{P}_{a(t)} \equiv -\left(m\omega \sin \omega t\right) \hat{Q} + \left(\cos \omega t\right) \hat{P} \tag{3.65}$$

si può vedere che l'operatore hermitiano che genera le trasformazioni che implementano la relazione di equivalenza unitaria fra i gruppi generati da questi operatori è:

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{Q}^2 \tag{3.66}$$

(sempre a meno di multipli dell'operatore identità). Esso è, ancora una volta, proprio quello che si ottiene dalla funzione hamiltoniana classica attraverso la solita prescrizione di quantizzazione.

3.2.3 Sui sistemi di Weyl per strutture simplettiche costanti

Il passo successivo nell'analisi della natura dell'applicazione $\hat{W}$ rispetto a trasformazioni su S è quello di considerare ora che queste trasformazioni non siano più necessariamente simplettiche. D'ora in avanti, per evitare possibili confusioni, con ω_D si indicherà la matrice che rappresenta la struttura simplettica nelle coordinate canoniche:

$$\omega_D = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

Se $T \in \mathcal{A}ut\left(S\right)$ cioè è una generica trasformazione lineare invertibile su S, allora si definisce ω_T attraverso:

$$\omega_D\left(Tz, Tz'\right) \equiv \omega_T\left(z, z'\right) \tag{3.68}$$

Questa relazione definisce la matrice che rappresenta ω_T:

$$\omega_T = T^t \omega_D T \tag{3.69}$$

Essa rappresenta proprio una struttura simplettica per S, in quanto si vede che ω_T è antisimmetrica e ha determinante non nullo.

Dalla definizione, se $\hat{W}$ è un sistema di Weyl per (S, ω_D) si ha:

$$\hat{W}\left(z + z'\right) = \hat{W}\left(z\right) \hat{W}\left(z'\right) e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega_D\left(z,z'\right)} \tag{3.70}$$

e quindi, riprendendo delle questioni già espresse precedentemente:

$$\hat{W}\left(Tz + Tz'\right) = \hat{W}\left(Tz\right) \hat{W}\left(Tz'\right) e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega_D\left(Tz,Tz'\right)} \tag{3.71}$$

Visto che T è lineare, in base alla definizione di ω_T:

$$\hat{W}\left(T\left(z + z'\right)\right) = \hat{W}\left(Tz\right) \hat{W}\left(Tz'\right) e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega_T\left(z,z'\right)} \tag{3.72}$$

e allora la posizione :

$$\hat{W}\left(Tz\right) \equiv \hat{W}_T\left(z\right)$$

porta a:
$$\hat{W}_T\left(z+z'\right)=\hat{W}_T\left(z\right)\hat{W}_T\left(z'\right)e^{-i\omega_T\left(z,z'\right)/2\hbar} \tag{3.73}$$

Quindi $\hat{W}_T$ definisce un sistema di Weyl per (S,ω_T). L'analisi generale già svolta conduce ad esempio a definire:

$$\hat{W}_T\left(\alpha z\right)=e^{i\alpha\hat{G}_T(z)/\hbar} \tag{3.74}$$

ed avere che[6] :
$$\alpha\hat{G}_T\left(z\right)=\hat{G}_T\left(\alpha z\right) \tag{3.75}$$

e che:
$$\left[\hat{G}_T\left(z\right),\hat{G}_T\left(z'\right)\right]=-i\hbar\omega_T\left(z,z'\right)\mathbf{1} \tag{3.76}$$

A questo punto si può considerare uno spazio vettoriale con una arbitraria struttura simplettica costante: (S,ω). Le proprietà delle matrici antisimmetriche in uno spazio vettoriale permettono di provare che esiste sempre un automorfismo di S in virtù del quale ω viene trasformata nella forma canonica ω_D: esso può essere visto come un caso particolare del teorema di Darboux. In altre parole, fissata ω, esiste sempre T per cui:

$$\omega=\omega_T=T^t\omega_D T$$

Questo risultato viene sfruttato per definire un sistema di Weyl per (S,ω) una volta noto un sistema di Weyl, $\hat{W}$, per (S,ω_D):

$$(S,\omega)\overset{T}{\mapsto}(S,\omega_D)\overset{\hat{W}}{\mapsto}\mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right)$$

Infatti si ha che, in base a quanto già provato,

$$\hat{W}\left(Tz\right)\equiv\hat{W}_T\left(z\right)$$

è un sistema di Weyl per $(S,\omega)\cong(S,\omega_T)$.

Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ una generica struttura simplettica è realizzata da una matrice:
$$\omega=\begin{pmatrix}0 & \Delta\\ -\Delta & 0\end{pmatrix}$$

una trasformazione che la rende in forma normale è data da T rappresentata da:
$$T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \epsilon\end{pmatrix}$$

per cui si abbia $T^t\omega_D T=\omega$, ovvero:

$$\alpha\epsilon-\beta\gamma=\Delta$$

[6] Sempre con l'ambiguità di ridefinire questi operatori a meno dell'aggiunta di termini del tipo $2\pi n\mathbf{1}$.

Ammesso che T sia nota, si ha:

$$\begin{aligned}
\hat{W}_T(q,p) &= e^{\frac{i}{\hbar}[(\alpha q+\beta p)\hat{P}+(\gamma q+\epsilon p)\hat{Q}]} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}[q(\alpha\hat{P}+\gamma\hat{Q})+p(\beta\hat{P}+\epsilon\hat{Q})]} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{P}_T+p\hat{Q}_T}
\end{aligned}$$

con:

$$\hat{P}_T = \alpha\hat{P}+\gamma\hat{Q} \tag{3.77}$$

$$\hat{Q}_T = \beta\hat{P}+\epsilon\hat{Q} \tag{3.78}$$

da cui:

$$[\hat{Q}_T,\hat{P}_T] = i\hbar\,(\alpha\epsilon-\beta\gamma)\,\mathbf{1} = i\hbar\Delta\mathbf{1}$$

che è consistente con quanto previsto.

3.2.4 Un ulteriore esempio di quantizzazione: la dinamica di una particella carica in un campo magnetico costante

Un ulteriore, assai interessante caso, in cui è possibile applicare il formalismo appena sviluppato è quello in cui si studia la dinamica di una particella carica in un campo magnetico costante $\vec{B}$, di background. Le equazioni del moto newtoniane sono:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\
m\frac{d\vec{v}}{dt} &= q\vec{v}\wedge\vec{B}
\end{aligned}$$

Esse hanno una formulazione lagrangiana su $T\mathbb{R}^3$ con :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^i v_i + qA^i v_i$$

in cui A è il potenziale vettore del campo magnetico:

$$rot\vec{A} = \vec{B} \ \text{ ovvero } \ \epsilon_{ijk}\partial^j A^k \equiv B_i$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{dx^i}{dt} &= v^i \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^i}\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

Con esse si considera il passaggio alla formulazione hamiltoniana:

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^i} = mv_i + qA_i$$

$$H = \pi_i v^i - \mathcal{L}\left(x^i, v^i\left(x^s, \pi_s\right)\right) = \frac{1}{2m}\left(\pi_i - qA_i\right)\left(\pi^i - qA^i\right)$$

La struttura simplettica canonica è $\omega_0 = dx^i \wedge d\pi_i$, rispetto a cui:

$$\{x^i, x^j\} = 0$$
$$\{x^i, \pi_j\} = \delta^i_j$$
$$\{\pi_i, \pi_j\} = 0$$

Come si vede, le variabili π_i dipendono dal potenziale vettore del campo magnetico: ma se si introducono i momenti, invarianti per trasformazioni di gauge, identificandoli con le componenti della quantità di moto della particella:

$$p_i = \pi_i - qA_i \tag{3.79}$$

si ha che questo campo vettoriale è hamiltoniano rispetto a:

$$H = \frac{1}{2m} p^i p_i$$

e struttura di Poisson:

$$\{x^i, x^j\} = 0$$
$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j$$
$$\{p_i, p_j\} = q\epsilon_{ijs}B^s$$

Il tensore di Poisson è perciò :

$$\Lambda_B = \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_j} + q\epsilon_{ijs}B^s \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_j}$$

Questo è invertibile e la struttura simplettica associata è:

$$\omega_B = -q\epsilon_{ijs}B^s dx^i \wedge dx^j + dx^i \wedge dp_i$$

(Queste relazioni divengono immediate qualora si studi il problema secondo una caratterizzazione matriciale: in questi termini si ha che $\omega_B = \left(\Lambda_B^{-1}\right)^t$, ovvero:

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbb{B} \end{pmatrix} \mapsto \omega_B = \begin{pmatrix} -\mathbb{B} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

con $(\mathbb{B})_{ij} = q\epsilon_{ijk}B^k$)

Ora si considera il problema di ottenere un sistema di Weyl per $\left(\mathbb{R}^6, \omega_B\right)$: in virtù di quanto delineato precedentemente una soluzione di questo problema passa attraverso la definizione di una applicazione lineare T che trasformi ω_B in ω_D, cioè una trasformazione

$$\left(x^i, p^i\right) \mapsto \left(\tilde{q}^i, \tilde{p}^i\right)$$

per la quale ω_B assuma la forma canonica.[7] Nello specifico, si assume che $q = 1\,; m = 1\,; \vec{B} = (0,0,B)\,; \hbar = 1$. La trasformazione T che si pone è:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^1 &= x^1 \\
\tilde{x}^2 &= x^2 \\
\tilde{x}^3 &= x^3 \\
\tilde{p}^1 &= p^1 \\
\tilde{p}^2 &= p^2 + Bx^1 \\
\tilde{p}^3 &= p^3
\end{aligned}$$

per cui, secondo la definizione:

$$\hat{W}_T\left(x^i, p^i\right) \equiv \hat{W}\left(\tilde{x}^a\left(x^i, p^i\right), \tilde{p}^i\left(x^i, p^i\right)\right)$$

Esplicitamente:

$$\begin{aligned}
\hat{W}_T\left(x^i, p^i\right) &= e^{i[x^1\hat{P}_1 + x^2\hat{P}_2 + x^3\hat{P}_3 + p^1\hat{Q}_1 + \left(p^2 + Bx^1\right)\hat{Q}_2 + p^3\hat{Q}_3]} \\
&\equiv e^{i[\sum_s \left(x^s\hat{P}_s^{(T)} + p^s\hat{Q}_s^{(T)}\right)]}
\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_1^{(T)} &= \hat{Q}_1 \\
\hat{Q}_2^{(T)} &= \hat{Q}_2 \\
\hat{Q}_3^{(T)} &= \hat{Q}_3 \\
\hat{P}_1^{(T)} &= \hat{P}_1 + B\hat{Q}_2 \\
\hat{P}_2^{(T)} &= \hat{P}_2 \\
\hat{P}_3^{(T)} &= \hat{P}_3
\end{aligned}$$

che soddisfano le regole di commutazione, coerentemente con quanto già descritto:

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}_a^{(T)}, \hat{Q}_b^{(T)}] &= 0 \\
[\hat{Q}_a^{(T)}, \hat{P}_b^{(T)}] &= i\delta_{ab} \\
[\hat{P}_a^{(T)}, \hat{P}_b^{(T)}] &= i\epsilon_{abk}B^k
\end{aligned}$$

Le curve che descrivono il flusso del campo dinamico sono le orbite del

[7] Nel seguito dell'esempio non si annoteranno differentemente gli indici delle coordinate x e p, poichè si considererà $\mathbb{R}^6$ semplicemente come uno spazio vettoriale.

gruppo la cui azione è rappresentata dalle trasformazioni $D(t)$:

$$D(t)\cdot\begin{vmatrix} x^1(0)\\ x^2(0)\\ x^3(0)\\ p^1(0)\\ p^2(0)\\ p^3(0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^1(t)\\ x^2(t)\\ x^3(t)\\ p^1(t)\\ p^2(t)\\ p^3(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\sin tB}{B} & \frac{1-\cos tB}{B} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{\cos tB-1}{B} & \frac{\sin tB}{B} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0 & \cos tB & \sin tB & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin tB & \cos tB & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x^1(0)\\ x^2(0)\\ x^3(0)\\ p^1(0)\\ p^2(0)\\ p^3(0)\end{vmatrix}$$

e visto che sono lineari e simplettiche rispetto a ω_B, è possibile definire un sistema di Weyl:

$$\hat{W}_{D(t)}\left(x^i,p^i\right)\equiv\hat{W}\left(D(t)\cdot\left(x^i,p^i\right)\right)$$

ovvero:

$$\hat{W}_{D(t)}\left(x^i,p^i\right)=e^{i\sum_s[x^s(t)\hat{P}_s^{(T)}+p^s(t)\hat{Q}_s^{(T)}]}$$

e, in modo analogo a quanto già delineato, definire gli evoluti temporali dei generatori:

$$\hat{W}_{D(t)}\left(x^i,p^i\right)=e^{i\sum_s[x^s\hat{P}_s^{(T)}(t)+p^s\hat{Q}_s^{(T)}(t)]}$$

A questo punto il teorema di Von Neumann permette di definire un operatore hamiltoniano

$$\hat{D}(t)\equiv e^{-i\hat{H}t}$$

come generatore del gruppo $\hat{D}(t)$ che implementa la relazione di equivalenza unitaria fra sistemi di Weyl definiti a istanti diversi (ovvero per diversi valori del parametro t). Per esso si ha:

$$\begin{aligned}\hat{D}^\dagger(t)\,\hat{P}_j^{(T)}\hat{D}(t) &= \hat{P}_j^{(T)}(t)\\ \hat{D}^\dagger(t)\,\hat{Q}_j^{(T)}\hat{D}(t) &= \hat{Q}_j^{(T)}(t)\end{aligned}$$

e se, ancora una volta, si risolvono queste relazioni assumendo che $\hat{H}$ sia polinomiale si ha che:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}[\left(\hat{P}_1^{(T)}\right)^2+\left(\hat{P}_2^{(T)}\right)^2+\left(\hat{P}_3^{(T)}\right)^2]+\\ &+ \frac{1}{2}[B^2\left(\hat{Q}_1^{(T)}\right)^2+B^2\left(\hat{Q}_2^{(T)}\right)^2]+B\left(\hat{P}_2^{(T)}\right)\left(\hat{Q}_1^{(T)}\right)-B\left(\hat{P}_1^{(T)}\right)\left(\hat{Q}_2^{(T)}\right)\\ &= \frac{1}{2}[\left(\hat{P}_1\right)^2+\left(\hat{P}_2+B\hat{Q}_1\right)^2+\left(\hat{P}_3\right)^2]\end{aligned}$$

osservazione. *Questo operatore è proprio quello che si avrebbe se si considerasse la solita ipotesi di corrispondenza, con la prescrizione di accoppiamento minimale:*

$$p_s\rightarrow p_s-A_s$$

con $\vec{A} = (0, -Bx_1, 0)$. Ciò che è interessante è che qui si è descritta una procedura di quantizzazione senza far riferimento al potenziale vettore, che è l'argomento col quale si sottolinea un'ulteriore ambiguità in essa, dovuta al fatto che $\vec{B}$ fissa $\vec{A}$ solo a meno di una trasformazione di gauge. Invero la questione è un po' più delicata: anche l'ipotesi di quantizzazione dei sistemi dinamici che sono descritti classicamente da equazioni lineari soffre di un'ambiguità finora taciuta. Infatti la scelta della trasformazione T che rende ω_B nella forma canonica non è univoca, ma definita a meno di un elemento in $Sp\left(\mathbb{R}^6\right)$. Ad esempio si potrebbe analizzare la trasformazione T':

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^1 &= x^1 \\
\tilde{x}^2 &= x^2 \\
\tilde{x}^3 &= x^3 \\
\tilde{p}^1 &= p^1 + \frac{B}{2}x^2 \\
\tilde{p}^2 &= p^2 - \frac{B}{2}x^1 \\
\tilde{p}^3 &= p^3
\end{aligned}$$

e procedere parallelamente a quanto già tracciato. Si ha che:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_1^{(T')} &= \hat{Q}_1 \\
\hat{Q}_2^{(T')} &= \hat{Q}_2 \\
\hat{Q}_3^{(T')} &= \hat{Q}_3 \\
\hat{P}_1^{(T')} &= \hat{P}_1 + \frac{B}{2}\hat{Q}_2 \\
\hat{P}_2^{(T')} &= \hat{P}_2 - \frac{B}{2}\hat{Q}_1 \\
\hat{P}_3^{(T')} &= \hat{P}_3
\end{aligned}$$

Poi si considerano gli evoluti temporali e si definisce $\hat{H}'$ come il generatore del gruppo unitario che implementa l'unitaria equivalenza rispetto all'istante scelto come iniziale:

$$\hat{D}'(t) \equiv e^{-i\hat{H}'t}$$

ovvero:

$$\hat{D}'^{\dagger}(t)\,\hat{P}_j^{(T')}\hat{D}'^{\dagger}(t) = \hat{P}_j^{(T')}(t)$$

$$\hat{D}'^{\dagger}(t)\,\hat{Q}_j^{(T')}\hat{D}'^{\dagger}(t) = \hat{Q}_j^{(T')}(t)$$

allora si ha:

$$\hat{H}' = \frac{1}{2}[\left(\hat{P}_1^{(T')}\right)^2 + \left(\hat{P}_2^{(T')}\right)^2 + \left(\hat{P}_3^{(T')}\right)^2] +$$

$$
\begin{aligned}
+ & \quad [\left(\hat{Q}_1^{(T')}\right)^2 + \left(\hat{Q}_2^{(T')}\right)^2] + \\
+ & \quad B\hat{Q}_1^{(T')}\hat{P}_2^{(T')} - B\hat{Q}_2^{(T')}\hat{P}_1^{(T')} \\
= & \quad \frac{1}{2}[\hat{P}_1 - \frac{B}{2}\hat{Q}_2]^2 + \frac{1}{2}[\hat{P}_2 + \frac{B}{2}\hat{Q}_1]^2 + \frac{1}{2}[\hat{P}_3]^2
\end{aligned}
$$

Questo operatore hamiltoniano è quello che si avrebbe con la prescrizione dell'accoppiamento minimale con $\vec{A} = \left(\frac{B}{2}x_2, -\frac{B}{2}x_1, 0\right)$. In altre parole, la quantizzazione mediante sistemi di Weyl, pur non introducendo esplicitamente il potenziale vettore di $\vec{B}$, mostra un'ambiguità che si può ricondurre all'arbitrarietà della scelta di una gauge. Questa ambiguità deriva dal fatto che la trasformazione che porta in forma normale la struttura simplettica non è univoca, ma definita a meno di un elemento di $Sp\left(\mathbb{R}^6\right)$.

3.3 Sulla definizione di mappa di Weyl

Attraverso un sistema di Weyl per lo spazio vettoriale S rispetto alla struttura simplettica ω è possibile introdurre un'applicazione che associa ad una funzione su questo spazio vettoriale un operatore sullo spazio di Hilbert su cui il sistema di Weyl è realizzato. Essa è detta mappa di Weyl [22]. Se:

$$\hat{W} \, : (S, \omega) \, \mapsto \, \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

allora:

$$\hat{\Omega} \, : \, \mathcal{F}(S) \, \mapsto \, \mathcal{O}p(\mathcal{H})$$

Questa applicazione viene definita in prima analisi nel caso in cui $S = \mathbb{R}^{2n}$ e ω abbia la forma canonica. Giusto per non appesantire la scrittura, e visto che l'estensione è immediata, si considera in dettaglio $S = \mathbb{R}^2$ e $\omega = \omega_D = dq \wedge dp$, nelle coordinate scelte.

$$\Omega : \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right) \mapsto \mathcal{O}p(\mathcal{H})$$

$$\Omega(f) \equiv \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(q,p);(\xi,\eta)]} \hat{W}(\xi,\eta) \tag{3.80}$$

In particolare questa espressione si può scrivere nella forma:

$$\Omega(f) \equiv \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi\hbar}} \check{f}_s(\eta,\xi)\, \hat{W}(\xi,\eta) \tag{3.81}$$

Essa evidenzia che ciò che entra in questa definizione è la trasformata di Fourier simplettica di f.

Indipendentemente dallo spazio di Hilbert su cui il sistema di Weyl è realizzato, si può vedere che se f è reale, ovvero se $f(q,p) \in \mathbb{R}$, allora $\hat{\Omega}(f)$

è un operatore simmetrico. Per convincersi di ciò è sufficiente notare che se f è reale, allora:

$$[\check{f}_s(\eta,\xi)]^* = \check{f}_s(-\eta,-\xi)$$

e che $\hat{W}^\dagger(\xi,\eta) = \hat{W}(-\xi,-\eta)$, secondo le proprietà degli operatori che definiscono un sistema di Weyl. È ben noto che un operatore simmetrico non è necessariamente autoaggiunto, e che l'analisi di quali operatori simmetrici siano autoaggiunti, o quali abbiano estensioni autoaggiunte, è un argomento assai delicato, da considerare con la massima cura: la stessa teoria quantistica fornisce dei paradossi dovuti ad una errata formalizzazione delle osservabili in termini di operatori definiti non su domini di autoaggiuntezza. Invero, questa proprietà rende molto interessante lo studio, con maggiore sistematicità, delle proprietà di questa applicazione. Specificatamente, nella rappresentazione di Von Neumann: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ e

$$\left(\hat{W}(\xi,\eta)\psi\right)(x) = e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)}\psi(x+\xi)$$

e si vede che:[8]

$$\left(\hat{\Omega}(q)\psi\right)(x) = x\psi(x) \tag{3.82}$$

$$\left(\hat{\Omega}(p)\psi\right)(x) = i\hbar\frac{d\psi}{dx} \tag{3.83}$$

$$\left(\hat{\Omega}(f(q))\psi\right)(x) = f(x)\psi(x) \tag{3.84}$$

$$\left(\hat{\Omega}(f(p))\psi\right)(x) = \left.\left(f\left(i\hbar\frac{d}{da}\right)\psi(a)\right)\right|_{a=x} \tag{3.85}$$

e per un monomio:

$$\left(\hat{\Omega}\left(q^a p^b\right)\psi\right)(x) = \frac{1}{2^a}\sum_{k=0}^{a}\left(\begin{array}{c} a \\ k \end{array}\right) x^k [\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)^b \left(x^{a-k}\psi(x)\right)] \tag{3.86}$$

Se $\hat{\Omega}(q) = \hat{q}$ e $\hat{\Omega}(p) = \hat{p}$ questa relazione assume la forma:

$$\hat{\Omega}\left(q^a p^b\right) = \frac{1}{2^a}\sum_{k=0}^{a}\left(\begin{array}{c} a \\ k \end{array}\right)\hat{q}^k\hat{p}^b\hat{q}^{a-k} \tag{3.87}$$

L'analisi dell'immagine, attraverso la mappa di Weyl, di un monomio, è molto interessante. Ad esempio:

$$\left(\hat{\Omega}(qp)\psi\right)(x) = \frac{i\hbar}{2}[x\frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dx}(x\psi)] \tag{3.88}$$

[8]Come è evidente, $\hat{\Omega}(p)\psi = -\hat{P}\psi$, dove $\hat{P}$ indica il generatore del sistema di Weyl ristretto al sottospazio $(q,0)$. Il motivo di ciò è che si è scelto di definire la mappa di Weyl attraverso la trasformata di Fourier simplettica: nel seguito, il confronto con formule già note sarà alla luce di ciò. Il dettaglio di questi calcoli è in appendice.

ovvero:

$$\hat{\Omega}\left(qp\right)=\frac{1}{2}[\hat{q}\hat{p}+\hat{p}\hat{q}] \tag{3.89}$$

Questa espressione si può anche scrivere nella forma:

$$\hat{\Omega}\left(qp\right)=\frac{1}{2}[\hat{\Omega}\left(q\right)\circ\hat{\Omega}\left(p\right)+\hat{\Omega}\left(p\right)\circ\hat{\Omega}\left(q\right)] \tag{3.90}$$

Analogamente, si ha:

$$\hat{\Omega}\left(q^2p\right)=\frac{1}{4}[\hat{q}^2\hat{p}+2\hat{q}\hat{p}\hat{q}+\hat{p}\hat{q}^2] \tag{3.91}$$

ed anch'essa si può scrivere come[9]:

$$\hat{\Omega}\left(q^2p\right)=\frac{1}{2}[\hat{\Omega}\left(q\right)\circ\hat{\Omega}\left(qp\right)+\hat{\Omega}\left(qp\right)\circ\hat{\Omega}\left(q\right)] \tag{3.92}$$

Tutto questo indica che,già nel caso dei polinomi, si ha che:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}\left(qp\right) &\neq \hat{\Omega}\left(q\right)\circ\hat{\Omega}\left(p\right) && (3.93)\\ \hat{\Omega}\left(qp\right) &\neq \hat{\Omega}\left(p\right)\circ\hat{\Omega}\left(q\right) && (3.94)\end{aligned}$$

e che, in generale, questa mappa non definisce un omomorfismo fra l'algebra $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$, abeliana rispetto all'usuale regola di prodotto, e l'algebra degli operatori lineari su $\mathcal{H}$, che non è abeliana secondo la usuale regola di composizione. Però questa mappa è invertibile. L'inversa è detta mappa di Wigner [24], ed è definita attraverso l'operazione di traccia, da intendersi eventualmente in senso generalizzato, ovvero come integrazione dei valori medi dell'operatore rispetto ad una base dello spettro continuo. Se $\hat{A}\in\mathcal{O}p\left(\mathcal{H}\right)$ allora, se $Tr[\hat{A}\hat{W}^\dagger\left(x,k\right)]$ esiste finita, si ha:

$$\hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{A}\right)\in\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

$$\left(\hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{A}\right)\right)\left(q,p\right)\equiv\int\frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(x,k);(q,p)]}Tr[\hat{A}\hat{W}^\dagger\left(x,k\right)] \tag{3.95}$$

[9]Questi due esempi potrebbero indurre a credere che, in generale, la mappa di Weyl associa, al prodotto di due funzioni, la combinazione simmetrica delle immagini delle singole funzioni, cioè che valga una relazione del tipo:

$$\hat{\Omega}\left(fg\right)=\frac{1}{2}\left[\hat{\Omega}\left(f\right)\circ\hat{\Omega}\left(g\right)+\hat{\Omega}\left(g\right)\circ\hat{\Omega}\left(f\right)\right]$$

Essa, però, non è assolutamente valida, come è facile vedere considerando, ad esempio, l'immagine attraverso $\hat{\Omega}$ del monomio q^2p^b. Infatti si vede che:

$$\hat{\Omega}\left(q^2p^b\right)=\frac{1}{4}\left(\hat{q}^2\hat{p}^b+\hat{q}\hat{p}^b\hat{q}+\hat{p}^b\hat{q}^2\right)\neq\frac{1}{2}\left(\hat{q}^2\hat{p}^b+\hat{p}^b\hat{q}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\hat{\Omega}\left(q^2\right)\circ\hat{\Omega}\left(p^b\right)+\hat{\Omega}\left(p^b\right)\circ\hat{\Omega}\left(q^2\right)\right)$$

Questa caratteristica può essere vista come un ulteriore aspetto del fatto che la mappa $\hat{\Omega}$ trasforma un'algebra commutativa, quella delle funzioni rispetto al prodotto usuale, in un'algebra non commutativa, quella degli operatori su uno spazio di Hilbert.

e da qui si vede che è legata all'antitrasformata di Fourier simplettica dell'espressione $Tr[\hat{A}\hat{W}^{\dagger}(x,k)]$: in dettaglio, se si pone:

$$f_{\hat{A}} \equiv \hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{A}\right) \tag{3.96}$$

allora si può mostrare che:

$$f_{\hat{\Omega}(f)} = f \tag{3.97}$$

e pure che:

$$f_{\hat{A}^{\dagger}} \equiv \hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{A}^{\dagger}\right) = \left(f_{\hat{A}}\right)^{*} \tag{3.98}$$

Il risultato importante è che si può dimostrare che se $f \in \mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, dqdp\right)$ allora $\hat{\Omega}(f)$ è un operatore della classe di Hilbert-Schmidt su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ e, viceversa, se $\hat{A}$ è un operatore della classe di Hilbert-Schmidt per cui ha senso definire la mappa di Wigner, allora $f_{\hat{A}}$ è una funzione in $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, dqdp\right)$. Questo significa che la mappa di Weyl e la sua inversa, la mappa di Wigner, definiscono una biezione fra $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, dqdp\right)$ e un sottoinsieme dell'insieme degli operatori di Hilbert-Schmidt su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$.[10]

3.3.1 Il prodotto di Moyal

Proprio la mappa di Wigner permette di definire, in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$, un prodotto associativo che le conferisce una nuova struttura di algebra, isomorfa all'algebra degli operatori rispetto all'operazione di composizione [14]:

$$f *_M g \equiv \hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{\Omega}(f) \circ \hat{\Omega}(g)\right) \tag{3.99}$$

Questo prodotto è detto di Moyal. Esso è associativo in virtù dell'associatività del prodotto fra operatori, ed è distributivo rispetto alla somma in virtù della linearità dell'operatore $\hat{\Omega}$. Invero è non locale: la sua forma, in coordinate, è:

$$\begin{gathered}(f *_M g)(q,p) = \\ = 4\int \frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \frac{db}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \frac{dt}{\sqrt{2\pi\hbar}} f(a,b)\, g(s,t)\, e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)}\end{gathered} \tag{3.100}$$

Questo integrale va inteso in senso proprio qualora f e g appartengano all'insieme di funzioni per cui esiste la trasformata di Fourier, e il teorema di Plancherel assicura che ciò è possibile per le funzioni a quadrato sommabile, e nel senso delle funzioni generalizzate nel caso, ad esempio, che f o g siano polinomi. Qualora si restringa l'algebra delle funzioni in esame al sottoinsieme di $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$ a cui appartengono quelle che sono infinitamente

[10] In appendice sono illustrate le dimostrazioni di alcuni di questi risultati. Per un ulteriore approfondimento [17].

derivabili, rispetto ad entrambe le coordinate, con derivate di ogni ordine che si annullano al tendere all'infinito del valore di entrambe la variabili (ad esempio si può pensare all'insieme $S^{\infty}\left(\mathbb{R}^{2}\right)$ delle funzioni schwartziane nel piano), oppure all'algebra dei polinomi nelle due variabili q e p, il prodotto si può scrivere nella forma[11]:

$$(f *_{M} g)(q,p) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n+m} \frac{(-1)^{m}}{n!m!} \left(\frac{\partial^{m}}{\partial a^{m}} \frac{\partial^{n}}{\partial b^{n}} f(a,b) \frac{\partial^{n}}{\partial a^{n}} \frac{\partial^{m}}{\partial b^{m}} g(a,b)\right)\Bigg|_{\substack{a=q \\ b=p}} \tag{3.101}$$

Se si esplicitano i primi termini, allora:

$$\begin{aligned} f *_{M} g &= f \cdot g + \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}\right) + o\left(\hbar^{2}\right) \qquad (3.102) \\ &= f \cdot g - \frac{i\hbar}{2}\{f,g\} + o\left(\hbar^{2}\right) \end{aligned}$$

In altre parole, il prodotto di Moyal si può leggere come deformazione del prodotto usuale. Qui deformazione sta a significare un'espressione in serie di potenze di un parametro, ($\hbar$ nel caso specifico) che, nel limite in cui tende a zero, si riduce al solito prodotto commutativo.Un'analisi sui termini dell'espressione di $f *_{M} g$ suggerisce, così come è spesso riportato, di scrivere:

$$f *_{M} g = f(q,p)\, e^{-\frac{i\hbar}{2}\left[\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right]} g(q,p) \tag{3.103}$$

oppure:

$$f *_{M} g = f e^{-\frac{i\hbar}{2}\Lambda_{ab}\overleftarrow{\partial_{a}}\wedge\overrightarrow{\partial_{b}}} g \tag{3.104}$$

(qui Λ_{ab} indica il tensore di Poisson relativo alla struttura simplettica su cui è stato definito il sistema di Weyl). Questa è un'espressione che indica che l'operatore che agisce sulle funzioni è dato dallo sviluppo formale dell'esponenziale in serie $e^{\hat{S}} = \sum_{n} \hat{S}^{n}/n!$, e il verso delle frecce indica quale sia la funzione sulla quale la derivazione agisce. Equivalentemente:

$$f *_{M} g(q,p) = e^{-\frac{i}{2\hbar}\left[\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial x}\right]} f(q+a, p+b)\, g(q+x, p+k)\Big|_{\substack{a=x=0 \\ b=k=0}} \tag{3.105}$$

Una delle proprietà fondamentali della mappa di Weyl è che, se $H \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^{2}\right)$:

$$[\Omega(q), \Omega(p)] = -i\hbar \mathbf{1} \tag{3.106}$$

$$[\Omega(q), \Omega(H)] = -i\hbar\, \Omega\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) \tag{3.107}$$

$$[\Omega(p), \Omega(H)] = i\hbar\, \Omega\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) \tag{3.108}$$

[11]Il dettaglio di questa analisi è in appendice.

Ciò significa che la mappa di Weyl realizza la massima analogia fra la formalizzazione della dinamica classica in termini di equazioni di Hamilton, e della dinamica quantistica in termini delle equazioni di Heisenberg, per l'evoluzione temporale delle osservabili canoniche.

osservazione. *Si è già più volte sottolineato come l'esistenza di una meccanica classica e di una meccanica quantistica ponga in essere il problema della quantizzazione: ovvero la definizione di una corrispondenza fra osservabili classici e quantistici, cioè fra funzioni definite su, ad esempio, uno spazio vettoriale, ed operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert. Ma quali sono le proprietà che dovrebbe ragionevolmente avere questa corrispondenza? In base a quanto già discusso, si potrebbe richiedere che per questa applicazione (rappresentata, come notazione, da* $\hat{K} : f \mapsto \hat{K}_f$*):*

- *se* c *è un'osservabile classica costante, allora:*
$$\hat{K}_c = c\mathbf{1}$$
- *se* q *e* p *definiscono le coordinate canoniche, allora:*
$$[\hat{K}_q, \hat{K}_p] = -i\hbar\mathbf{1}$$
- *se* f *e* g *sono osservabili classici, allora il valor medio in uno stato dell'osservabile* $\hat{K}_{f+g}$ *sia dato dalla somma dei valori medi di* $\hat{K}_f$ *e* $\hat{K}_g$*:*
$$\langle \hat{K}_{f+g} \rangle_\psi = \langle \hat{K}_f \rangle_\psi + \langle \hat{K}_g \rangle_\psi$$
Questa uguaglianza, per le proprietà degli operatori autoaggiunti, equivale a che:
$$\hat{K}_{f+g} = \hat{K}_f + \hat{K}_g$$
- *analogamente, sia:*
$$\hat{K}_{\Phi(f)} = \Phi\left(\hat{K}_f\right)$$
o, almeno, come condizione più debole, sia:
$$\hat{K}_{cf} = c\hat{K}_f$$
e:
$$\hat{K}_{f^2} = \hat{K}_f \hat{K}_f$$
In particolare, affinchè questa condizione sia compatibile con quella precedente, riguardo alla somma, si deve avere:
$$\left(\hat{K}_f + \hat{K}_g\right)^2 = \left(\hat{K}_{f+g}\right)^2 = \hat{K}_{(f+g)^2}$$
Dal membro di sinistra si ha:
$$\left(\hat{K}_f + \hat{K}_g\right)^2 = \left(\hat{K}_f\right)^2 + \left(\hat{K}_g\right)^2 + \hat{K}_f\hat{K}_g + \hat{K}_g\hat{K}_f$$

mentre da quello di destra:

$$\hat{K}_{(f+g)^2} = \hat{K}_{f^2+2fg+g^2} = \hat{K}_{f^2} + \hat{K}_{g^2} + \hat{K}_{2fg}$$

Un confronto fra le due espressioni permette di asserire che le due richieste sono compatibili solo se:

$$\hat{K}_f\hat{K}_g + \hat{K}_g\hat{K}_f = \hat{K}_{2fg} = 2\hat{K}_{fg}$$

- *ci sia una relazione fra le strutture di algebra di Lie delle osservabili classiche e quantistiche:*

$$[\hat{K}_f, \hat{K}_g] = -i\hbar\hat{K}_{\{f,g\}}$$

Il teorema di Groenewold [7] prova che un'applicazione $\hat{K}$ che soddisfi tutte queste proprietà non può esistere: in tal senso è un no-go theorem. Gli esempi proposti chiariscono che la mappa di Weyl (neanche limitatamente all'algebra dei polinomi) non soddisfa queste richieste. In particolare non soddisfa l'ultima di esse: essa vale infatti solo nel limite in cui, in queste espressioni, si trascurano termini di ordine superiore al primo in potenze di $\hbar$. In questo senso si è detto che la mappa di Weyl realizza la massima analogia possibile fra formalismo classico e quantistico.

3.3.2 Il problema del limite classico per le equazioni della dinamica quantistica nell'algebra di Moyal

Quanto illustrato a proposito del prodotto di Moyal indica che, se si antisimmetrizza questo prodotto si ottiene una struttura di Poisson:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_M &\equiv \frac{i}{\hbar}\left(f *_M g - g *_M f\right) \\ &= \{f, g\} + o\left(\hbar\right) \end{aligned} \tag{3.109}$$

Questa struttura viene detta parentesi di Moyal ed è, nello stesso significato del prodotto, una deformazione, in $\hbar$, dell'usuale parentesi di Poisson. Per chiarire che l'applicazione $\{\cdot, \cdot\}_M$ è una struttura di Poisson, rispetto al prodotto di Moyal, è sufficiente verificare esplicitamente che sono soddisfatte le proprietà richieste: questa prova è assolutamente analoga a quella illustrata a proposito della struttura di commutatore nell'insieme degli operatori. Come si vede, si ha che:

$$\{q, p\}_M = 1 \tag{3.110}$$

$$\{q, H\}_M = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{3.111}$$

$$\{p, H\}_M = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.112}$$

e questo prova che si possono formulare le equazioni che descrivono l'evoluzione temporale dell'osservabile classico associato alle curve coordinate (solitamente posizioni e momenti, per un sistema di particelle) anche rispetto alla parentesi di Moyal.[12] Questo risultato è dovuto, in definitiva, al fatto che, come è semplice verificare, per una funzione f arbitraria:

$$\begin{aligned}\{q,f\}_M &= \{q,f\}\\ \{p,f\}_M &= \{p,f\}\end{aligned}$$

e che, ancora, se V è un polinomio:

$$\{f,V\}_M = \{f,V\}$$

solo se V è di grado (valutato sommando l'esponente di ogni singola variabile) non superiore al secondo.

Allora, se H è una funzione arbitraria, qual è il significato dell'espressione $\{f,H\}_M$? Si può mettere in relazione all'evoluzione temporale dell'osservabile classica descritto da f? Quanto illustrato, e specialmente la relazione (3.110) rende ragionevole il tentativo di leggere il formalismo poissoniano classico come caso limite del formalismo in cui la mappa di Wigner traduce, in termini di algebra di funzioni, il significato delle equazioni della dinamica quantistica nell'algebra degli operatori. In altre parole, attraverso la mappa di Wigner l'algebra delle osservabili quantistiche, cioè degli operatori su uno spazio di Hilbert, diviene l'algebra di Moyal delle funzioni su uno spazio vettoriale: ovvero un insieme di funzioni con le operazioni di somma e di prodotto di Moyal. Le equazioni di Heisenberg si scrivono in termini della parentesi di Moyal. Infatti, dalla legge di evoluzione temporale per un'osservabile quantistico, rispetto ad un gruppo a un parametro di trasformazioni unitarie (1.83):

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t)\,\hat{A}\hat{U}(t)$$

si ha, nelle notazioni introdotte a proposito della mappa di Wigner, che essa è equivalente a:

$$f_{\hat{A}(t)} = f_{\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{A}\hat{U}(t)} = f_{\hat{U}^{\dagger}(t)} *_M f_{\hat{A}} *_M f_{\hat{U}(t)} \tag{3.113}$$

Se si considera la forma infinitesima di questa relazione si può facilmente calcolare che si ha, qualora si consideri un operatore hamiltoniano quantistico $\hat{U}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}$:

$$\frac{d}{dt} f_{\hat{A}(t)} = \{f_{\hat{H}}, f_{\hat{A}(t)}\}_M \tag{3.114}$$

In questa prospettiva la nozione di deformazione acquista un significato esplicito: il formalismo poissoniano si ottiene, per $\hbar \to 0$, cioè come limite classico, da quello quantistico definito nell'algebra di Moyal.

[12] Ancora una volta, queste verifiche sono presentate in appendice.

osservazione. *Nella prima parte di questo capitolo si è studiata la nozione di sistema di Weyl, e la natura di questi rispetto a trasformazioni indotte da trasformazioni definite sullo spazio vettoriale in esame. Questa analisi ha permesso, in particolare, di capire che, ad un campo vettoriale hamiltoniano che genera un gruppo a un parametro di trasformazioni lineari, è possibile associare un gruppo a un parametro di operatori unitari sullo spazio di Hilbert in cui il sistema di Weyl è definito. Come si è più volte sottolineato, questa associazione si può leggere come una quantizzazione della dinamica di un sistema classico lineare.*

Le proprietà delle mappe di Weyl e di Wigner permettono ora di analizzare un problema in qualche modo inverso: quale dinamica classica corrisponde ad una definita dinamica quantistica?

Questa breve analisi inizia dalla relazione (3.95):

$$f_{\hat{A}(t)}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\, dk\, e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(x,k);(q,p)]} Tr\left[\hat{U}^{\dagger}(t)\,\hat{A}\hat{U}(t)\,\hat{W}^{\dagger}(x,k)\right] \tag{3.115}$$

La proprietà di ciclicità dell'operatore di traccia permette di scriverla come:

$$f_{\hat{A}(t)}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\, dk\, e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(x,k);(q,p)]} Tr\left[\hat{A}\hat{U}(t)\,\hat{W}^{\dagger}(x,k)\,\hat{U}^{\dagger}(t)\right]$$

e, dall'unitarietà degli operatori $\hat{U}$ e $\hat{W}$ si ha:

$$f_{\hat{A}(t)}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\, dk\, e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(x,k);(q,p)]} Tr\left[\hat{A}\left(\hat{U}(t)\,\hat{W}(x,k)\,\hat{U}^{\dagger}(t)\right)^{\dagger}\right]$$

Questa espressione è molto interessante perchè, sempre grazie al fatto che $\hat{U}(t)$ è un operatore unitario, si può provare che $\hat{U}(t)\,\hat{W}(x,k)\,\hat{U}^{\dagger}(t)$ definisce un sistema di Weyl per $\left(\mathbb{R}^2,\omega_D\right)$. Inoltre, se $\hat{U}(t)$ ha come generatore un operatore $\hat{H}$ che sia quadratico negli operatori $\hat{P}$ e $\hat{Q}$, allora si può provare che esiste un gruppo a un parametro di trasformazioni lineari simplettiche $D(t)$ per cui:

$$\hat{U}(t)\,\hat{W}(x,k)\,\hat{U}^{\dagger}(t) = \hat{W}\left(D^{-1}(t)\cdot(x,k)\right) \tag{3.116}$$

In questo caso si vede che:

$$f_{\hat{A}(t)}(q,p) = f_{\hat{A}}\left(D^{-1}(t)\cdot(q,p)\right) \tag{3.117}$$

Questa relazione conduce a:

$$\left(\frac{d}{dt}\left(f_{\hat{A}(t)}\right)\right)(q,p) = \frac{d}{dt}\left(f_{\hat{A}}\left(D^{-1}(t)\cdot(q,p)\right)\right)$$

Dalla definizione dell'operatore di derivazione di Lie illustrata in appendice (D.23) si ha che essa diviene:

$$\left(\frac{d}{dt}\left(f_{\hat{A}(t)}\right)\right)(q,p) = -\left(L_{X_D} f_{\hat{A}}\right)\left(D^{-1}(t)\cdot(q,p)\right) \tag{3.118}$$

in cui X_D è il campo vettoriale che genera il gruppo $D(t)$. Ancora, attraverso la (3.117) si può vedere che:

$$-\left(L_{X_D} f_{\hat{A}}\right)\left(D^{-1}(t)\cdot(q,p)\right) = -f_{\hat{U}^{\dagger}(t)} *_M L_{X_D} f_{\hat{A}} *_M f_{\hat{U}(t)} \tag{3.119}$$

Parallelamente, il fatto che gli operatori $\hat{U}(t)$ commutino con l'operatore $\hat{H}$ permette di provare che:

$$\{f_{\hat{H}}, f_{\hat{A}(t)}\}_M = f_{\hat{U}^{\dagger}(t)} *_M \{f_{\hat{H}}, f_{\hat{A}}\} *_M f_{\hat{U}(t)} \tag{3.120}$$

Il confronto fra (3.114) e (3.119) indica che, proprio in questo caso specifico:

$$L_{X_D} f_{\hat{A}} = \{f_{\hat{A}}, f_{\hat{H}}\}_M \tag{3.121}$$

Ciò significa che, nel caso di una dinamica quantistica descritta da un gruppo che ha come generatore un operatore hamiltoniano quadratico in $\hat{Q}$ e $\hat{P}$, le equazioni à la Heisenberg sono perfettamente equivalenti a delle equazioni scritte per funzioni, definite dalle osservabili quantistiche attraverso la mappa di Wigner, nell'algebra di Moyal. Nel limite per $\hbar \to 0$ esse si riducono proprio alle equazioni di un sistema classico nella formulazione à la Poisson.

Quanto questi risultati sono generali? Come si vede, la relazione (3.114) è valida qualunque sia la dinamica quantistica: la relazione (3.121, invece, dipende dalla forma specifica dell'operatore hamiltoniano (3.116). Come si illustrerà con più dettaglio nel capitolo di conclusioni, visto che questo è un tema di studio assolutamente attuale e non completamente chiarito, nel caso generale la (3.116) sarà sostituita da una relazione che definisce un sistema di Weyl rispetto ad una nuova struttura lineare per lo spazio $\mathbb{R}^2$. Ciò che, nell'ottica di questo lavoro, è interessante sottolineare, è che il formalismo à la Weyl-Wigner permette di definire un'associazione fra dinamiche classiche governate da funzioni hamiltoniane quadratiche nelle variabili canoniche, e dinamiche quantistiche governate da operatori hamiltoniani quadratici negli operatori detti canonici, e che per esse il problema della quantizzazione, come quello del limite classico, è suscettibile di uno studio compiuto. Inoltre, proprio questo formalismo traccia una possibile via per l'estensione di questo studio a situazioni più generali.

3.3.3 Sulla mappa di Weyl pesata

Per proseguire nell'analisi di questa corrispondenza fra la formalizzazione classica e quella quantistica di un sistema dinamica quantistico è interessante considerare una differente versione della mappa di Weyl [2]. Se w è una funzione definita su S -e ancora una volta, per semplicità, si assume $S = \mathbb{R}^2$- che non si annulla mai:

$$w(\xi,\eta) \neq 0$$

allora si definisce mappa di Weyl pesata l'applicazione:

$$\hat{\Omega}^{(w)} : \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right) \mapsto \mathcal{O}p\left(\mathcal{H}\right)$$

data da:

$$\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\right) \equiv \frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)^2}\int d\xi\, d\eta\, dq\, dp\, w\left(\xi,\eta\right) f\left(q,p\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(q,p);(\xi,\eta)]}\hat{W}\left(\xi,\eta\right) \tag{3.122}$$

o, equivalentemente:

$$\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\right) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi\hbar}} w\left(\xi,\eta\right)\check{f}_s\left(\xi,\eta\right)\hat{W}\left(\xi,\eta\right) \tag{3.123}$$

Se $\hat{W}\left(\xi,\eta\right)$ è definito nella rappresentazione di Schrödinger si può esplicitamente valutare quale sia il significato di questa funzione peso considerando l'immagine associata alle funzioni coordinate:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(q\right)\psi\right)\left(x\right) = \Phi\left(x\right)\psi\left(x\right) \tag{3.124}$$

con:

$$\Phi\left(x\right) = \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi\hbar}} q w\left(0,\eta\right) e^{-iq\eta/\hbar} e^{ix\eta/\hbar}\psi\left(x\right)$$

e

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(p\right)\psi\right)\left(x\right) = -i\hbar\, [\frac{\partial}{\partial x} w\left(a-x,0\right)]\Big|_{a=x}\psi\left(x\right) + w\left(0,0\right) i\hbar\frac{d\psi}{dx} \tag{3.125}$$

Anche questa mappa si può invertire. Si può vedere che:

$$f\left(q,p\right) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(x,k);(q,p)]}\frac{1}{w\left(x,k\right)} Tr[\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\right)\hat{W}^{\dagger}\left(x,k\right)] \tag{3.126}$$

e quindi definire, nell'algebra delle funzioni sul piano, un nuovo prodotto deformato:

$$f *_{M(w)} g \equiv [\hat{\Omega}^{(w)}]^{-1}\circ[\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\right)\circ\hat{\Omega}^{(w)}\left(g\right)] \tag{3.127}$$

Qual è la relazione fra il prodotto di Moyal ottenuto attraverso una mappa di Weyl pesata e quello ottenuto dalla mappa di Weyl con $w = 1$ (cioè non pesata)?

Essi sono equivalenti. Se:

$$T^{(w)} : \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right) \mapsto \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

è un operatore integrale definito da:

$$\left(T^{(w)}\cdot f\right)\left(\epsilon,\phi\right) \equiv \frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)^2}\int dx\, dk\, dq\, dp\, w\left(x,k\right) f\left(q,p\right) e^{-ix(\phi-p)/\hbar} e^{ik(\epsilon-q)/\hbar} \tag{3.128}$$

si ha che:

$$T^{(w)}\left(f *_{M(w)} g\right)=\left(T^{(w)} f\right) *_M\left(T^{(w)} g\right) \tag{3.129}$$

Per comprendere meglio il ruolo della funzione peso è ragionevole considerare due esempi:

- $w=w(\xi, \eta)=e^{i \xi \eta / 2 \hbar}$ allora si ha

  $$\left(\hat{\Omega}^{(w)}(f) \psi\right)(x)=\int \frac{d q}{\sqrt{2 \pi \hbar}} \int \frac{d p}{\sqrt{2 \pi \hbar}} f(q, p) e^{i p(q-x) / \hbar} \psi(q) \tag{3.130}$$

  e quindi:

  $$\left(\hat{\Omega}^{(w)}(f(q)) \psi\right)(x)=f(x) \psi(x) \tag{3.131}$$

  $$\left(\hat{\Omega}^{(w)}(f(p)) \psi\right)(x)=f\left(i \hbar \frac{d}{d x}\right) \psi(x) \tag{3.132}$$

  e per un monomio:

  $$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(q^a p^b\right) \psi\right)(x)=\left(\left(i \hbar \frac{d}{d x}\right)^b x^a \psi\right)(x) \tag{3.133}$$

  ovvero l'operatore che corrisponde ad un monomio è:

  $$\hat{\Omega}^{(w)}\left(q^a p^b\right)=\hat{p}^b \hat{q}^a \tag{3.134}$$

  Questo chiarisce che il ruolo della funzione peso è quello di determinare un ordinamento nell'associazione fra funzioni e operatori. Ad un monomio nell'algebra commutativa $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$, ovvero al prodotto di q^a con p^b, corrisponde un monomio nell'algebra non commutativa $\mathcal{O}p(\mathcal{H})$: esso è ottenuto moltiplicando a volte l'operatore $\hat{q}$ e b volte l'operatore $\hat{p}$. La funzione peso sceglie qual è l'ordine con cui questi operatori vengono moltiplicati.

  Se si valuta esplicitamente il prodotto deformato ottenuto in questo caso si vede che:

  $$f *_{M(w)} g(q, p)=\int \frac{d a}{\sqrt{2 \pi \hbar}} \int \frac{d b}{\sqrt{2 \pi \hbar}} e^{-i b(a-q) / \hbar} f(a, p) g(q, p+b) \tag{3.135}$$

  e, al solito, se le funzioni hanno condizioni all'infinito opportune:

  $$f *_{M(w)} g(q, p)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i \hbar)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial q^k} f(q, p) \frac{\partial^k}{\partial p^k} g(q, p) \tag{3.136}$$

  L'operatore che descrive l'equivalenza col prodotto di Moyal standard è:

  $$\left(T^{(w)} f\right)(\epsilon, \eta)=\frac{1}{(2 \pi \hbar)^2} \int d x\, d k\, d q\, d p\, e^{i x k / 2 \hbar} f(q, p) e^{-i x(\phi-p) / \hbar} e^{i k(\epsilon-q) / \hbar} \tag{3.137}$$

- Parallelamente si può considerare un altra funzione peso: $w = e^{-i\xi\eta/2\hbar}$. In modo analogo a quanto illustrato per l'altro esempio si ha che:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\left(q\right)\right)\psi\right)\left(x\right) = f\left(x\right)\psi\left(x\right) \tag{3.138}$$

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\left(p\right)\right)\psi\right)\left(x\right) = f\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi\left(x\right) \tag{3.139}$$

  e per un monomio:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(q^a p^b\right)\psi\right)\left(x\right) = x^a\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)^b\psi\left(x\right) \tag{3.140}$$

  e quindi l'operatore che corrisponde ad un monomio è:

$$\hat{\Omega}^{(w)}\left(q^a p^b\right) = \hat{q}^b\hat{p}^a \tag{3.141}$$

  Questa relazione chiarisce ulteriormente che scegliere una funzione peso equivale a scegliere un ordinamento fra gli operatori associati a funzioni che dipendono sia da q che da p. Il prodotto di Moyal corrispondente è:

$$f *_{M(w)} g\left(q,p\right) = \int\frac{db}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i(q-s)(p-b)/\hbar}f\left(q,b\right)g\left(s,p\right) \tag{3.142}$$

  che diviene:

$$f *_{M(w)} g\left(q,p\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(i\hbar\right)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial p^k}f\left(q,p\right)\frac{\partial^k}{\partial q^k}g\left(q,p\right) \tag{3.143}$$

  ed è equivalente a quello standard attraverso:

$$\left(T^{(w)}f\right)\left(\epsilon,\eta\right) = \frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)^2}\int dx\,dk\,dq\,dp\,e^{-ixk/2\hbar}f\left(q,p\right)e^{-ix(\phi-p)/\hbar}e^{ik(\epsilon-q)/\hbar} \tag{3.144}$$

Questi due esempi sono particolarmente interessanti anche perchè offrono una differente realizzazione alla nozione di equivalenza introdotta. Una manipolazione formale, che acquista un significato effettivo qualora si restringa ad un opportuno sottoinsieme la classe delle funzioni considerate, porta a scrivere l'azione dell'operatore che realizza l'equivalenza come:

$$\left(T^{(w\pm)}f\right)\left(\epsilon,\phi\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\pm\frac{i\hbar}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^n\cdot f\left(\epsilon,\phi\right) \tag{3.145}$$

dove il simbolo $\pm$ indica a quale dei due esempi ci si riferisca. Questo permette di assumere che l'operatore si scriva come:

$$T^{(w\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n T_n^{(w\pm)}$$

con

$$T_n^{(w\pm)} = \frac{(\pm 1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right)^n$$

Questa forma dell'operatore è quella più naturalmente correlata con la scrittura dei prodotti deformati in termini di serie di potenze nel parametro di deformazione. Infatti il prodotto di Moyal:

$$(f *_M g)(q,p) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n+m} \frac{(-1)^m}{n!m!} \frac{\partial^m}{\partial q^m} \frac{\partial^n}{\partial p^n} f(q,p) \frac{\partial^n}{\partial q^n} \frac{\partial^m}{\partial p^m} g(q,p)$$

si può anche leggere come:

$$(f *_M g)(q,p) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^s M_s(f,g)$$

avendo definito M_s come degli operatori bidifferenziali di ordine s:

$$M_s(f,g) = \sum_{n+m=s} \frac{(-1)^m}{n!m!} \frac{\partial^m}{\partial q^m} \frac{\partial^n}{\partial p^n} f(q,p) \frac{\partial^n}{\partial q^n} \frac{\partial^m}{\partial p^m} g(q,p)$$

Analogamente, per i prodotti di Moyal pesati, si ha:

$$\left(f *_{M(w\pm)} g\right)(q,p) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^s M_s^{(w\pm)}(f,g)$$

in cui:

$$M_s^{(w+)}(f,g) = \frac{(-2)^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial q^k} \frac{\partial^k g}{\partial p^k}$$

mentre:

$$M_s^{(w-)}(f,g) = \frac{2^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial p^k} \frac{\partial^k g}{\partial q^k}$$

La relazione di equivalenza:

$$T^{(w)}(f *_{M(w)} g) = \left(T^{(w)} f\right) *_M \left(T^{(w)} g\right)$$

diviene una uguaglianza ad ogni ordine delle espressioni formali in $\frac{i\hbar}{2}$ [3]:

$$\sum_{a+b=s} T_a^{(w\pm)}[M_b^{(\pm w)}(f,g)] = \sum_{t+u+v=s} M_t\left(T_u^{(w\pm)} \cdot f, T_v^{(w\pm)} \cdot g\right) \tag{3.146}$$

3.3.4 Sulla mappa di Weyl per strutture simplettiche costanti

Un ulteriore passo nello studio di questi temi è l'analisi delle proprietà di trasformazione dell'espressione del prodotto di Moyal. In particolare, si considereranno trasformazioni lineari nello spazio vettoriale su cui è definito il sistema di Weyl attraverso cui è stato introdotto. Quanto si è già discusso a proposito dei sistemi di Weyl, indica che ciò è equivalente a studiare una definizione di mappa di Weyl nel caso in cui la struttura simplettica sia costante, ma non necessariamente nella forma canonica.

La definizione di mappa di Weyl chiarisce che essa dipende da alcuni ingredienti specifici. Il primo è il concetto di trasformata di Fourier simplettica. Come si è discusso nella digressione, si assume che, con le notazioni già utilizzate:

$$T \in \mathcal{A}ut\left(\mathbb{R}^2\right) \quad T\left(q,p\right) = \left(\tilde{q},\tilde{p}\right)$$

Qui $(\tilde{q},\tilde{p})$ rappresentano il sistema di coordinate in cui la struttura simplettica ha la forma canonica e inoltre $\omega_T = T^t\omega_D T$ è la matrice che la rappresenta nelle coordinate (q,p):

$$\check{f}_{s_T}\left(\eta,\xi\right) = \int \frac{d\tilde{q}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\tilde{p}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(f \circ T^{-1}\right)\left(\tilde{q},\tilde{p}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_T[(q,p);(\xi,\eta)]}$$

In questa espressione q e p vanno intese come funzioni di $\tilde{q}$ e $\tilde{p}$, per cui:

$$\check{f}_{s_T}\left(\eta,\xi\right) = \left(f \circ \check{T}^{-1}\right)_s\left(T\left(\eta,\xi\right)\right)$$

Pure il secondo ingrediente è stato già illustrato. Si è definito un sistema di Weyl rispetto ad una struttura simplettica in un sistema di coordinate in cui non assume la forma canonica:

$$\hat{W}_T\left(q,p\right) = \hat{W}\left(T\left(q,p\right)\right)$$

L'ultimo è l'elemento di misura rispetto al quale si considera l'integrazione. Il modo più naturale di legare questi elementi consiste nel definire:

$$\hat{\Omega}_T\left(f\right) \equiv \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} d\xi \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} d\eta \check{f}_{s_T}\left(\xi,\eta\right) \hat{W}_T\left(\xi,\eta\right) \tag{3.147}$$

in cui J è il determinante della trasformazione T. Essa risulta uguale a:

$$\hat{\Omega}_T\left(f\right) = \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} d\xi \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} d\eta \left(f \circ \check{T}^{-1}\right)_s\left(T\left(\xi,\eta\right)\right) \hat{W}\left(T\left(\xi,\eta\right)\right)$$

perciò, attraverso la trasformazione di coordinate definita proprio da T:

$$\left(\xi,\eta\right) \xrightarrow{T} \left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)$$

si ha:

$$\hat{\Omega}_T\left(f\right) = \int \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\tilde{\eta}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(f \circ \check{T}^{-1}\right)_s \left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right) \hat{W}\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)$$

ovvero:

$$\hat{\Omega}_T\left(f\right) = \hat{\Omega}\left(f \circ T^{-1}\right) \tag{3.148}$$

Come per la definizione di un sistema di Weyl per una struttura simplettica costante arbitraria si era fatto ricorso alla riduzione alla forma normale attraverso l'applicazione T, e si era posto $\hat{W}_T(z) = \hat{W}(T(z))$, così nella definizione di mappa di Weyl, che è un'applicazione definita su funzioni, si ha:

$$\hat{\Omega}_T(f) = \hat{\Omega}(T^* f)$$

in cui $T^* f$ è il pull-back indotto dalla trasformazione T: esso si può leggere come il modo più immediato per introdurre una associazione fra funzioni su uno spazio vettoriale, corrispondente ad una trasformazione, in questo caso lineare, proprio nello spazio.

Anche questa nuova mappa di Weyl si può invertire:

$$f(q,p) = \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dx \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dk\, e^{-i\omega_T[(x,k);(q,p)]/\hbar} Tr[\hat{\Omega}_T(f)\, \hat{W}_T^\dagger(q,p)] \tag{3.149}$$

Infatti, la relazione precedente:

$$f(q,p) = \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dx \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dk\, e^{-i\omega_T[(x,k);(q,p)]/\hbar} Tr[\hat{\Omega}_T\left(f \circ T^{-1}\right) \hat{W}^\dagger(T(q,p))]$$

diviene, sempre attraverso un cambiamento di coordinate:

$$= \int \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\tilde{k}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-i\omega_D[(\tilde{x},\tilde{k});T(q,p)]/\hbar} Tr[\hat{\Omega}_T\left(f \circ T^{-1}\right) \hat{W}^\dagger(T(q,p))]$$

e visto che questa è la mappa di Wigner ordinaria, si ha proprio:

$$= \left(f \circ T^{-1}\right)(T(q,p))$$

cioè la funzione f valutata nel punto di coordinate (q,p).

Questo indica che si può definire un nuovo prodotto deformato:

$$f *_M^T g \equiv \hat{\Omega}_T^{-1}\left(\hat{\Omega}_T(f) \circ \hat{\Omega}_T(g)\right) \tag{3.150}$$

Un calcolo diretto prova che, nel caso di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla struttura simplettica menzionata nel capitolo precedente:

$$\left(f *_M^T g\right)(q,p) = f(q,p)\,[e^{-\frac{i\hbar}{2}\frac{1}{\Delta}\left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}}\right)}]g(q,p) \tag{3.151}$$

Se si analizza per un istante ancora la mappa di Wigner, e si pone:

$$f_{\hat{A}}^{(T)}(q,p) \equiv \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dx \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dk e^{-i\omega_T[(x,k);(q,p)]/\hbar} Tr[\hat{A}\hat{W}_T^\dagger(q,p)] \tag{3.152}$$

si vede che è uguale a:

$$= \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dx \int \sqrt{\frac{J}{2\pi\hbar}} dk e^{-i\omega_T[(x,k);(q,p)]/\hbar} Tr[\hat{A}\hat{W}_T^\dagger (T(q,p))]$$

$$= \int \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{d\tilde{k}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\omega_D[(\tilde{x},\tilde{k});T(q,p)]/h} Tr[\hat{A}\hat{W}^\dagger (T(q,p))]$$

Ciò indica che:

$$f_{\hat{A}}^{(T)}(q,p) = f_{\hat{A}}(T(q,p)) \tag{3.153}$$

In generale, l'estensione di queste definizioni, e la prova di questi risultati, è immediata nel caso di un generico spazio vettoriale simplettico S. Se x^a definisce un sistema di coordinate in cui la struttura simplettica è rappresentata dalla matrice ω_T e l'automorfismo T è quello che la trasforma nella forma canonica:

$$(x^a) \xrightarrow{T} \left(\tilde{x}^b\right)$$

allora, con $f, g \in \mathcal{F}(S)$, si definisce un prodotto di Moyal:

$$\left(f *_M^T g\right)(x^a) = \left(\hat{\Omega}_T^{-1}\left(\hat{\Omega}_T^{-1}(f) \circ \hat{\Omega}_T^{-1}(g)\right)\right)(x^a) \tag{3.154}$$

Dai risultati provati, si ha che:

$$= \left(\hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{\Omega}_T^{-1}(f) \circ \hat{\Omega}_T^{-1}(g)\right)\right)(T(x^a))$$

$$= \left[\hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{\Omega}^{-1}\left(f \circ T^{-1}\right) \circ \hat{\Omega}^{-1}\left(g \circ T^{-1}\right)\right)\right](T(x^a))$$

e quindi:

$$\left(f *_M^T g\right)(x^a) = \left(\left(f \circ T^{-1}\right) *_M \left(g \circ T^{-1}\right)\right)(T(x^a)) \tag{3.155}$$

Un'analisi dettagliata mostra che:

- se si evidenzia il termine di ordine zero è:

  $$\left(f *_M^T g\right)(x^a) = \left(\left(f \circ T^{-1}\right)\left(g \circ T^{-1}\right)\right)(T(x^a)) + o(\hbar) =$$

  Secondo la definizione di prodotto:

  $$= [\left(f \circ T^{-1}\right)(T(x^a))] \cdot [\left(g \circ T^{-1}\right)(T(x^a))]$$

  ma ciò è:

  $$[f(x^a)] \cdot [g(x^a)] = (f \cdot g)(x^a)$$

  quindi all'ordine zero questo prodotto si riduce a quello usuale, commutativo, detto pointwise.

- poi si evidenzia il termine di ordine uno:

$$\left(f *_M^T g\right)(x^a) - (fg)(x^a) = -\frac{i\hbar}{2}\left(\{f \circ T^{-1}, g \circ T^{-1}\}\right) \circ (T(x^a)) + o\left(\hbar^2\right)$$

esso coincide con:

$$= -\frac{i\hbar}{2}\Lambda_{ab}^{(D)}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}\left(f \circ T^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^b}\left(g \circ T^{-1}\right)\right)\Big|_{\tilde{x}^j = T\left(x^k\right)}$$

in cui $\Lambda_{ab}^{(D)}$ rappresenta il tensore di Poisson rispetto alla struttura simplettica canonica. Svolgendo le derivazioni si vede che questa espressione si riduce a:

$$= -\frac{i\hbar}{2}\Lambda_{ab}^{(D)}\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^a}\frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial g}{\partial x^t}\Big|_{\tilde{x}^j = T\left(x^k\right)}$$

visto che la trasformazione è lineare, lo jacobiano non dipende dal punto, perciò si ha:

$$\Lambda_{ab}^{(D)}\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^a}\frac{\partial x^t}{\partial \tilde{x}^b}\Big|_{\tilde{x}^j = T\left(x^k\right)} = \Lambda_{nt}^{(T)}$$

in cui $\Lambda_{nt}^{(T)}$, che è la matrice che rappresenta la struttura di Poisson nelle coordinate x^a.

In modo analogo si possono estendere questi argomenti ai termini di ordine successivo, per cui, in definitiva:

$$\left(f *_M^T g\right)(x^a) = f\left(x^i\right)[e^{-\frac{i\hbar}{2}\Lambda_{ab}^{(T)}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^a}\wedge\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^b}}]g\left(x^j\right) \tag{3.156}$$

in cui $\Lambda_{ab}^{(T)}$ è il tensore di Poisson definito da ω_T.

Questa analisi mostra pure che la forma del prodotto deformato così definito non cambia se si compone T con un'arbitraria trasformazione simplettica: esso è, come pure altre strutture già introdotte, equivariante per l'azione del gruppo simplettico lineare. Il dettaglio della dimostrazione permette inoltre di chiarire i motivi per cui si è scelto di definire la mappa di Weyl attraverso la nozione di trasformata di Fourier simplettica: se si fosse utilizzata quella usuale non si sarebbe ottenuta questa equivarianza, a meno di scegliere trasformazioni che conservassero pure la struttura euclidea.

La domanda ora naturale è se esista un concetto di equivalenza fra prodotti deformati ottenuti mediante mappe di Weyl relative a strutture simplettiche differenti. Per provare a rispondere a questa questione, ed inquadrarla in una prospettiva in cui è possibile confrontarla con specifici temi di studio, è opportuno rileggere quanto introdotto.

Attraverso la nozione di sistema di Weyl e di mappa di Weyl, e della sua inversa, la mappa di Wigner, si è definito, in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$, un prodotto associativo, ma non commutativo, detto prodotto di Moyal. Come si è visto, esso è non locale, e qualora si restringa l'algebra $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$ ad opportuni elementi, $f *_M g$ è esprimibile come somma di una serie di termini in potenze di $\hbar$, ognuno definito dall'azione di uno specifico operatore bidifferenziale sulla coppia (f, g). Si era cioè posto:

$$f *_M g \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^s M_s\left(f, g\right)$$

e si era già menzionato che un simile prodotto è una deformazione di quello usuale, poichè dipende da un parametro, qui $\hbar$, e si riduce a quello usuale nel limite in cui $\hbar \to 0$.

In generale si definisce [3] prodotto deformato, in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$, un'operazione che si esprime come una serie formale[13] in un parametro (qui λ) di operatori, per semplicità assunti come bidifferenziali di ordine λ:

$$f * g = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C_k\left(f, g\right)$$

con:

$$C_0\left(f, g\right) = f \cdot g$$
$$C_1\left(f, g\right) = -\{f, g\}$$

e:

$$\sum_{s+t=n} C_s\left(C_t\left(f, g\right), h\right) = \sum_{s+t=n} C_s\left(f, C_t\left(g, h\right)\right)$$

$\forall\ f, g, h\ \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$ e $n \in \mathbb{N}$ (questa è la condizione per cui il prodotto sia associativo). In quest'ottica, due prodotti deformati, $*_1$ e $*_2$, si dicono equivalenti se esiste un operatore:

$$S \equiv \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n S_n$$

per cui:

$$S\left(f *_1 g\right) = \left(Sf\right) *_2 \left(Sg\right)$$

in cui l'uguaglianza va intesa ordine per ordine in potenze di λ.

Quanto già detto ha provato che un prodotto di Moyal pesato è equivalente al prodotto di Moyal non pesato. Ma si può vedere che il prodotto deformato ottenuto da un sistema di Weyl relativo ad una struttura simplettica non canonica non è equivalente, in questa accezione, a quello standard.

[13] Qui formale va inteso nel significato di non studiare in dettaglio il problema della convergenza di questa serie.

Infatti, se si considerano i due prodotti di Moyal esplicitamente analizzati, $*_M$ e $*_M^T$, il secondo ottenuto da una struttura simplettica non canonica, e si esplicitano i primi termini:

$$f *_M g = f{\cdot}g - \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + o\left(\hbar^2\right)$$

$$f *_M^T g = f{\cdot}g - \frac{i\hbar}{2\Delta}\{f, g\} + o\left(\hbar^2\right)$$

allora il problema è ottenere una successione di operatori del tipo:

$$S = \mathbf{1} + \frac{i\hbar}{2}S_1 + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 S_2 + \dots$$

per cui vale un uguaglianza:

$$S\left(f *_M^T g\right) = (Sf) *_M (Sg)$$

essa, sviluppando nei singoli termini, diviene:

$$S[f{\cdot}g - \frac{i\hbar}{2\Delta}\{f, g\} + o\left(\hbar^2\right)] = (Sf)\cdot(Sg) - \frac{i\hbar}{2}\{Sf, Sg\} + o\left(\hbar^2\right)$$

da cui:

$$f{\cdot}g - \frac{i\hbar}{2\Delta}\{f, g\} + \frac{i\hbar}{2}S_1\left(f{\cdot}g\right) o\left(\hbar^2\right) = f{\cdot}g + \frac{i\hbar}{2}[(S_1 f)\, g + f\,(S_1 g)] - \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + o\left(\hbar^2\right)$$

Come si vede , i termini all'ordine 0 in $\hbar$ coincidono; ma se si confrontano quelli all'ordine 1 si ha per S_1 una condizione del tipo:

$$\{f, g\}\left(1 - \frac{1}{\Delta}\right) = (S_1 f)\, g + f\,(S_1 g) - S_1\left(f{\cdot}g\right)$$

Essa è impossibile da soddisfare poichè, il membro sinistro è antisimmetrico in f e g, mentre quello destro è simmetrico.

Capitolo 4

Un'applicazione del formalismo à la Weyl-Wigner: una realizzazione dell'analogo classico della mappa di Jordan-Schwinger nell'algebra di Moyal

4.1 Introduzione

L'analisi di questo capitolo costituisce un'applicazione del formalismo sviluppato precedentemente. La mappa di Jordan-Schwinger è un'applicazione che permette di rappresentare algebre di Lie in termini di operatori di creazione e distruzione su uno spazio di Hilbert, ed è perciò divenuto uno strumento fondamentale nello studio dei problemi collegati al tema della seconda quantizzazione.

In questo capitolo si illustrano alcuni risultati già noti circa un analogo classico di questa mappa: è possibile infatti definire una rappresentazione di un'algebra di Lie in termini di funzioni definite su una varietà in cui il ruolo del commutatore è svolto dalla parentesi di Poisson. In particolare, il contributo originale è nel definire una rappresentazione di un'arbitraria algebra di Lie tridimensionale in termini di funzioni definite su $\mathbb{R}^4$ in cui il ruolo del commutatore èsvolto dalla parentesi di Moyal. In questo senso, è possibile leggere questa realizzazione come una deformazione dell'analogo classico della mappa di Jordan-Schwinger.

4.2 Sulla mappa di Jordan-Schwinger

La nozione di ciò che oggi è nota come mappa di Jordan-Schwinger fu introdotta da Schwinger [8] [20] per ottenere una definizione degli operatori che formalizzano, nella teoria quantistica della dinamica di uno o più punti materiali, le osservabili di momento angolare in termini di operatori di creazione e distruzione. Se gli operatori $\hat{J}_s$ rappresentano l'osservabile componente del momento angolare nella direzione s, allora, come noto, si definisce[1]:

$$[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\epsilon_{abc}\hat{J}_c$$

Queste regole di commutazione, o, più propriamente, questa rappresentazione dell'algebra $su(2)$ in termini di operatori autoaggiunti, possono essere riespresse attraverso la definizione di:

$$\hat{J}_+ \equiv \hat{J}_1 + i\hat{J}_2$$

$$\hat{J}_- \equiv \hat{J}_1 - i\hat{J}_2$$

Essi non sono autoaggiunti, quindi non sono correlati a delle grandezze osservabili. Si vede che:

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = \hat{J}_3$$

$$[\hat{J}_\pm, \hat{J}_3] = \mp\hat{J}_\pm$$

Se in questo spazio di Hilbert, $\mathcal{H}_s$, si definiscono due coppie di operatori di creazione e distruzione indipendenti:

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = 1$$

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = [\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger] = 0$$

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger] = [\hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger] = 0$$

a cui corrispondono operatori numero

$$\hat{n}_1 = \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 \qquad \hat{n}_2 = \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1^\dagger$$

allora si può vedere che una nuova realizzazione degli operatori che soddisfano queste regole di commutazione è data da:

$$\hat{J}_+ = \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2$$

$$\hat{J}_- = \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1$$

$$\hat{J}_3 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)$$

[1] In questa sezione si tralascia la dipendenza esplicita da $\hbar$.

Queste considerazioni possono essere generalizzate. Si può provare che tutte le rappresentazioni irriducibili dell'algebra $su(2)$ possono essere costruite su $\mathcal{H}_s$ utilizzando come base quella dei vettori che rappresentano autostati simultanei dei due operatori numero, e definire gli operatori $\hat{J}_+$; $\hat{J}_-$; $\hat{J}_3$ sempre in termini di forme quadratiche negli operatori di creazione e distruzione posti. Ciò significa che, in questo modo, è possibile descrivere la dinamica di una particella con un arbitrario valore del momento angolare orbitale e dello spin attraverso questo formalismo. Inoltre questa può essere vista come un caso particolare della procedura di seconda quantizzazione, secondo la quale i generatori di una qualunque algebra di Lie, per la quale è definita una rappresentazione matriciale, possono essere realizzati come forma quadratiche negli operatori di creazione e distruzione, di tipo bosonico o fermionico.

4.3 Sull'analogo classico della mappa di Jordan-Schwinger

Come si è illustrato, si considera mappa di Jordan-Schwinger una realizzazione, più propriamente una rappresentazione, di un'algebra di Lie finito-dimensionale, in termini di operatori ottenuti come forme quadratiche di operatori di creazione e distruzione. In questa prospettiva, si può studiare il problema di ottenere una rappresentazione di algebre di Lie a dimensione finita in termini di funzioni definite su un'opportuna varietà: la struttura rispetto alla quale definire l'analogo della nozione di commutatore nell'insieme degli operatori sarà, in modo del tutto naturale in virtù di quanto già sottolineato, la parentesi di Poisson. Una simile realizzazione è quella che viene considerata mappa di Jordan-Schwinger classica [12].

Per essere più precisi, si considera un'algebra di Lie a dimensione finita, $\mathcal{G}$. Essa è uno spazio vettoriale a dimensione finita in cui è definito un commutatore, ovvero un'applicazione:

$$[\cdot,\cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$$

che sia bilineare, antisimmetrica, e soddisfi l'identità di Jacobi. Se M è una varietà simplettica allora si considera la struttura di Poisson associata e si definisce mappa di Jordan-Schwinger classica, F, una realizzazione di $\mathcal{G}$ come sottoalgebra di Poisson di $\mathcal{F}(M)$:

$$F : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{F}(M)$$

con:

$$\{F(a), F(b)\} = F([a,b]) \tag{4.1}$$

Equivalentemente, si può considerare un'algebra di Lie come definita dall'introduzione, su uno spazio vettoriale, di quantità, dette costanti di struttura,

c_{ijk}, per cui, se e_a definiscono una base di questo spazio:

$$[e_i, e_j] = c_{ijk} e_k$$

con:

- $c_{ijk} = -c_{jik}$ per l'antisimmetria
- $c_{ijn}c_{nks} + c_{jkn}c_{nis} + c_{kin}c_{njs} = 0$ dall'identità di Jacobi

Allora la mappa di Jordan-Schwinger classica è definita da:

$$\{F(e_i), F(e_j)\} = F([e_i, e_j]) = c_{ijk} F(e_k) \tag{4.2}$$

Si può dimostrare che, fissata un'arbitraria algebra di Lie, $\mathcal{G}$, a dimensione finita, esiste sempre una realizzazione in termini di una sottoalgebra di Poisson di $\mathcal{F}(M)$, in cui M è un'opportuna sottovarietà simplettica.

4.4 Una realizzazione dell'analogo classico della mappa di Jordan-Schwinger nell'algebra di Moyal

Ciò che è già stato esplicitamente realizzato [12] è una soluzione a questo problema nel caso di una generica algebra di Lie di dimensione 3. In dettaglio, è stata ottenuta una realizzazione della mappa di Jordan-Schwinger classica per una qualunque algebra tridimensionale in termini di funzioni definite su $M = \mathbb{R}^4$ secondo la struttura simplettica nella forma canonica; $\omega = dq_i \wedge dp_i$ in coordinate.

Alla luce di quanto sviluppato nei capitoli precedenti è chiaro che in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^4\right)$ si può definire una struttura di algebra non commutativa, introducendo il prodotto di Moyal, ottenuto attraverso la mappa di Weyl e Wigner rispetto proprio alla struttura simplettica considerata.

Il risultato interessante, e del tutto originale, è che, rispetto alla parentesi di Moyal in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^4\right)$, che è una struttura di Poisson nell'algebra $\left(\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^4\right), *_M\right)$, si ha la realizzazione di una mappa con le stesse proprietà di quella di Jordan-Schwinger classica, da $\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^4\right)$. In altre parole, si ha che esiste una mappa:

$$F_M : \mathcal{G} \to \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^4\right)$$

per cui, se $\mathcal{G}$ è un'arbitraria algebra tridimensionale:

$$\{F_M(e_i), F_M(e_j)\}_M = F_M([e_i, e_j]) \tag{4.3}$$

La dimostrazione dell'esistenza di questa mappa sarà diretta. Si considererà ogni caso di algebra di Lie a 3 dimensioni (attraverso la scelta dei valori dei coefficienti secondo la classificazione di Bianchi) e si esibirà una realizzazione di esse in termini di funzioni su $\mathbb{R}^4$: la verifica del fatto che queste funzioni soddisfino la condizione (4.3) condurrà inoltre ad un'ulteriore analisi delle caratteristiche del prodotto di Moyal.

- il primo esempio che si considera è quello dell'algebra $SB\,(2)$:

$$[x, y] = y$$

$$[x, w] = w$$

$$[y, w] = 0$$

  Si definiscono:

$$F\,(x) = q_1 + q_2$$

$$F\,(y) = e^{p_1}$$

$$F\,(w) = e^{p_2}$$

  Per semplificare le notazioni, si tralascerà di scrivere $F\,(x)$ e si identificherà proprio l'elemento dello spazio vettoriale con la funzione da cui è rappresentato: dapprima si vede che questa è una realizzazione della mappa di Jordan-Schwinger classica rispetto alla struttura di Poisson:

$$\{x, y\} = \{q_1 + q_2, e^{p_1}\} = e^{p_1} = y$$

$$\{x, w\} = \{q_1 + q_2, e^{p_2}\} = e^{p_2} = w$$

$$\{w, x\} = \{e^{p_2}, e^{p_1}\} = 0$$

  Ora bisogna valutare il prodotto di Moyal fra queste funzioni: l'aspetto da sottolineare è che w e y non appartengono all'insieme delle funzioni per le quali l'espressione integrale del prodotto di Moyal, (questa volta in $\mathbb{R}^4$, ma l'estensione è semplicissima) si riduce alla serie di termini in potenze del parametro $\hbar$. Perciò è necessario valutarlo proprio a partire dall'espressione integrale. In appendice è presentato il dettaglio di questo calcolo: si può vedere che:

$$x *_M y = (q_1 + q_2)\, e^{p_1} - \frac{i\hbar}{2} e^{p_1}$$

  ma esso è proprio uguale a:

$$x *_M y = (q_1 + q_2)\, e^{p_1} - \frac{i\hbar}{2} \{q_1 + q_2, e^{p_1}\} = xy - \frac{i\hbar}{2} \{x, y\}$$

  Analogamente, si ha pure che.

$$x *_M w = xw - \frac{i\hbar}{2} \{x, w\}$$

$$y *_M w = yw$$

Da queste espressioni si vede, antisimmetrizzandole secondo la definizione, che:

$$\{x, y\}_M = y$$

$$\{x, w\}_M = w$$

$$\{w, y\}_M = 0$$

e questo chiarisce che queste funzioni sono una realizzazione delle proprietà della mappa F_M

- il secondo esempio è quello dell'algebra di $su(2)$:

$$[x, y] = w$$

$$[y, w] = x$$

$$[w, x] = y$$

Si considera la rappresentazione in cui:

$$x = \frac{1}{2}(q_1 q_2 + p_1 p_2)$$

$$y = \frac{1}{2}(p_1 q_2 + q_1 p_2)$$

$$w = \frac{1}{4}\left(p_1^2 + q_1^2 - q_2^2 - p_2^2\right)$$

Come si può vedere, queste funzioni definiscono una realizzazione della mappa di Jordan-Schwinger classica:

$$\{x, y\} = w$$

$$\{y, w\} = x$$

$$\{w, x\} = y$$

La valutazione del prodotto di Moyal in questo caso è immediata: visto che le funzioni sono polinomi, esso si ottiene formalmente considerando, come provato in un'appendice del precedente capitolo, valida la formula che lo rappresenta come una serie di operatori bidifferenziali. Grazie a ciò è semplice vedere che:

$$x *_M w = xw - \frac{i\hbar}{2}\{x, w\}$$

$$y *_M w = yw - \frac{i\hbar}{2}\{y, w\}$$

$$x *_M y = xy - \frac{i\hbar}{2}\{x, y\}$$

e che quindi:

$$\{x, y\}_M = \{x, y\}$$
$$\{y, w\}_M = \{y, w\}$$
$$\{w, x\}_M = \{w, x\}$$

- Il terzo caso è quello dell'algebra $sl\,(2, \mathbb{R})$:

$$[x, y] = w$$
$$[y, w] = x$$
$$[w, x] = -y$$

Le funzioni:

$$x = \frac{1}{2}\left(q_1 p_2 + q_2 p_1\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(q_1 p_2 - q_2 p_1\right)$$
$$x = \frac{1}{2}\left(q_1 p_1 - q_2 p_2\right)$$

Anche in questo caso il calcolo del prodotto di Moyal fra queste funzioni è immediato, anche in questo caso si vede che già il termine al second'ordine in $\hbar$ è nullo, per cui:

$$x *_M w = xw - \frac{i\hbar}{2}\{x, w\}$$
$$y *_M w = yw - \frac{i\hbar}{2}\{y, w\}$$
$$x *_M y = xy - \frac{i\hbar}{2}\{x, y\}$$

e perciò:

$$\{x, y\}_M = \{x, y\}$$
$$\{y, w\}_M = \{y, w\}$$
$$\{w, x\}_M = \{w, x\}$$

- Il quarto caso è quello dell'algebra E_2 che rappresenta i generatori del gruppo euclideo in $\mathbb{R}^2$:

$$[x, y] = w$$
$$[y, w] = 0$$
$$[w, x] = y$$

La mappa di Jordan-Schwinger classica è realizzata dalle funzioni:

$$x = p_1 + p_2$$
$$y = sin\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)$$
$$w = -cos\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)$$

Valutare il prodotto di Moyal $y *_M w$ é immediato poichè dipendono da coordinate che commutano, nel significato che le variabili q_i hanno parentesi di Poisson nulla fra di loro, e questa condizione, come dettagliato in appendice, fa sìche il loro prodotto di Moyal si riduca al prodotto usuale:

$$w *_M y = y *_M w = wy$$

per cui:

$$\{y, w\}_M = 0$$

Per valutare il prodotto di Moyal fra y o w e la funzione x si ricorre alla procedura già spiegata nel primo caso, quello dell'algebra $SB\,(2)$, a proposito delle funzioni esponenziali. Essa conduce al risultato:

$$x *_M w = xw - \frac{i\hbar}{2}\{x, w\}$$
$$x *_M y = xy - \frac{i\hbar}{2}\{x, y\}$$

e questo indica che anche in questo caso si è definita un analogo della mappa di Jordan-Schwinger per l'algebra di Moyal su $\mathbb{R}^4$

- Il quinto caso è quello dell'algebra di Poincarè tridimensionale:

$$[x, y] = w$$
$$[y, w] = 0$$
$$[w, x] = -y$$

Con gli stessi ragionamenti svolti nel caso precedente si può vedere che le funzioni:

$$x = p_1 + p_2$$
$$y = sinh\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)$$
$$w = -cosh\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)$$

costituiscono una realizzazione della mappa di Jordan-Schwinger classica sia rispetto alla struttura di Poisson ordinaria, rispetto al prodotto pointwise commutativo, che rispetto alla struttura di parentesi di Moyal.

- Il sesto caso è quello dell'algebra di Heisenberg-Weyl:

$$[x, y] = w$$

$$[y, w] = 0$$

$$[w, x] = 0$$

Per esso si vede che le funzioni:

$$x = q_1$$

$$y = q_2 p_1$$

$$w = q_2$$

sono una soluzione al problema posto, così come per l'ultimo caso, quello dell'algebra tridimensionale abeliana:

$$[x, y] = 0$$

$$[y, w] = 0$$

$$[w, x] = 0$$

si ha che una soluzione è:

$$x = q_1 p_1$$

$$q_2 p_2$$

$$w = 1$$

Capitolo 5

Sulle teorie di gauge su spazi non commutativi

5.1 Introduzione

In questo capitolo è sviluppata la nozione di teoria di gauge su spazi non commutativi. La prima sezione introduce la nozione di simmetria di gauge in una teoria di campo classica: in essa è illustrato come la richiesta di invarianza della teoria rispetto all'azione locale di un gruppo porti alla definizione del concetto di derivazione covariante. La seconda sezione è dedicata allo studio dell'estensione di ciò a spazi non commutativi. Dapprima si definisce uno spazio non commutativo e se ne caratterizza l'insieme delle funzioni, alla luce di quanto già sviluppato, in termini di algebra di Moyal. Poi si introduce il concetto di azione locale di un gruppo su questo spazio, e si sottolinea come porti ad una teoria dalle caratteristiche profondamente diverse da quella usuale: in essa la derivazione covariante, ad esempio, è definita in modo algebrico, non potendosi usare il concetto di limite del rapporto incrementale. Infine se ne studia l'insieme dei generatori e si dimostra che proprio lo sviluppo del formalismo à la Moyal permette una caratterizzazione originale e compiuta delle regole di commutazione di quest'algebra di generatori. Ulteriori dettagli, e un'analisi delle possibili applicazioni di esso in una teoria di campo su spazi non commutativi, sono in [10].

5.2 Sulla nozione di simmetria di gauge

Il concetto di simmetria di gauge in una teoria di campo classica fu introdotto da H.Weyl nel 1929, sulla scorta dell'analisi della teoria della relatività generale. Il principio di equivalenza, ipotizzato da Einstein, era stato formalizzato attraverso la richiesta che le equazioni della dinamica fossero covarianti per un'arbitraria trasformazione di coordinate dello spaziotempo minkowskiano. Proprio questa richiesta aveva condotto ad una teoria geometrica dell'interazione gravitazionale. L'idea di Weyl fu ipotizzare che l'interazione elettromagnetica fra particelle cariche si potesse formulare attraverso l'introduzione di una simmetria opportuna nella teoria che descrivesse la dinamica libera di queste stesse particelle. Questa idea fu ripresa e sviluppata in seguito, negli anni Cinquanta, nei lavori di Yang e Mills: oggi le teorie di gauge, come vengono definite, nella loro versione quantistica sono in grado di formalizzare sia l'interazione elettromagnetica, che quella debole e quella forte, in un linguaggio comune che si presterebbe ad una possibile unificazione.

Una teoria che descrive l'evoluzione del campo $\psi(x)$, detto genericamente campo di materia (qui x sta ad indicare un sistema di coordinate in uno spazio vettoriale a dimensione finita, mentre ψ può eventualmente rappresentare un multipletto, ovvero una n-upla di componenti: in altre parole: $\psi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^s) \otimes \mathbb{C}^n$) e che ammette una formulazione di tipo lagrangiano, con[1]:

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M(\psi, \partial_\mu \psi) \tag{5.1}$$

avrà in generale delle simmetrie descritte dall'azione di opportuni gruppi sullo spazio $\mathbb{C}^n$ a cui appartengono i multipletti ψ. Queste simmetrie vengono dette globali poichè non dipendono dal punto dello spazio vettoriale in cui si valuta il campo ψ.

Ad esempio, l'equazione di campo di Dirac, in cui ψ, pur essendo uno spinore a 4 componenti, viene letto, in questa accezione, come singoletto, è descritta da una densità lagrangiana:

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{5.2}$$

ed essa è simmetrica per l'azione del gruppo $U(1)$; poichè si vede che, se $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione di campo, è soluzione pure:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \quad \text{con}\, \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

Si dice che una teoria di campo, in principio descritta da una densità lagrangiana $\mathcal{L}_M$ simmetrica rispetto all'azione globale di un gruppo, ha una simmetria di gauge qualora $\mathcal{L}_M$ sia simmetrica rispetto all'azione locale dello stesso gruppo, cioè dipendente dal punto in cui è valutato il campo ψ. Per proseguire nell'esempio a proposito del campo di Dirac, si definisce azione locale del gruppo $U(1)$ quella per cui:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{5.4}$$

Come è chiaro, $\mathcal{L}_D$ non è invariante per questa azione locale del gruppo $U(1)$. Il principio di gauge richiede di definire, a partire da $\mathcal{L}_D$ una nuova densità lagrangiana che invece rispecchi questa simmetria: questa nuova

[1] Qui $\partial_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}$.

teoria descriverà l'interazione fra il campo di materia e un particolare nuovo campo. In questo caso si tratterà del campo elettromagnetico.

A questo punto è possibile esplorare con maggiore precisione e cura qual è una caratterizzazione geometrica di una teoria di gauge. Per fare ciò si considererà una densità lagrangiana $\mathcal{L}_M$ della forma già considerata, simmetrica rispetto all'azione globale di un gruppo U, per semplicità unitario. Esso potrebbe essere sia abeliano, come $U(1)$, sia non abeliano, come $U(n)$: l'analisi sarà condotta nel caso generico in cui U sia non abeliano.

L'azione locale di questo gruppo viene definita da:

$$\psi^U(x) = U(x)\,\psi(x) \tag{5.5}$$

e l'unitarietà di U permette di scrivere:

$$U(x) = e^{i\alpha_{(k)}(x)T_{(k)}} \tag{5.6}$$

in cui $\alpha_{(k)}(x) \in \mathbb{R}$ e $T_{(k)}$ sono i generatori hermitiani dell'azione del gruppo: l'indice k, su cui si somma, va da 1 alla dimensione del gruppo U.

Come è evidente pure dall'esempio proposto pure per il campo di Dirac, la difficoltà nell'ottenere una densità lagrangiana che abbia la simmetria di gauge richiesta sorge nei termini che presentano derivate del campo. La derivata di ψ nella direzione n^μ è definita dalla procedura di limite:

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)] \tag{5.7}$$

Questa definizione, nel caso in cui si consideri una teoria per la quale ψ è soggetto all'azione locale di un gruppo, non è interessante, poichè presuppone di confrontare il valore del campo in due punti diversi, quindi caratterizzati da proprietà di trasformazione differenti per l'azione del gruppo U. In altre parole, per l'azione del gruppo U, la quantità $\partial_\mu\psi$ non ha una definita legge di trasformazione, e perciò non ha un'interpretazione geometrica utile. Per effettuare correttamente questa procedura di limite si introduce un fattore che compensa le differenti proprietà di trasformazione da un punto all'altro. Si definisce una quantità $V(y,x)$, che dipende dai due punti di coordinate x e y, e che per l'azione locale del gruppo U si trasforma secondo:

$$V(y,x) \xrightarrow{U} U(y)\,V(y,x)\,U^\dagger(x) = V^U(y,x) \tag{5.8}$$

e con:

$$V(x,x) = \mathbf{1} \tag{5.9}$$

in modo tale che per una trasformazione si abbia:

$$V(x,y)\,\psi(y) \xrightarrow{U} U(x)\,V(x,y)\,\psi(y)$$

ovvero che:

$$(V(x,y)\,\psi(y))^U = U(x)\,(V(x,y)\,\psi(y)) \tag{5.10}$$

A questo punto si definisce derivata covariante del campo ψ lungo la direzione n:

$$n_\mu D^\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi (x + \epsilon n) - V (x + \epsilon n, x) \psi (x)] \tag{5.11}$$

Se si assume che anche $V(y, x)$ sia un elemento unitario[2], allora:

$$V (x + \epsilon n, x) = \mathbf{1} + i\epsilon n_\mu A^\mu_{(k)} T_{(k)} + o\left(\epsilon^2\right) \tag{5.12}$$

I campi $A_{(k)}$ vengono detti campi di gauge: essi sono quelli che poi vengono fisicamente identificati con i campi che medieranno le interazioni. Grazie a questa definizione si ha[3] :

$$D^\mu \psi = \partial^\mu \psi - i A^\mu_{(k)} T_{(k)} \tag{5.13}$$

Dalla legge di trasformazione per $V(y, x)$ si vede che l'azione del gruppo di gauge si può definire sui campi $A_{(k)}$:

$$A_{(k)} \xrightarrow{U} \tilde{A}_{(k)}$$

con

$$U (x + \epsilon n) V (x + \epsilon n, x) U^\dagger (x) = 1 + i\epsilon n_\mu \tilde{A}^\mu_{(k)} T_{(k)} + o\left(\epsilon^2\right) \tag{5.14}$$

e si ha:

$$\tilde{A}^\mu_{(k)} T_{(k)} = U (x) A^\mu_{(k)} T_{(k)} U^\dagger (x) - i (\partial^\mu U) U^\dagger (x) \tag{5.15}$$

e quindi:

$$D_\mu \xrightarrow{U} D^U_\mu$$

con:

$$D^U_\mu = \partial_\mu - i\tilde{A}^{(k)}_\mu T^{(k)} \tag{5.16}$$

e si può vedere che:

$$\left(D^U_\mu \psi^U\right)(x) = U (x) (D_\mu \psi) (x) \tag{5.17}$$

Questo è il significato della definizione di derivata covariante: in virtù di essa sarà sufficiente, per ottenere da una $\mathcal{L}_M$, bilineare hermitiana nei campi ψ e $\partial_\mu \psi$, una densità lagrangiana che sia invariante per l'azione locale del gruppo U, sostituire a $\partial_\mu \psi$ il termine $D_\mu \psi$.

[2]Come risulta evidente, questa funzione V ha un ruolo simile a quello che ha, nella formalizzazione della teoria della relatività generale, la mappa di trasporto parallelo da cui si definisce la connessione.

[3]In questa sezione si sta implicitamente considerando la definizione di una struttura metrica rappresentata dalla matrice $g_{\alpha\beta}$, con $g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma} = \delta^\alpha_\sigma$, attraverso la quale definire $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ e $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$

In questo modo è possibile avere una densità lagrangiana che descrive l'interazione fra il campo di materia e i campi di gauge $A_{(k)}$; l'ultima questione è capire quale sia un termine invariante per trasformazioni di gauge che dipenda solo dalle funzioni $A_{(k)}$. A tal fine si può vedere che:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \overset{U}{\to} ,U(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \tag{5.18}$$

e perciò, se si definisce:

$$F^{(j)}_{\mu\nu}T^{(j)} = i[D_\mu, D_\nu] \tag{5.19}$$

si vede pure che:

$$\mathcal{L}_k = tr[F^{(j)}_{\mu\nu}T^{(j)}F^{\mu\nu\,(a)}T^{(a)}] \tag{5.20}$$

(in cui la traccia è valutata sulle matrici T rispetto agli indici -qui non espliciti- di multipletto) è un termine che dipende solo dai campi $A_{(k)}$ ed è invariante di gauge.

5.3 Sulla teoria di gauge su spazi non commutativi

5.3.1 Sulla nozione di spazio non commutativo

Nell'impostazione più immediata, uno spazio non commutativo è uno spazio vettoriale in cui è definito un prodotto non commutativo, in virtù del quale, rispetto alle funzioni che rappresentano le coordinate, si ha: (se $\alpha, \beta \in 1 \dots s$)

$$x_\alpha * x_\beta = x_\alpha \cdot x_\beta + \frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta} \tag{5.21}$$

con $\theta_{\alpha\beta}$ matrice antisimmetrica costante a valori reali, per cui:

$$x_\alpha * x_\beta - x_\beta * x_\alpha \;= [x_\alpha, x_\beta]_* = i\theta_{\alpha\beta} \tag{5.22}$$

Se, per semplicità, si assume che lo spazio vettoriale in esame abbia dimensione pari e che $\theta_{\alpha\beta}$ sia non degenere, allora, alla luce di quanto discusso nei capitoli precedenti, è ragionevole assumere come insieme delle funzioni definite su questo spazio l'unione dell'insieme dei polinomi con quello delle funzioni schwartziane, cioè a decrescenza rapida S^∞. A questo insieme si attribuisce una struttura di algebra definendo in esso il prodotto di Moyal:

$$(f * g) = e^{\frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_{y_\alpha}\partial_{u_\beta}}\; f(y)\, g(u)\big|_{u=y=x} \tag{5.23}$$

Proprio questo si riduce, infatti, per le funzioni coordinate, alla relazione (5.21). Questa algebra verrà indicata col simbolo $\mathcal{A}_\theta$: essa si può leggere come una deformazione, negli elementi $\theta_{\alpha\beta}$, dell'algebra $C^\infty(\mathbb{R}^s)$ delle funzioni infinitamente derivabili con derivate continue in $\mathbb{R}^s$.

Se, come fatto già più volte, si considera il commutatore ottenuto antisimmetrizzando questo prodotto, allora si può definire in $\mathcal{A}_\theta$ una derivazione:

$$\partial_\alpha f = -i\theta_\alpha^\beta [x_\beta, f]_* \quad \text{con}\, \theta_\alpha^\beta \theta_{\beta\sigma} = \delta_{\alpha\sigma} \tag{5.24}$$

Infatti, come provato, l'antisimmetrizzazione di un prodotto associativo definisce un commutatore che soddisfa l'identità di Jacobi e la regola di Leibnitz, rispetto al prodotto considerato.

osservazione. *Sarebbe probabilmente assai interessante provare a definire l'algebra delle funzioni su questo spazio come quella generata dalle coordinate* x_α*:*

$$\mathcal{A}_\theta = \mathcal{C}^* \left(\mathbb{C} \left[[x_1 \dots x_s] \right] / R_\theta \right)$$

Questa scrittura indica di considerare dapprima l'insieme delle serie formali nelle coordinate x_α *con coefficienti complessi, poi quozientarlo rispetto alla relazione* R_θ*,(5.21), ed infine considerare un opportuno completamento. In questa prospettiva, ad esempio, un operatore di derivazione si definisce attraverso la posizione:*

$$\partial_\mu x_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

ed estendendolo a $\mathbb{C}\left[[x_1 \dots x_s]\right]$ *attraverso la regola di Leibnitz. In realtà, come è possibile cogliere in letteratura, il termine di questa procedura di completamento è un tema di studio non ben chiarito [4].*

Parallelamente si potrebbe scegliere di considerare $\mathcal{A}_\theta$ *come l'insieme delle funzioni* $S^\infty(\mathbb{R}^s)$*, sempre con il prodotto di Moyal. Rispetto alla norma:*

$$\parallel f \parallel_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^s} |f(x)|$$

questa è un'algebra di Banach. Essa però non ha un elemento unità: per sopperire a ciò bisognerebbe considerare l'insieme

$$S^\infty(\mathbb{R}^s) \oplus \mathbb{C}$$

Questo, geometricamente, corrisponderebbe a considerare funzioni sullo spazio $\mathbb{R}^s$ *in cui l'infinito sia stato compattificato ad un punto. Inoltre questo significherebbe che il prodotto di Moyal non è definito sulle funzioni coordinate, e che l'operatore di derivazione sarebbe definito (5.24) attraverso elementi esterni all'algebra.*

5.3.2 Sulle simmetrie di gauge su spazi non commutativi

A questo punto è possibile estendere la nozione di simmetrie di gauge al caso di spazi non commutativi. Il primo aspetto da considerare è definire l'insieme a cui appartengono le funzioni che rappresentano quelli che sono stati chiamati campi di materia. Si sceglie che:

$$\psi \in \mathcal{M} = S^\infty(\mathbb{R}^s) \otimes \mathbb{C}^N \tag{5.25}$$

dove $\mathbb{C}^N$ sta ad indicare che si possono considerare multipletti di ordine N. Corrispondentemente a ciò si considera l'algebra di Moyal:

$$\mathbb{M}_N(\mathcal{A}_\theta) = \mathcal{A}_\theta \otimes \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \tag{5.26}$$

definita dal prodotto tensoriale di $\mathcal{A}_\theta$ con l'insieme delle matrici $N \times N$ sul campo complesso: in essa la moltiplicazione è definita dal prodotto tensoriale fra il prodotto di Moyal e l'ordinaria moltiplicazione matriciale riga per colonne.

In essa si considerano gli elementi unitari: $U \in \mathbb{M}_N(\mathcal{A}_\theta)$ con

$$U * U^\dagger = U^\dagger * U = \mathbf{1} \tag{5.27}$$

(qui $\mathbf{1}$ indica l'identità in $\mathbb{M}_N(\mathbb{C})$) e si definisce trasformazione di gauge[4]:

$$\psi \;\rightarrow\; \psi^U = U * \psi \tag{5.28}$$

È bene sottolineare quale sia la principale caratteristica che rende la teoria che si sviluppa su questa definizione differente rispetto a quella già illustrata. Nel caso della teoria sviluppata sull'algebra commutativa delle funzioni in $\mathbb{R}^s$, si era visto che l'unica sorgente di non commutatività dell'azione locale del gruppo considerato era legata al fatto che $U(N)$ è, per $N \neq 1$, non abeliano. Questo aveva permesso di scrivere la trasformazione di gauge su ψ secondo:

$$\psi(x) \;\rightarrow\; e^{i\alpha_{(k)}(x)T_{(k)}}\psi(x) \tag{5.29}$$

cioè semplicemente rendendo dipendenti dal punto i coefficienti rispetto ai generatori $T_{(k)}$ dell'azione globale del gruppo $U(N)$: in altre parole si poteva considerare locale l'azione del gruppo $U(N) \otimes \mathcal{F}(\mathbb{R}^s)$, che è un gruppo a dimensione infinita a causa del termine $\mathcal{F}(\mathbb{R}^s)$, ottenuto dall'azione globale del gruppo $U(N)$, che è a dimensione finita. Anche $U(\mathbb{M}_N(\mathcal{A}_\theta))$, l'insieme delle trasformazioni unitarie nell'algebra $\mathbb{M}_N(\mathcal{A}_\theta)$, è ancora, chiaramente, un gruppo a dimensione infinita: il fatto che il prodotto di Moyal sia locale e non commutativo fa sì che, in questo caso, non sia possibile definire un insieme di generatori, in numero finito pari alla dimensione di $U(N)$. Inoltre, anche nel caso in cui il gruppo che agisce su $\mathcal{M}$ sia $U(1)$, la teoria è non abeliana.

Purtuttavia, la trasformazione (5.28) viene letta come una deformazione dell'azione locale del gruppo $U(N)$ su $\mathcal{F}(\mathbb{R}^s) \otimes \mathbb{C}^N$. In tal senso si definisce un operatore di derivazione covariante:

$$\nabla_\mu(\psi) = \partial_\mu\psi - iA_\mu * \psi \tag{5.30}$$

attraverso la specifica richiesta che, per trasformazioni di gauge:

$$\nabla_\mu \;\rightarrow\; \nabla_\mu^U$$

[4]Con le ipotesi fatte è possibile provare che $U * \psi \in \mathcal{M}$.

con:

$$\nabla_\mu^U \left(\psi^U\right) = \left(\nabla_\mu \left(\psi\right)\right)^U \tag{5.31}$$

Da essa si vede che:

$$\nabla_\mu^U \left(\psi\right) = U * \nabla_\mu \left(U^\dagger * \psi\right) \tag{5.32}$$

Se si definisce:

$$\nabla_\mu^U \left(\psi\right) = \partial_\mu \psi - iA_\mu^U * \psi \tag{5.33}$$

si ha:

$$U * \nabla_\mu \left(U^\dagger * \psi\right) = \partial_\mu \psi - iA_\mu^U * \psi$$

e, dalla definizione dell'operatore ∇_μ:

$$U * \partial_\mu \left(U^\dagger * \psi\right) - iU * A_\mu * U^\dagger * \psi = \partial_\mu \psi - iA_\mu^U * \psi$$

visto che ∂_μ è una derivazione rispetto al prodotto $*$:

$$\left(U * \partial_\mu U^\dagger\right) * \psi - iU * A_\mu * U^\dagger * \psi = -iA_\mu^U * \psi$$

e quindi:

$$A_\mu^U = i\left(U * \partial_\mu U^\dagger\right) + U * A_\mu * U^\dagger \tag{5.34}$$

questo indica che l'azione del gruppo di gauge sul campo di gauge ha la stessa forma, rispetto al prodotto di Moyal, che ha nel caso di teorie non abeliane su spazi commutativi. Ancora, si può definire:

$$F_{\alpha\beta} = i[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]_* \tag{5.35}$$

Le proprietà di trasformazione dell'operatore di derivazione covariante indicano che, se:

$$F_{\alpha\beta}^U = i[\nabla_\alpha^U, \nabla_\beta^U]_* \tag{5.36}$$

allora:

$$F_{\alpha\beta}^U \left(\psi^U\right) = U * F_{\alpha\beta} \left(\psi\right) \tag{5.37}$$

o, equivalentemente:

$$F_{\alpha\beta}^U \left(\psi\right) = U * F_{\alpha\beta} \left(U^\dagger * \psi\right) \tag{5.38}$$

Inoltre, lo sviluppo esplicito della forma dell'operatore $F_{\alpha\beta}$ conduce a:

$$F_{\alpha\beta} \left(\psi\right) = \left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) * \psi - i[A_\alpha, A_\beta]_* * \psi \tag{5.39}$$

5.3.3 Sulla caratterizzazione dell'algebra del gruppo unitario

Il passo successivo di questa analisi è provare a caratterizzare le trasformazioni infinitesime che generano il gruppo $U(\mathbb{M}_N(\mathcal{A}_\theta))$. In realtà, come si è già sottolineato, in questa situazione non è possibile definire l'algebra di Lie di questo gruppo leggendola, analogamente al caso di gruppi di Lie a dimensione finita, come lo spazio tangente alla varietà che lo rappresenta nel punto che corrisponde all'unità. Tuttavia, è possibile sfruttare il fatto che $\mathcal{M}$ sia l'insieme delle funzioni a decrescenza rapida in $\mathbb{R}^s$, e completarlo, in norma quadratica, allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\mathcal{M} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^s, d^s x)$. In questo modo le trasformazioni di gauge si possono leggere come una rappresentazione unitaria, su $\mathcal{H}_\mathcal{M}$, del gruppo $U(\mathbb{M}_N(\mathcal{A}_\theta))$ [9].

osservazione. *Questa identificazione è molto interessante. Essa si basa sul fatto che, per le funzioni considerate:*

$$\int d^s x \ (f * g)(x) = \int d^s x \ (fg)(x)$$

(è semplice ottenere questo risultato, ad esempio considerando la forma integrale del prodotto di Moyal). Ciò significa che:

$$\| \psi \|_*^2 = \int d^s x \ (\bar{\psi} * \psi)(x) = \int d^s x \ (\bar{\psi}\psi)(x) = \| \psi \|^2$$

e quindi, in virtù dell'unitarietà di U rispetto al prodotto deformato, si ha pure:

$$\| U * \psi \|_* = \| \psi \|_* = \| \psi \|$$

A questo punto, per ogni gruppo a un parametro di trasformazioni unitarie si può ancora invocare il teorema di Stone, e definire un generatore per ognuno di essi: sarà l'insieme di tutti i generatori, ottenuti da tutti i gruppi a un parametro di trasformazioni unitarie, che costituirà quella che verrà detta algebra del gruppo di gauge: $u(\mathbb{M}_N(\mathcal{A}_\theta))$.

Per proseguire nell'analisi di quest'algebra ci si restringerà al caso in cui $N = 1$, e il gruppo di gauge sarà $U(\mathbb{M}_1(\mathcal{A}_\theta))$, ovvero l'insieme $U(\mathcal{A}_\theta)$ degli elementi unitari in $\mathcal{A}_\theta$, e per evidenziare il ruolo dei generatori si considereranno trasformazioni del tipo:

$$U = e^{*i\lambda(x)} \tag{5.40}$$

con $\lambda(x) \in \mathbb{R}$. Qui il simbolo $*$ nell'esponente sta ad indicare che:

$$e^{*i\lambda(x)} = 1 + i\lambda + \frac{i^2}{2!}\lambda * \lambda + \dots$$

In questo caso è possibile specificare quale sia l'azione del gruppo di gauge sul campo A e sull'operatore $F_{\alpha\beta}$. In dettaglio:

$$A_\nu^U = i\left(e^{*i\lambda(x)} * \partial_\nu e^{*-i\lambda(x)}\right) + e^{*i\lambda(x)} * A_\nu * e^{-*i\lambda(x)}$$

questa espressione, considerando λ infinitesimo, conduce a:

$$A_\nu^U = \partial_\nu \lambda + A_\nu + i[\lambda, A_\nu]_* + o\left(\lambda^2\right)$$

per cui:

$$A_\nu^U - A_\nu \cong \delta_\lambda A_\nu = \partial_\nu \lambda + i[\lambda, A_\nu]_* \tag{5.41}$$

In modo analogo si vede pure che:

$$\delta_\lambda F_{\alpha\beta}(\psi) = -i[F_{\alpha\beta}(\lambda * \psi) - \lambda * F_{\alpha\beta}(\psi)]$$

e questa relazione viene di solito espressa con:

$$\delta_\lambda F_{\alpha\beta} = i[\lambda, F_{\alpha\beta}]_* \tag{5.42}$$

Da ciò inoltre è possibile vedere che:

$$[\delta_\lambda, \delta_{\lambda'}]A_\nu = \delta_{i[\lambda,\,\lambda']_*} A_\nu \tag{5.43}$$

Essa indica chiaramente che il sottospazio che genera le trasformazioni di gauge definisce un'algebra di Lie rispetto al commutatore à la Moyal. Proprio quest'algebra, ora, si proverà a caratterizzare.

L'analisi svolta, ed il teorema di Stone, hanno chiarito quale sia il significato del considerare gli elementi hermitiani di $\mathcal{A}_\theta$ come generatori del gruppo di gauge.

osservazione. *A causa della non commutatività del prodotto $*$, il concetto di hermitianità è un pò più delicato che nel caso usuale di funzioni definite su uno spazio vettoriale. Si può, intuitivamente, pensare ad esso come alla definizione degli elementi simmetrici nell'insieme degli operatori su uno spazio di Hilbert. Ad esempio, il monomio $x_\alpha * x_\beta = x_\alpha x_\beta + \frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}$ è hermitiano solo se x_α e x_β appartengono a sottospazi lagrangiani rispetto alla forma $\theta_{\alpha\beta}$.*

Le proprietà del prodotto deformato indicano che è possibile esprimere la funzione generatrice reale $\lambda(x)$ come una serie in termini di $*$-monomi, secondo opportuni criteri di convergenza. In particolare, questi sviluppi assumeranno una maggiore immediatezza e una migliore intuitività se saranno definiti rispetto ad una base di $*$-polinomi hermitiani. Giusto per non rendere troppo pesante la notazione, e per rileggere direttamente i risultati già illustrati nei capitoli precedenti, si considererà una teoria sviluppata su un piano non commutativo, cioè si sceglie come spazio vettoriale uno spazio bidimensionale, rispetto alle solite coordinate (q, p), e la matrice θ in modo che sia:

$$q * p = qp - \frac{i}{2}$$

Come si è più volte sottolineato, c'è una profonda analogia fra l'insieme delle funzioni che si ottengono da quelli che sono stati battezzati $*$-polinomi, e l'insieme degli operatori su uno spazio di Hilbert esprimibili come funzioni degli operatori canonici $\hat{q}$ e $\hat{p}$. Questa analogia è un vero e proprio isomorfismo, e questo isomorfismo è rappresentato dalla mappa di Weyl, e da quella di Wigner. Rispetto a ciò risulta naturale assumere, come base per l'insieme degli elementi hermitiani in $\mathcal{A}_\theta$, gli elementi:

$$\mathcal{S}_{ab} = \frac{1}{2^a} \sum_{k=0} \left(\begin{array}{c} a \\ k \end{array} \right) q^k * p^b * q^{a-k} \tag{5.44}$$

Come è evidente dal confronto con quanto provato a proposito della mappa di Weyl, esso si ottiene da $\hat{\Omega}\left(q^a p^b\right)$ identificando, nell'algebra di Moyal:

$$q \leftrightarrow \hat{q} \qquad p \leftrightarrow \hat{p}$$

Grazie a questa identificazione, lo studio dell'algebra $u\left(\mathcal{A}_\theta\right)$ si risolve nello studio di (nella notazione vettoriale, $\vec{n} = (n_1, n_2)$):

$$[\mathcal{S}_{\vec{n}}, \mathcal{S}_{\vec{m}}]_* = \sum_{\vec{a} \in \mathbb{N}^2} c_{\vec{n}\vec{m}\vec{a}} \, \mathcal{S}_{\vec{a}} \tag{5.45}$$

Inoltre, il motivo per cui si è scelta questa base è che questo isomorfismo rende immediato, in virtù di quanto già calcolato, la valutazione di questo insieme di costanti di struttura. Se si considera (I.5):

$$[q^{n_1} p^{n_2}, q^{m_1} p^{m_2}]_* = q^{n_1} p^{n_2} * q^{m_1} p^{m_2} - q^{m_1} p^{m_2} * q^{n_1} p^{n_2} \tag{5.46}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
&[q^{n_1} p^{n_2}, q^{m_1} p^{m_2}]_* = \\
&\left[\sum_{k=0}^{min(n_1,m_2)} \sum_{j=0}^{min(n_2,m_1)} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+j} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n_1 \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n_2 \\ j \end{array} \right) \frac{m_1!}{(m_1-j)!} \frac{m_2!}{(m_2-k)!} + \right. \\
&\left. - \sum_{k=0}^{min(m_1,n_2)} \sum_{j=0}^{min(m_2,n_1)} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+j} (-1)^k \left(\begin{array}{c} m_1 \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m_2 \\ j \end{array} \right) \frac{n_1!}{(n_1-j)!} \frac{n_2!}{(n_2-k)!} \right] \\
&q^{m_1+n_1-k-j} p^{m_2+n_2-k-j}
\end{aligned}$$

e allora si ha:

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{S}_{\vec{n}}, \mathcal{S}_{\vec{m}}]_* = \\
&\left[\sum_{k=0}^{min(n_1,m_2)} \sum_{j=0}^{min(n_2,m_1)} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+j} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n_1 \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n_2 \\ j \end{array} \right) \frac{m_1!}{(m_1-j)!} \frac{m_2!}{(m_2-k)!} + \right. \\
&\left. - \sum_{k=0}^{min(m_1,n_2)} \sum_{j=0}^{min(m_2,n_1)} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+j} (-1)^k \left(\begin{array}{c} m_1 \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m_2 \\ j \end{array} \right) \frac{n_1!}{(n_1-j)!} \frac{n_2!}{(n_2-k)!} \right] \\
&\mathcal{S}_{m_1+n_1-k-j, m_2+n_2-k-j}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Capitolo 6

Una conclusione...

Al termine di questa esposizione è bene sottolineare come lo sviluppo del formalismo à la Weyl-Wigner abbia permesso un'analisi delle relazioni che intercorrono fra la formulazione classica e quella quantistica della dinamica di un sistema fisico. Esso ha permesso di attribuire un significato al problema di definire il limite classico della dinamica quantistica nella formulazione à la Heisenberg, leggendola come una deformazione, dipendente da $\hbar$, della dinamica classica nella formulazione à la Poisson. D'altro canto esso ha permesso di sviluppare una procedura attraverso la quale definire una quantizzazione per sistemi dinamici classici lineari, e l'esempio più interessante è stato quello relativo alla dinamica di una particella soggetto ad una forza di tipo magnetico costante.

E se il campo magnetico in cui la particella è immersa non fosse costante?

Lo studio svolto chiarisce che provare a definire una quantizzazione in questo caso equivalrebbe a studiare la possibilità di definire una nozione di sistema di Weyl per uno spazio vettoriale simplettico in un sistema di coordinate in cui la matrice che la rappresenta non è costante. La sezione che segue è un tentativo in tal senso: essa non giunge a dei risultati conclusivi, ma parziali, ed evidenzia che questo studio è intimamente legato al problema di definire strutture lineari tanto per un sistema dinamico classico che per uno quantistico. Esso è quindi, come si vede, correlato al problema della linearità, che come si è detto è l'altro grande tema relativo all'analisi delle relazioni fra mondo classico e mondo quantistico.

In questa prospettiva quest'ultima sezione, e più in generale questa pagina conclusiva, costituisce come una enunciazione d'intenti per il futuro...

6.1 Sulla definizione di un sistema di Weyl rispetto a strutture simplettiche dipendenti dal punto

Una volta ottenuta una soluzione al problema di determinare un sistema di Weyl rispetto ad una struttura simplettica costante, è naturale studiare questo stesso nel caso in cui la 2-forma simplettica dipenda dal punto. La prima questione a sorgere è quella di comprendere quale sia la forma in cui il problema è posto in modo corretto. Si è detto che, con un certo abuso, un sistema di Weyl è una rappresentazione unitaria proiettiva di uno spazio vettoriale. Qual è il significato da dare a quest'espressione qualora si abbia una varietà simplettica, (cioè una varietà sulla quale è stata definita una 2-forma chiusa, non degenere e definita positiva) quand'anche si assuma che questa varietà sia diffeomorfa a $\mathbb{R}^{2n}$? Ancora una volta la traccia è fornita analizzando la trasformazione (giusto per semplicità si considera come varietà $\mathbb{R}^2$) che porta la struttura simplettica nella forma di Darboux. Come è stato più volte sottolineato, se:

$$\omega = f(q,p)\, dq \wedge dp$$

allora esiste, almeno localmente, una trasformazione di coordinate:

$$(q,p) \subset \mathbb{R}^2 \overset{D}{\to} (\tilde{q},\tilde{p}) \subset \mathbb{R}^2$$

per cui:

$$\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} = f(q,p)$$

e quindi nel sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ immagine di questa applicazione la struttura simplettica assume la forma:

$$\omega_D = d\tilde{q} \wedge d\tilde{p}$$

In questa analisi, per semplicità, si assume che la trasformazione D è globale, ovvero che la carta à la Darboux $(\tilde{q},\tilde{p})$ copre tutto $\mathbb{R}^2$.

Grazie a questa applicazione si può definire in $\mathbb{R}^2$ una struttura lineare attraverso:

$$z +_D z' \equiv D^{-1}\left(D(z) + D(z')\right) \tag{6.1}$$

$$\lambda \cdot_D z \equiv D^{-1}\left(\lambda \cdot D(z)\right) \tag{6.2}$$

in cui $+$ indica la struttura lineare standard in $\left(\mathbb{R}^2, \omega_D\right)$:

$$(\tilde{q},\tilde{p}) + (\tilde{q}',\tilde{p}') \equiv (\tilde{q}+\tilde{q}', \tilde{p}+\tilde{p}')$$

$$\lambda \cdot (\tilde{q},\tilde{p}) \equiv (\lambda\tilde{q}, \lambda\tilde{p})$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. In questo modo $\left(\mathbb{R}^2, \omega\right)$ ammette una nuova struttura di spazio vettoriale,[1] rispetto alla quale la struttura simplettica (rappresentata ora dalla matrice ω_D) è costante, cioè è invariante rispetto all'azione del gruppo delle traslazioni definito dalla nuova struttura lineare. Allora, se si pone:

$$\hat{W}_{S(\omega)}(z) \equiv \hat{W}(D(z)) \tag{6.3}$$

cioè in dettaglio:

$$\hat{W}_{S(\omega)}(q, p) \equiv \hat{W}(\tilde{q}(q, p), \tilde{p}(q, p)) \tag{6.4}$$

si vede che:

$$\hat{W}_{S(\omega)}(z +_D z') = \hat{W}(D(z +_D z')) \tag{6.5}$$

Infatti, secondo la definizione della nuova struttura di somma:

$$\hat{W}(D(z +_D z')) = \hat{W}(D(z) + D(z')) \tag{6.6}$$

e dalla definizione di sistema di Weyl

$$\hat{W}(D(z) + D(z')) = \hat{W}(D(z))\, \hat{W}(D(z'))\, e^{-\frac{i}{2}\omega_D(D(z), D(z'))} \tag{6.7}$$

(qui $\hbar = 1$). Perciò:

$$\hat{W}_{S(\omega)}(z +_D z') = \hat{W}(\tilde{q}(q, p), \tilde{p}(q, p))\, \hat{W}(\tilde{q}'(q', p'), \tilde{p}'(q', p'))\, e^{-\frac{i}{2}(\tilde{q}\tilde{p}' - \tilde{q}'\tilde{p})} \tag{6.8}$$

Adesso è possibile, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la struttura lineare ordinaria, dimostrare che:

$$\hat{W}_{S(\omega)}(\alpha \cdot_D z)\, \hat{W}_{S(\omega)}(\beta \cdot_D z) = \hat{W}_{S(\omega)}((\alpha + \beta) \cdot_D z) \tag{6.9}$$

Infatti, sempre secondo la definizione di sistema di Weyl:

$$\hat{W}_{S(\omega)}((\alpha \cdot_D z) +_D (\beta \cdot_D z)) = \hat{W}_{S(\omega)}(\alpha \cdot_D z)\, \hat{W}_{S(\omega)}(\beta \cdot_D z) \tag{6.10}$$

mentre la definizione di struttura lineare indotta:

$$(\alpha \cdot_D z) +_D (\beta \cdot_D z) = ((\alpha + \beta) \cdot_D z)$$

Quindi $\hat{W}_{S(\omega)}(\alpha \cdot_D z)$, con z fissato, realizza una rappresentazione di $(\mathbb{R}, +)$ (si badi bene, una rappresentazione dello spazio vettoriale reale unidimensionale rispetto alla struttura lineare usuale) in termini di operatori unitari. Allora, dal teorema di Stone:

$$\hat{W}_{S(\omega)}(\alpha \cdot_D z) \equiv e^{i\alpha \hat{G}_{S(\omega)}(z)} \tag{6.11}$$

[1] la prova che queste posizioni definiscano una struttura di somma, ovvero che $\mathbb{R}^2$ in questo modo divenga uno spazio vettoriale, è in appendice.

e si può vedere che:

$$\hat{G}_{S(\omega)}\left(\alpha\cdot_D z\right) = \alpha\hat{G}_{S(\omega)}\left(z\right) \tag{6.12}$$

e pure:

$$[\hat{G}_{S(\omega)}\left(z\right), \hat{G}_{S(\omega)}\left(z'\right)] = -i\omega_D\left(D\left(z\right), D\left(z'\right)\right) \tag{6.13}$$

La dimostrazione di queste due asserzioni ricalca quella proposta nel caso della struttura simplettica canonica: ciò che è cruciale è che, anche rispetto a questa nuova struttura di somma, si ha che $(\alpha\beta)\cdot_D z = \alpha\cdot_D(\beta\cdot_D z)$.

Il problema è che, ancora una volta, queste soluzioni sono solamente formali: è però possibile, nei due esempi seguenti, definire delle realizzazioni esplicite di sistemi di Weyl con queste caratteristiche.

Se $\omega = \frac{d\phi}{dq}dq \wedge dp$ con $\phi = \phi\left(q\right)$ (e questa definizione richiede che $\frac{d\phi}{dx}$ sia sempre positivo e non si annulli mai) allora la trasformazione nelle coordinate canoniche è data da:

$$\tilde{q} = \phi\left(q\right) \qquad \tilde{p} = p$$

e la struttura lineare che si definisce attraverso essa è:

$$(q,p) +_D (q',p') \equiv \left(\phi^{-1}\left(\phi\left(q\right) + \phi\left(q'\right)\right), p + p'\right) \tag{6.14}$$

$$\alpha\cdot_D(q,p) \equiv \left(\phi^{-1}\left(\alpha\cdot\phi\left(q\right)\right), \alpha p\right) \tag{6.15}$$

Quindi ad ogni sottospazio in $\left(\mathbb{R}^2, \omega_D\right)$, cioè ad ogni retta passante per l'origine, corrisponde un sottospazio in $\left(\mathbb{R}^2, \omega\right)$ i cui punti possono essere messi in corrispondenza coi valori della coordinata q. Allora si può definire in ognuno di essi:

$$q +_\phi q' \equiv \phi^{-1}\left(\phi\left(q\right) + \phi\left(q'\right)\right) \tag{6.16}$$

Si considera $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}, \frac{d\phi}{dx}dx\right)$: esso è lo spazio di Hilbert delle funzioni definite sulla retta e a quadrato sommabile rispetto ad una opportuna misura. Si pone:

$$\left(\hat{U}\left(q\right)\psi\right)(x) \equiv \psi\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(q\right) + \phi\left(x\right)\right)\right) \tag{6.17}$$

$$\left(\hat{V}\left(p\right)\psi\right)(x) \equiv e^{ip\phi(x)}\psi\left(x\right) \tag{6.18}$$

Questi operatori hanno norma 1. Dalla definizione si vede che:

$$\begin{aligned}\langle\hat{U}\left(q\right)\psi \quad | \quad \hat{U}\left(q\right)\psi\rangle &= \\ &= \int dx\frac{d\phi}{dx}\psi^*\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(q\right) + \phi\left(x\right)\right)\right)\psi\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(q\right) + \phi\left(x\right)\right)\right)\end{aligned}$$

con la sostituzione $y = \phi^{-1}\left(\phi\left(q\right) + \phi\left(x\right)\right)$ questo integrale diviene:

$$\int dy\frac{d\phi}{dy}\psi^*\left(y\right)\psi\left(y\right) = \langle\psi \mid \psi\rangle$$

mentre:

$$\begin{aligned}\langle \hat{V}(p)\psi \mid \hat{V}(p)\psi\rangle &= \int dx \frac{d\phi}{dx} e^{-ip\phi(x)}\psi^*(x)\, e^{ip\phi(x)}\psi(x) \\ &= \langle \psi \mid \psi\rangle\end{aligned}$$

Inoltre si può esplicitamente calcolare che, attraverso la stessa sostituzione:

$$\begin{aligned}\langle \sigma \mid \hat{U}(q)\psi\rangle &= \int dx \frac{d\phi}{dx}\sigma^*(x)\left(\hat{U}(q)\psi\right)(x) \\ &= \int dx \frac{d\phi}{dx}\sigma^*(x)\,\psi\left(\phi^{-1}(\phi(q)+\phi(x))\right) \\ &= \int dy \frac{d\phi}{dy}\sigma^*\left(\phi^{-1}(\phi(y)-\phi(q))\right)\psi(y)\end{aligned}$$

quindi si vede che

$$\left(\hat{U}^\dagger(q)\psi\right)(x) = \psi\left(\phi^{-1}(\phi(x)-\phi(q))\right)$$

e ciò comporta che:

$$\left(\hat{U}^\dagger(q)\hat{U}(q)\phi\right)(x) = \left(\hat{U}(q)\hat{U}^\dagger(q)\phi\right)(x) = \mathbf{1}$$

Parallelamente:

$$\begin{aligned}\langle \sigma \mid \hat{V}(p)\psi\rangle &= \int dx \frac{d\phi}{dx}\sigma^*(x)\left(\hat{V}(p)\psi\right)(x) \\ &= \int dx \frac{d\phi}{dx}\sigma^*(x)\, e^{ip\phi(x)}\psi(x) \\ &= \int dx \frac{d\phi}{dx}\left(\sigma(x)\, e^{-ip\phi(x)}\right)^*\psi(x)\end{aligned}$$

da cui:

$$\left(\hat{V}^\dagger(p)\psi\right)(x) = e^{-ip\phi(x)/\hbar}\psi(x)$$

e quindi:

$$\left(\hat{V}^\dagger(p)\hat{V}(p)\psi\right)(x) = \left(\hat{V}(p)\hat{V}^\dagger(p)\psi\right)(x) = \mathbf{1}$$

Per quanto riguarda le proprietà di composizione, si ha che:

$$\begin{aligned}\left(\hat{U}(q+_\phi q')\psi\right)(x) &= \psi\left(\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(q+_\phi q'))\right) \\ &= \psi\left(\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(q)+\phi(q'))\right)\end{aligned}$$

mentre:

$$\begin{aligned}\left(\hat{U}(q)\hat{U}(q')\psi\right)(x) &= \left(\hat{U}(q')\psi\right)\left(\phi^{-1}(\phi(q)+\phi(x))\right) \\ &= \psi\left(\phi^{-1}(\phi(q')+\phi(x)+\phi(q))\right)\end{aligned}$$

il confronto delle due espressioni indica che

$$\hat{U}\left(q +_{\phi} q'\right) = \hat{U}\left(q\right)\hat{U}\left(q'\right) \tag{6.19}$$

Lo stesso si può provare per $\hat{V}$:

$$\left(\hat{V}\left(p + p'\right)\psi\right)(x) = e^{i(p+p')\phi(x)}\psi\left(x\right)$$

e:

$$\left(\hat{V}\left(p\right)\hat{V}\left(p'\right)\psi\right)(x) = e^{ip\phi(x)}\left(\hat{V}\left(p'\right)\psi\right)(x) = e^{i(p+p')\phi(x)}\psi\left(x\right)$$

Tutti questi calcoli provano che $\hat{U}\left(q\right)$ e $\hat{V}\left(p\right)$ sono gruppi (rispetto alla struttura di somma indotta dalla trasformazione ϕ su ogni sottospazio monodimensionale) a un parametro di operatori unitari. Allora si definisce:

$$\hat{W}_D\left(q,p\right) \equiv \hat{U}\left(q\right)\hat{V}\left(p\right)e^{-ip\phi(q)/2} \tag{6.20}$$

e si prova che questo è un sistema di Weyl. Dapprima si considera:

$$\left(\hat{W}_D\left(\left(q,p\right) +_D \left(q',p'\right)\right)\psi\right)(x) = \left(\hat{W}_D\left(q +_{\phi} q', p + p'\right)\psi\right)(x) \tag{6.21}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
&= \left(\hat{U}\left(q +_{\phi} q'\right)\hat{V}\left(p + p'\right)\psi\right)(x)\, e^{-\frac{i}{2}(p+p')(\phi(q)+\phi(q'))} \\
&= e^{-\frac{i}{2}(p+p')(\phi(q)+\phi(q'))}\left(\hat{V}\left(p + p'\right)\psi\right)\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(x\right) + \phi\left(q\right) + \left(q'\right)\right)\right) \\
&= e^{-\frac{i}{2}(p+p')}e^{i(p+p')(\phi(x)+\phi(q)+(q'))}\psi\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(x\right) + \phi\left(q\right) + \left(q'\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

e poi si considera:

$$\hat{W}_D\left(q,p\right)\hat{W}_D\left(q',p'\right)\psi = e^{-ip\phi(q)/2}e^{-ip'\phi(q')/2}\hat{U}\left(q\right)\hat{V}\left(p\right)\hat{U}\left(q'\right)\hat{V}\left(p'\right)\psi \tag{6.22}$$

e perciò, applicando la definizione di $\hat{U}$ e $\hat{V}$ in successione, si ha:

$$\begin{aligned}
&= e^{-ip\phi(q)/2}e^{-ip'\phi(q')/2}\left(\hat{V}\left(p\right)\hat{U}\left(q'\right)\hat{V}\left(p'\right)\psi\right)\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(x\right) + \phi\left(q\right)\right)\right) \\
&= e^{-ip\phi(q)/2}e^{-ip'\phi(q')/2}e^{ip(\phi(x)+\phi(q))}\left(\hat{U}\left(q'\right)\hat{V}\left(p'\right)\psi\right)\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(x\right) + \phi\left(q\right)\right)\right) \\
&= e^{-ip\phi(q)/2}e^{-ip'\phi(q')/2}e^{ip(\phi(x)+\phi(q))}\left(\hat{V}\left(p'\right)\psi\right)\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(x\right) + \phi\left(q\right) + \left(q'\right)\right)\right) \\
&= e^{-ip\phi(q)/2}e^{-ip'\phi(q')/2}e^{ip(\phi(x)+\phi(q))}e^{ip'(\phi(x)+\phi(q)+(q'))}\psi\left(\phi^{-1}\left(\phi\left(x\right) + \phi\left(q\right) + \left(q'\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Riordinando i termini, un confronto dà

$$\left(\hat{W}_D\left(\left(q,p\right) +_D \left(q',p'\right)\right)\psi\right)(x) = \left(\hat{W}_D\left(q,p\right)\hat{W}_D\left(q',p'\right)\psi\right)(x)\, e^{i[p\phi(q')-p'\phi(q)]/2} \tag{6.23}$$

Ancora un esempio: se

$$\omega = \frac{d\phi}{dq}\frac{d\sigma}{dp} dq \wedge dp \tag{6.24}$$

con

$$\phi = \phi(q) \;\; \sigma = \sigma(p) \;\; \text{con} \, \frac{d\phi}{dq}\frac{d\sigma}{dp} > 0$$

allora si definisce:

$$\tilde{q} = \phi(q)$$
$$\tilde{p} = \sigma(p)$$

e perciò la nuova struttura di somma :

$$\begin{aligned}(q,p) +_D (q',p') &= \left(\phi^{-1}\left(\phi(q) + \phi(q')\right), \sigma^{-1}\left(\sigma(p) + \sigma(p')\right)\right) \\ &= \left(q +_\phi q', p +_\sigma p'\right)\end{aligned}$$

$$\alpha \cdot_D (q,p) = \left(\phi^{-1}\left(\alpha \cdot \phi(q)\right), \sigma^{-1}\left(\alpha \cdot \sigma(p)\right)\right) \tag{6.25}$$

Su $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}, \frac{d\phi}{dx}dx\right)$ si pone:

$$\left(\hat{U}(q)\psi\right)(x) = \psi\left(\phi^{-1}\left(\phi(q) + \phi(x)\right)\right) \tag{6.26}$$

$$\left(\hat{V}(p)\psi\right)(x) = e^{i\sigma(p)\phi(x)}\psi(x) \tag{6.27}$$

e si vede che sono gruppi a un parametro di operatori unitari rispetto alle somme $+_\phi$ e $+_\sigma$. Da qui si definisce:

$$\hat{W}_D(q,p) \equiv \hat{U}(q)\hat{V}(p)e^{-i\sigma(p)\phi(q)/2} \tag{6.28}$$

e si dimostra che:

$$\left(\hat{W}_D\left((q,p) +_D (q',p')\right)\psi\right)(x) = \left(\hat{W}_D(q,p)\hat{W}_D(q',p')\psi\right)(x)\, e^{i[\sigma(p)\phi(q') - \sigma(p')\phi(q)]/2} \tag{6.29}$$

Questo è perciò un sistema di Weyl, secondo la definizione posta, rispetto alla struttura simplettica considerata.

Questi esempi dovrebbero chiarire quale sia l'idea attraverso cui si prova a risolvere il problema generale: in quest'ottica è utile rileggere quanto si è detto a proposito del caso in cui la forma simplettica sia quella canonica, ed è, ancora una volta, sufficiente limitarsi a $\mathbb{R}^2$.

In quella situazione si è considerato $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, cioè si è suddiviso lo spazio vettoriale in due sottospazi lagrangiani. In questo caso $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ e perciò è come se si fosse suddiviso lo spazio vettoriale simplettico nella somma diretta di un sottospazio lagrangiano e del suo duale. Poi si è realizzato lo spazio di Hilbert come insieme delle funzioni a quadrato sommabile su questo sottospazio lagrangiano, rispetto alla misura standard dx: ma questa misura si può leggere come quella invariante per traslazioni qualora la traslazione sia definita dalla struttura lineare. E, infine, si è posta una rappresentazione unitaria, fedele, di questo sottospazio lagrangiano proprio in termini di operatori di traslazione sulle funzioni di $\mathcal{H}$:

$$\left(\hat{U}\left(q\right)\psi\right)\left(x\right)=\psi\left(x+q\right)$$

e del duale in termini di moltiplicazione per una fase:

$$\left(\hat{V}\left(p\right)\psi\right)\left(x\right)=e^{ipx}\psi\left(x\right)$$

che, specificatamente, era lineare in x e p, e quindi identificabile con l'immagine di x attraverso il funzionale lineare p. Inoltre si è definito $\hat{W}$ attraverso la composizione di $\hat{U}$ e $\hat{V}$, e la moltiplicazione per una fase con queste caratteristiche

$$\hat{W}\left(q,p\right)=e^{-iqp/2}\hat{U}\left(q\right)\hat{V}\left(p\right)$$

Negli esempi qui proposti si è seguita proprio questa linea: si è scelto un sottospazio lagrangiano (rispetto alla struttura di somma indotta dalla trasformazione nel sistema di coordinate in cui la forma simplettica assume la forma canonica) e si è realizzato lo spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato sommabile su di esso secondo la misura invariante per questa nuova definizione di traslazione. Poi si è costruita una rappresentazione di questo sottospazio in termini di operatori di traslazione:

$$\left(\hat{U}\left(q\right)\psi\right)\left(x\right)=\psi\left(x+_{\phi}q\right)$$

Il suo duale è definito dalle applicazioni $p:\left(\mathbb{R},*_{\phi}\right)\mapsto\left(\mathbb{R},+\right)$ per cui:

$$p\left(x+_{\phi}x'\right)=p\left(x\right)+p\left(x'\right)$$

Se si pone:

$$p\left(x\right)\equiv p\cdot\phi\left(x\right)$$

si ha che:

$$\begin{aligned}p\left(x+_{\phi}x'\right) &= p\cdot\phi\left(x+_{\phi}x'\right)\\ &= p\cdot\left(\phi\left(x\right)+\phi\left(x'\right)\right)\\ &= p\left(x\right)+p\left(x'\right)\end{aligned}$$

e infatti si è definita una rappresentazione del duale:

$$\left(\hat{V}\left(p\right)\psi\right)\left(x\right)=e^{ip\phi(x)}\psi\left(x\right)$$

In ultimo si è definito:

$$\hat{W}\left(q,p\right)=\hat{U}\left(q\right)\hat{V}\left(p\right)e^{-ip\phi(q)/2}$$

e si è visto che è un sistema di Weyl rispetto alla struttura simplettica considerata.

Quanto questi esempi sono generali? Un teorema, dovuto a Mackey [11] assicura che un sistema di Weyl è sempre realizzabile, per uno spazio vettoriale a dimensione finita, e che lo spazio di Hilbert su cui è definito è quello delle funzioni complesse a quadrato sommabile rispetto alla misura invariante per traslazioni su un opportuno sottospazio lagrangiano.

osservazione. *Un ulteriore questione è legata alla definizione dei generatori dei gruppi $\hat{U}(q)$ e $\hat{V}(p)$. Giusto per proseguire nel confronto con quanto spiegato nel caso della struttura simplettica canonica, allora si era definito: (con $\hbar = 1$)*

$$\hat{W}(q,0) = e^{iq\hat{P}}$$

$$\hat{W}(0,p) = e^{ip\hat{Q}}$$

con

$$\hat{P} = \hat{G}(1,0)$$

$$\hat{Q} = \hat{G}(0,1)$$

La possibilità di questa definizione sta nel teorema di Stone, e nel fatto che, in quella struttura di somma:

$$(q,0) = q(1,0)$$

e

$$(0,p) = p(0,1)$$

Ma ora:

$$\hat{U}(q)\hat{U}(q') = \hat{U}\left(\phi^{-1}(\phi(q) + \phi(q'))\right)$$

Come si è detto, si ha che $\hat{U}(q)$ definisce un gruppo a un parametro di operatori unitari, rispetto alla struttura di somma $+_\phi$, ovvero che $\hat{U}(q)$ definisce una rappresentazione fedele del gruppo $(\mathbb{R}, +_\phi)$. Questa proprietà è importantissima. Il teorema di Stone prova che solo per le rappresentazioni unitarie di $(\mathbb{R}, +)$ è possibile definire un generatore autoaggiunto. Ciò significa che in questo caso esso non è applicabile. Un argomento più intuitivo potrebbe essere considerare che:

$$(q,0) = q \cdot_\phi \left(\phi^{-1}\left(\frac{\phi(q)}{q}\right), 0\right)$$

Ciò significa che, nel sottospazio lagrangiano $(q,0)$, non si può scegliere q, cioè la funzione coordinata, come parametro; o, in altre parole, che se si portasse innanzi questa analogia, il generatore dovrebbe dipendere da q.

Appendice A

Sulla definizione di varietà

Posto un insieme M, una carta locale (o anche un sistema di coordinate) è un'applicazione biettiva ϕ da $U \subset M$ in un aperto V di $\mathbb{R}^m$: qui $\mathbb{R}^m$ viene letto come dotato di una struttura di spazio vettoriale reale e di una struttura topologica. Due carte (U, ϕ) e (U', ϕ'), con $U \cap U' \neq \emptyset$, si dicono compatibili se assumono valori nello stesso $\mathbb{R}^m$, e se, dove definite, le mappe $\phi \circ \phi'^{\,-1}$ e $\phi' \circ \phi^{-1}$ sono di classe C^k: un atlante $\mathcal{A}$, per M, è un insieme di carte compatibili, i cui domini costituiscono un ricoprimento di M. Due atlanti sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante: un atlante è detto massimale, $\tilde{\mathcal{A}}$, quando contiene ogni altro atlante compatibile. La coppia $\left(M, \tilde{\mathcal{A}}\right)$ viene definita varietà differenziale di classe C^k. Propriamente, la posizione di un atlante massimale equivale alla posizione di una struttura differenziale: un'applicazione f fra due varietà differenziali $\left(M, \tilde{\mathcal{A}}\right)$ e $\left(N, \tilde{\mathcal{B}}\right)$ si legge come un'applicazione fra aperti di $\mathbb{R}^{(M)}$ e $\mathbb{R}^{(N)}$:

$$f \;:\; M \;\mapsto\; N$$

$$\phi^{-1} \circ f \circ \psi \;:\; \mathbb{R}^{(M)} \;\mapsto\; \mathbb{R}^{(N)}$$

(qui ϕ rappresenta le applicazioni coordinate da M in $\mathbb{R}^{(M)}$ e ψ quelle da N in $\mathbb{R}^{(N)}$) e alla mappa f si attribuiscono le proprietà di regolarità di quest'ultima. In effetti, ogni atlante $\mathcal{A}$ definisce una struttura differenziale qualora si scelga come massimale l'unione di tutti quelli compatibili con $\mathcal{A}$. Attraverso la nozione di atlante massimale si definisce , sulla varietà, una struttura topologica. Essa è quella per cui tutte le carte in un atlante, cioè tutte le applicazioni coordinate sono omeomorfismi. In realtà la topologia cosìdefinita non è sufficiente a formalizzare compiutamente il problema della dinamica, ovvero a garantire la risolubilità di equazioni differenziali. Perciò ci si restringe a strutture topologiche che siano di Hausdorff, e a base numerabile. Una topologia è di Hausdorff qualora, per ogni coppi di punti distinti, esistono due aperti disgiunti nei quali sono contenuti. Intuitivamente, uno spazio non di Hausdorff potrebbe essere caratterizzato dalla presenza di biforcazioni. Una topologia è detta a base numerabile qualora esista un insieme numerabile di aperti (detto base) attraverso la cui unione è possibile ottenere un qualunque altro insieme aperto.

Appendice B

Sulla definizione di tensori su una varietà

L'analisi svolta nel testo ha portato alla definizione di spazio vettoriale tangente alla varietà in un punto, e a quella di fibrato tangente. Sorge perciò in modo naturale la questione di capire quale sia il duale a questi spazi: cioè l'insieme delle applicazioni lineari da T_xM in $\mathbb{R}$. Esso si definisce T_x^*M, spazio vettoriale cotangente in x ad M, e $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$ fibrato cotangente di M. È chiaro che è sufficiente caratterizzare una base per T_x^*M , ed in particolare quella duale a $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\mid_x\}$. A tal fine, si introduce la definizione di differenziale di una funzione $f \in \mathcal{F}(M)$. Esso è l'applicazione lineare per cui:

$$(df)_x \cdot X_x \equiv X_x \cdot f \tag{B.1}$$

Quindi, i differenziali delle applicazioni che descrivono le curve coordinate:

$$\begin{aligned} \left(dx^i\right)_x \cdot X_x &= X_x \cdot x^i && \text{(B.2)} \\ &= X^s \frac{\partial x^i}{\partial x^s} && \text{(B.3)} \\ &= X^i && \text{(B.4)} \end{aligned}$$

perciò:

$$\left(dx^i\right)_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_x = \delta_a^i \tag{B.5}$$

e allora:

$$(df)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x^a}\right)_x (dx^a)_x \tag{B.6}$$

Ciò chiarisce che un elemento di T_x^*M sarà:

$$(\theta)_x = a_n \left(dx^n\right)_x \tag{B.7}$$

Analogamente ad un campo vettoriale, una forma differenziale sarà una sezione del fibrato cotangente:

$$\theta \equiv a_i\left(x\right)dx^i \tag{B.8}$$

Inoltre la legge di trasformazione degli elementi di base duale e delle componenti di un covettore, per un cambiamento di coordinate, è opposta rispetto a quella delle grandezze analoghe nello spazio tangente: se $\tilde{x}^a = \tilde{x}^a\left(x^b\right)$ allora:

$$\theta = \theta_a\left(x\right)dx^a = \tilde{\theta}_a\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}^a$$

con

$$d\tilde{x}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^n}dx^n \quad \tilde{\theta}_a = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a}\theta_b \tag{B.9}$$

Una volta definita la nozione di vettore e covettore per un punto di una varietà si possono definire degli arbitrari tensori di tipo (r,s) : sono applicazioni lineari che associano a s vettori e r covettori un numero reale:

$$\left(\mathcal{T}^r_s\right)_x \equiv \{Lin\left(\overbrace{T_xM\otimes\ldots\otimes T_xM}^{s}\otimes\underbrace{T^*_xM\otimes\ldots\otimes T^*_xM}_{r}\right)\ \mapsto\ \mathbb{R}\}$$

e quindi, un campo tensoriale su tutta la varietà sarà $T\in\mathcal{T}^r_s\left(M\right)$, che ha la forma, in coordinate:

$$T = T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}\frac{\partial}{\partial x^{a_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{a_r}}dx^{b_1}\ldots dx^{b_s} \tag{B.10}$$

Questa espressione mette in luce, e questa affermazione può essere comunque rigorosamente dimostrata, che le proprietà di trasformazione per cambiamento di coordinate derivano da quelle per campi vettoriali e forma differenziali: è per questo motivo che un tensore simile viene detto r volte controvariante e s volte covariante.

Appendice C

Sulla definizione di algebra esterna e calcolo di Cartan

Per chiarire il significato del tensore $d\alpha$ presentato nel testo è necessario definire l'algebra esterna su M , o algebra delle forme differenziali: Una r-forma è un tensore r volte covariante totalmente antisimmetrico. Se $\bigwedge_r (M)$ ne rappresenta l'insieme, allora $T \in \bigwedge_r (M)$ se, per definizione:

$$T\left(A_{\pi(i_1)}, \dots A_{\pi(i_r)}\right) = (-1)^{P(\pi)}\, T\left(A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\right) \tag{C.1}$$

(qui π è una permutazione degli indici i_r , $P(\pi)$ ne è la parità, e gli A^i sono campi vettoriali). Come si può intuire, la base più naturale per questi tensori è definita da:(qui la sommatoria è estesa a tutte le permutazioni)

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \equiv \sum dx^{\pi(i_1)} \otimes \dots \otimes dx^{\pi(i_r)} \tag{C.2}$$

Risulta evidente che questa espressione si annulla qualora si abbiano due indici uguali, e quindi che non esistono k-forme su M se $k > dimM$. In coordinate, una r-forma T sarà:

$$T = \sum_{i_1 < \dots < i_r} T_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \tag{C.3}$$

Ancora, se $S \in \bigwedge_a (M)$ con:

$$S = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_a}$$

e $W \in \bigwedge_b (M)$ con:

$$W = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_b}$$

e $a + b < dimM$ si definisce prodotto esterno:

$$S \wedge W \equiv dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_a} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_b} \tag{C.4}$$

Esso è nullo se S e W hanno due indici uguali, oppure:

$$S \wedge W = (-1)^P \, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{a+b}} \tag{C.5}$$

dove P è la parità della permutazione rispetto all' ordine naturale degli indici (i_s, j_w). L'insieme:

$$\bigwedge (M) = \bigoplus_k \bigwedge_k (M)$$

si definisce algebra esterna (è associativa rispetto al prodotto $\wedge$). L'operatore d (derivata esterna) è del tipo:

$$d \; : \bigwedge_r (M) \mapsto \bigwedge_{r+1} (M)$$

ed è definito da (M è, ancora una volta, uno spazio vettoriale):

- $$d \; : \bigwedge_0 (M) \mapsto \bigwedge_1 (M) \qquad df \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{C.6}$$

  ovvero il differenziale esterno di una 0-forma, cioè una funzione, coincide col differenziale ordinario.

- $$d \circ d \equiv 0 \tag{C.7}$$

- Esso è un'antiderivazione rispetto al prodotto esterno: se $S \in \bigwedge_r (M)$ e $T \in \bigwedge_k (M)$ allora:

  $$d\,(T \wedge S) \equiv dT \wedge S + (-1)^k \, T \wedge dS \tag{C.8}$$

In coordinate, se

$$T = f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$$

si ha che:

$$dT \equiv \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$$

e per esempio se $\alpha = \alpha_i dx^i$ si può calcolare che $d\alpha = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^n} dx^n \wedge dx^i$. Parallelamente all'operatore d che trasforma una r-forma in una r+1-forma, si può definire un operatore di contrazione rispetto ad un campo vettoriale:

$$i_X \; : \; T^0_r (M) \mapsto T^0_{r-1} (M)$$

se $\theta \in T^0_r (M)$ e X e A_i sono campi vettoriali si definisce:

$$(i_X \theta) \cdot (A_1, \ldots, A_{r-1}) = \theta \cdot (X, A_1, \ldots, A_{r-1}) \tag{C.9}$$

Ad esempio, se $\theta = \theta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ si ha che:

$$i_X \theta \cdot A = \theta \cdot (X, A) \tag{C.10}$$

ovvero, in coordinate:

$$(i_X\theta)_n A^n = \theta_{ij} X^i A^j \quad \rightarrow \quad (i_X\theta)_n = \theta_{an} X^a \tag{C.11}$$

Ciò che è importante sottolineare è che l'operazione di derivazione esterna e quella di contrazione non sono indipendenti: si può provare (è nota come identità di Cartan) che se $T \in \bigwedge(M)$ allora:

$$L_X T = i_X \cdot dT + d\,(i_X T) \tag{C.12}$$

Una forma differenziale la cui derivata esterna si annulla si dice chiusa, una r-forma θ viene detta esatta se esiste una $r-1$-forma ρ per cui $\theta = d\rho$. Ma in virtù del fatto che d^2 è l'operatore nullo, allora ogni forma esatta è chiusa. L'analisi di un possibile viceversa porta al cosiddetto lemma di Poincarè: una forma chiusa è esatta se è definita su un dominio semplicemente connesso, ovvero un dominio in cui ogni curva chiusa si può contrarre con continuità ad un punto. Ad esempio, in uno spazio vettoriale ogni forma chiusa è esatta: non è cosìsu superfici come un cilindro, o un toro.

Appendice D

Sulla definizione di derivazione di Lie

Nel testo e nelle precedenti appendici si è visto come definire, in un punto di una varietà, e poi punto per punto, vettori, covettori, ed in generale tensori di ogni ordine. L'insieme di questi tensori:

$$\bigoplus_{(r,s)} \mathcal{T}_s^r(M) \equiv \mathcal{T}(M)$$

costituisce un'algebra rispetto all'operazione di prodotto tensoriale $\otimes$.

Un operatore differenziale $\mathcal{D}$ su quest'algebra è un operatore per cui si ha che:

- $\mathcal{D}$ trasforma $\mathcal{T}_s^r(M)$ in $\mathcal{T}_s^r(M)$
- $\mathcal{D}$ è una derivazione tensoriale: ovvero $\mathcal{D}$ è $\mathbb{R}$-lineare e se t_1 e $t_2 \in \mathcal{T}(M)$ allora :

  $$\mathcal{D}(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{D}t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\mathcal{D}t_1)$$

- $\mathcal{D}$ è locale : se $U \subset M$ e $t \in \mathcal{T}(M)$ si ha che:

  $$(\mathcal{D}t) \mid U = \mathcal{D}(t \mid U)$$

  ovvero la restrizione dell'immagine di t attraverso $\mathcal{D}$ è uguale all'immagine attraverso $\mathcal{D}$ della restrizione di t.

- $$\mathcal{D}[\frac{\partial}{\partial x^a} \otimes dx^a] = 0$$

  come si dice, $\mathcal{D}$ commuta con le contrazioni.

La derivazione di Lie è un operatore differenziale indotto da un campo vettoriale. Il primo passo è considerare $\mathcal{F}(M)$, l'algebra delle funzioni da M in $\mathbb{R}$ (algebra rispetto all'usuale prodotto) e porre:

$$L_X f \equiv df \cdot X \tag{D.1}$$

In coordinate, se $X = X^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a}$ si ha:

$$L_X f = X^a \frac{\partial f}{\partial x^a} \tag{D.2}$$

Dalla definizione si può vedere che:

$$L_X(fg) = f L_X g + (L_X f) g \tag{D.3}$$

e che, se f è costante, allora $L_X f = 0$. Ciò significa che L_X è una derivazione in $\mathcal{F}(M)$. L'aspetto significativo di questa analisi è che si può dimostrare che se θ è un operatore di derivazione su $\mathcal{F}(M)$, ovvero è $\mathbb{R}$-lineare, è locale e soddisfa la regola di Leibnitz, allora esiste un campo vettoriale A per cui:

$$\theta \cdot f \equiv L_A f \tag{D.4}$$

In particolare, le componenti del campo sono date dall'immagine attraverso θ delle curve coordinate:

$$A^i \equiv L_A x^i \tag{D.5}$$

Forti di questo risultato si può considerare, in $\mathcal{X}(M)$, il commutatore:

$$[A, B] \cdot f \equiv A \cdot (Bf) - B \cdot (Af) \tag{D.6}$$

È possibile calcolare esplicitamente che:

$$[A, B] \cdot (fg) = f([A, B] \cdot g) + ([A, B] \cdot f) g \tag{D.7}$$

e ciò significa che l'operatore $[A, B]$ è una derivazione su $\mathcal{F}(M)$. Perciò $[A, B] \cdot f$ definisce la derivata di Lie di f lungo un campo vettoriale. Questo campo vettoriale viene detto derivate di Lie di B lungo A:

$$L_A B \equiv [A, B] \tag{D.8}$$

$$[A, B] \cdot f \equiv L_{L_A B} f \tag{D.9}$$

Dalla definizione si vede che:

$$L_A B = -L_B A \tag{D.10}$$

e che vale un'identità, dette di Jacobi (in virtù della quale $\mathcal{X}(M)$, rispetto al commutatore, si dice algebra di Lie):

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \tag{D.11}$$

ovvero:

$$L_A[B,C] = [L_A B, C] + [B, L_A C] \tag{D.12}$$

A questo punto si estende questo operatore alle 1-forme, proprio attraverso la regola di Leibnitz e il fatto che commuti con le contrazioni:

$$\begin{aligned} L_A\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\otimes dx^a\right) &= 0 \quad \rightarrow \\ \left(L_A\frac{\partial}{\partial x^a}\right)\otimes dx^a + \frac{\partial}{\partial x^a}\otimes L_A dx^a &= 0 \quad \rightarrow \\ -\frac{\partial A^s}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^s}\otimes dx^n + \frac{\partial}{\partial x^s}\otimes (L_A dx^s)_n\, dx^n &= 0 \quad \rightarrow \\ L_A dx^s = \frac{\partial A^s}{\partial x^n}dx^n & \end{aligned}$$

e perciò:

$$\begin{aligned} L_A\left(\alpha_s(x)\, dx^s\right) &= \left(L_A \alpha_s(x)\right) dx^s + \alpha_s(x)\left(L_A dx^s\right) && \text{(D.13)} \\ &= A^n\frac{\partial \alpha_s}{\partial x^n}dx^s + \alpha_s\frac{\partial A^s}{\partial x^a}dx^a && \text{(D.14)} \end{aligned}$$

Il dettaglio della definizione dell'azione della derivazione di Lie su una 1-forma chiarisce che si può estendere ad un qualunque tensore proprio attraverso l'uso della regola di Leibnitz rispetto al prodotto $\otimes$. La derivazione di Lie, cosìdefinita, è proprio un operatore differenziale su $\mathcal{T}(M)$. La domanda naturale è, ora, se e quanti altri ne esistano. Il teorema di Willmore permette di affermare che esiste un unico operatore differenziale su $\mathcal{T}(M)$ che coincide con la derivazione di Lie se ristretto a funzioni e campi vettoriali.

È possibile caratterizzare la derivazione di Lie in modo un po' più - geometrico: a tal fine si introducono il concetto di pull-back e di push-forward. Essi rappresentano un modo per estendere il significato di una trasformazione Φ fra spazi vettoriali (e più in generale fra varietà) ad una trasformazione fra i campi tensoriali su di essi. Se M e N sono due spazi vettoriali, e $\Phi : M \mapsto N$, ovvero, in coordinate $y^k = \Phi^k\left(x^j\right)$, allora:

$$\Phi^* : \mathcal{F}(M) \mapsto \mathcal{F}(N) \text{ se } f \in \mathcal{F}(N)$$

$$\Phi^* f \equiv f \circ \Phi \tag{D.15}$$

$\Phi^* f$ si definisce pull-back di f attraverso Φ. In coordinate:

$$\left(\Phi^* f\right)(x) = f\left(y^k(x)\right) \tag{D.16}$$

Grazie a questa definizione, se $A \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, allora:

$$\Phi_* : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \mapsto \mathcal{X}(\mathcal{N})$$

$$\left(\Phi_* A\right)\cdot f \equiv A\cdot\left(\Phi^* f\right) \tag{D.17}$$

Esso si dice push-forward di A attraverso Φ: in coordinate dà:

$$(\Phi_* A) = A^n \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{D.18}$$

E pure:

$$\Phi^* : \mathcal{X}^* (\mathcal{N}) \mapsto \mathcal{X}^* (\mathcal{M})$$

Se $\theta \in \mathcal{X}^* (\mathcal{N})$ si definisce pull-back di θ attraverso Φ la 1-forma per cui:

$$(\Phi^* \theta) \cdot A \equiv \theta \cdot (\Phi_* A) \tag{D.19}$$

che in coordinate ha l'espressione:

$$(\Phi^* \theta) = \theta_s \frac{\partial y^s}{\partial x^n} dx^n \tag{D.20}$$

Come si può notare, estendendo queste posizioni a prodotti tensoriali in modo naturale, data una mappa Φ, in generale non invertibile, Φ_* trasforma tensori controvarianti di M in tensori controvarianti di N, mentre Φ^* trasforma tensori covarianti di N in tensori covarianti di M. Se Φ è invertibile, Φ_* e Φ^* si possono definire per tensori di ogni tipo, e si ha che

$$\Phi^* = \left(\Phi^{-1}\right)_* \tag{D.21}$$

Utilizzando queste notazioni, una trasformazione è detta di Poisson se:

$$\Phi^* \{f, g\} = \{\Phi^* f, \Phi^* g\} \tag{D.22}$$

Se si considera un campo vettoriale A,si può associare ad un gruppo di trasformazioni ad un parametro (almeno localmente, comeè sottolineato nel testo) Φ_s. Ovviamente per le trasformazioni Φ_s si possono definire push-forward e pull-back: grazie a ciò la nozione di derivazione di Lie di un tensore lungo un campo A si può leggere come limite del rapporto incrementale rispetto al parametro della funzione $\Phi_{s*} T$:

$$L_A T = \frac{d}{ds} (\Phi_{-s*} T) \tag{D.23}$$

Questa equazione chiarisce che la derivazione di Lie lungo un campo non è altro che la derivazione lungo le orbite del campo.

Appendice E

Sulla dimostrazione del teorema di Dirac

Se $\mathcal{A}$ è un'algebra in cui il prodotto è associativo, ma non commutativo, si definisce parentesi di Poisson una mappa:

$$\{\cdot,\cdot\} \ : \ \mathcal{A}\times\mathcal{A} \ \mapsto \ \mathcal{A}$$

che sia bilineare, antisimmetrica, che soddisfi l'identità di Jacobi:

$$\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\} = 0$$

e sia, rispetto al prodotto, una derivazione:

$$\{a,bc\} = b\{a,c\} + \{a,b\}c$$

Utilizzando questa definizione, si può calcolare:

$$\begin{aligned}
\{a_1a_2,b_1b_2\} &= \{a_1,b_1b_2\}a_2 + a_1\{a_2,b_1b_2\} \\
&= \left(\{a_1,b_1\}b_2 + b_1\{a_1,b_2\}\right)a_2 + a_1\left(\{a_2,b_1\}b_2 + b_1\{a_2,b_2\}\right) \\
&= \{a_1,b_1\}b_2a_2 + b_1\{a_1,b_2\}a_2 + a_1\{a_2,b_1\}b_2 + a_1b_1\{a_2,b_2\}
\end{aligned}$$

ma la stessa espressione si può valutare pure utilizzando la proprietà di derivazione prima rispetto al secondo membro:

$$\begin{aligned}
\{a_1a_2,b_1b_2\} &= \{a_1a_2,b_1\}b_2 + b_1\{a_1a_2,b_2\} \\
&= \{a_1,b_1\}b_2a_2 + a_1\{a_2,b_1\}b_2 + b_1\{a_1,b_2\}a_2 + b_1a_1\{a_2,b_2\}
\end{aligned}$$

Uguagliando i due risultati si ha:

$$\{a_1,b_1\}\left(a_2b_2 - b_2a_2\right) = \left(a_1b_1 - b_1a_1\right)\{a_2,b_2\}$$

Visto che questa condizione deve valere indipendentemente da a e b, allora deve essere:

$$a_1a_2 - a_2a_1 = \mu\{a_1,a_2\}$$

$$b_1 b_2 - b_2 b_1 = \mu\{b_1, b_2\}$$

in cui μ è un qualunque elemento che commuti con tutti gli elementi dell'algebra, cioè del centro.

Appendice F

Sui sistemi di Weyl

In questa appendice si svilupperanno dimostrazioni di alcune asserzioni, menzionate nel testo, a proposito di alcune caratteristiche relative ai sistemi di Weyl.

Come si è detto, un sistema di Weyl si può definire anche attraverso la definizione di una rappresentazione unitaria, abeliana, fedele di ognuno dei due sottospazi lagrangiani in cui si può suddividere lo spazio vettoriale S. Se:

$$S = S_1 \oplus S_2 \quad \text{con} \;\; \omega/S_1 = 0 \;\; ; \omega/S_2 = 0$$

per cui ogni vettore z si può decomporre in modo univoco:

$$z = z_1 \oplus z_2$$

e si ha:

$$\hat{U} \,:\, S_1 \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

e

$$\hat{V} \,:\, S_2 \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

per cui:

$$\hat{U}(z_1)\,\hat{V}(z_2) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega(z_1,z_2)}\hat{V}(z_2)\,\hat{U}(z_1)$$

allora, se si definisce ancora:

$$\hat{W}(z) \equiv e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega(z_1,z_2)}\hat{U}(z_1)\,\hat{V}(z_2) \tag{F.1}$$

si prova che $\hat{W}(z)$ è un sistema di Weyl. La prima questione è capire se $\hat{W}$ così definito sia unitario. Invero, un'applicazione formale delle proprietà degli operatori unitari indica che:

$$\hat{W}^\dagger(z) = e^{\frac{i}{2\hbar}\omega(z_1,z_2)}\hat{V}^\dagger(z_2)\,\hat{U}^\dagger(z_1)$$

e ciò comporta che:

$$\hat{W}(z)\,\hat{W}^\dagger(z) = \hat{W}^\dagger(z)\,\hat{W}(z) = \mathbf{1}$$

Semplicemente utilizzando le definizioni poste, si ha:

$$\begin{aligned}
\hat{W}\left(z+z'\right) &= \hat{U}\left(z_1+z_1'\right)\hat{V}\left(z_2+z_2'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_1+z_1',z_2+z_2'\right)}\\
&= \hat{U}\left(z_1\right)\hat{U}\left(z_1'\right)\hat{V}\left(z_2\right)\hat{V}\left(z_2'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_1+z_1',z_2+z_2'\right)}
\end{aligned}$$

e visto che, secondo la definizione si può invertire l'ordine del secondo operatore col terzo, inserendo un ulteriore fattore di fase, si ha ancora:

$$\begin{aligned}
&= \hat{U}\left(z_1\right)\hat{V}\left(z_2\right)\hat{U}\left(z_1'\right)\hat{V}\left(z_2'\right)e^{\frac{i}{\hbar}\omega\left(z_1',z_2\right)}e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_1+z_1',z_2+z_2'\right)}\\
&= \hat{W}\left(z\right)\hat{W}\left(z'\right)e^{\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_1',z_2\right)}e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_1,z_2'\right)}\\
&= \hat{W}\left(z\right)\hat{W}\left(z'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_2,z_1'\right)}e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_1,z_2'\right)}\\
&= \hat{W}\left(z\right)\hat{W}\left(z'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z_1+z_2,z_1'+z_2'\right)}\\
&= \hat{W}\left(z\right)\hat{W}\left(z'\right)e^{-\frac{i}{2\hbar}\omega\left(z,z'\right)}
\end{aligned}$$

E questo prova che $\hat{W}$ definito da (F.1) è un sistema di Weyl, cioè soddisfa la (3.4).

La seconda questione è ora dimostrare che gli operatori definiti in ciò che è stata chiamata rappresentazione à la Von Neumann soddisfano queste richieste. Se: $\mathcal{H}=\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R},dx\right)$ e si pone:

$$\left(\hat{U}\left(q\right)\psi\right)\left(x\right)=\psi\left(x+q\right)$$

$$\left(\hat{V}\left(p\right)\psi\right)\left(x\right)=e^{ipx/\hbar}\psi\left(x\right)$$

Si vede che sia $\hat{U}\left(q\right)$ che $\hat{V}\left(p\right)$ hanno norma 1. Infatti:

$$\begin{aligned}
\parallel\hat{U}\left(q\right)\psi\parallel^2 &= \langle\hat{U}\left(q\right)\psi\mid\hat{U}\left(p\right)\psi\rangle\\
&= \int dx\,\psi^*\left(x+q\right)\psi\left(x+q\right)\\
&= \int ds\mid\psi\left(s\right)\mid^2=\parallel\psi\parallel^2
\end{aligned}$$

e pure:

$$\parallel\hat{V}\left(p\right)\psi\parallel^2=\int dx\,e^{-ipx/\hbar}\psi^*\left(x\right)e^{ipx/\hbar}\psi\left(x\right)=\parallel\psi\parallel^2$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\langle\phi\mid\hat{U}\left(q\right)\psi\rangle &= \int dx\,\phi^*\left(x\right)\psi\left(x+q\right)\\
&= \int ds\,\phi^*\left(s-q\right)\psi\left(s\right)
\end{aligned}$$

ciò significa che:

$$\left(\hat{U}^\dagger\left(q\right)\phi\right)\left(x\right)=\phi\left(x-q\right)$$

e quindi che:

$$\left(\hat{U}^{\dagger}(q)\,\hat{U}(q)\,\phi\right)(x) = \left(\hat{U}(q)\,\hat{U}^{\dagger}(q)\,\phi\right)(x) = \mathbf{1}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \langle \phi \mid \hat{V}(p)\,\psi\rangle &= \int dx\,\phi^{*}(x)\,e^{ipx/\hbar}\psi(x) \\ &= \int dx\left(e^{-ipx/\hbar}\phi(x)\right)^{*}\psi(x) \end{aligned}$$

perciò:

$$\left(\hat{V}^{\dagger}(p)\,\psi\right)(x) = e^{-ipx/\hbar}\psi(x)$$

da cui:

$$\left(\hat{V}^{\dagger}(p)\,\hat{V}(p)\,\psi\right)(x) = \left(\hat{V}(p)\,\hat{V}^{\dagger}(p)\,\psi\right)(x) = \mathbf{1}$$

Questo prova che questi operatori sono unitari. Ancora:

$$\left(\hat{U}(q+q')\,\psi\right) = \psi(x+q+q')$$

mentre:

$$\left(\hat{U}(q)\,\hat{U}(q')\,\psi\right)(x) = \left(\hat{U}(q')\,\psi\right)(x+q) = \psi(x+q+q')$$

e parallelamente :

$$\left(\hat{V}(p+p')\,\psi\right)(x) = e^{ix(p+p')/\hbar}\psi(x)$$

D'altro canto:

$$\left(\hat{V}(p)\,\hat{V}(p')\,\psi\right)(x) = e^{ipx/\hbar}\left(\hat{V}(p')\,\psi\right)(x) = e^{ix(p+p')/\hbar}\psi(x)$$

E quindi $\hat{U}(q)$ e $\hat{V}(p)$ sono due gruppi a un parametro di operatori unitari. Un calcolo esplicito dà:

$$\begin{aligned} \left(\hat{U}(q)\,\hat{V}(p)\,\psi\right)(x) &= \left(\hat{V}(p)\,\psi\right)(x+q) \\ &= e^{ip(x+q)/\hbar}\psi(x+q) \end{aligned}$$

e, in modo analogo:

$$\begin{aligned} \left(\hat{V}(p)\,\hat{U}(q)\,\psi\right)(x) &= e^{ipx/\hbar}\left(\hat{U}(q)\,\psi\right)(x) \\ &= e^{ipx/\hbar}\psi(x+q) \end{aligned}$$

Confrontando le due espressioni si vede che:

$$\left(\hat{U}(q)\,\hat{V}(p)\,\psi\right)(x) = e^{ipq/\hbar}\left(\hat{V}(p)\,\hat{U}(q)\,\psi\right)(x) \tag{F.2}$$

che coincide con:

$$\left(\hat{U}(q)\,\hat{V}(p)\,\psi\right)(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega((q,0);(0,p))}\left(\hat{V}(p)\,\hat{U}(q)\,\psi\right)(x) \tag{F.3}$$

in cui $\omega\left((q,0);(0,p)\right)$ indica per esteso l'immagine attraverso la 2-forma simplettica dei vettori di componenti $(q,0)$ e $(0,p)$. Questa è proprio l'espressione presente nel testo.

Appendice G

Sulla valutazione esplicita degli operatori $\hat{\Omega}(f)$

In questa appendice si svilupperanno i calcoli necessari a valutare la forma degli operatori $\hat{\Omega}(f)$ qualora il sistema di Weyl sia definito nella rappresentazione di Schrödinger, per alcuni casi di funzioni f proposti nel testo. In generale, dalla definizione si ha che, se $\psi \in \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ e:

$$\left(\hat{W}(\xi,\eta)\,\psi\right)(x) = e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi)$$

allora $\hat{\Omega}(f)$ è un operatore integrale:

$$\Omega(f) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d\xi\, d\eta\, dq\, dp\, f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta - p\xi)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi) \tag{G.1}$$

In questa analisi le espressioni vanno intese in senso proprio qualora le funzioni f siano a quadrato integrabile sul piano, e perciò l'analisi di Fourier sia loro rigorosamente applicabile; in senso improprio, ovvero secondo la teoria delle funzioni generalizzate, nel caso in cui non siano a quadrato sommabile. In particolare si utilizzerà più volte la rappresentazione integrale della distribuzione δ di Dirac:

$$\int \frac{da}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}a(x-y)} = \delta(x-y)$$

essa dà invero risultati che coincidono con quelli dimostrabili in modo completo.

- il primo caso che si considera è quello di una funzione f che dipende soltanto dalla coordinata q. Dalla definizione:

$$(\Omega(f(q))\,\psi)(x) = \int \frac{d\xi\, d\eta\, dq\, dp}{(2\pi\hbar)^2} f(q)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta - p\xi)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi)$$

Poichè la funzione integranda dipende da p solo per fattori di fase lineari in questa variabile, l'integrazione in dp conduce a:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq \int d\xi \int d\eta f(q)\, e^{-\frac{i}{\hbar} q\eta} e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi)\, \delta(\xi)$$

e quindi, grazie alle proprietà della distribuzione δ si può effettuare l'integrazione in $d\xi$, e ottenere:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq \int d\eta f(q)\, e^{-\frac{i}{\hbar} q\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta x} \psi(x+\xi)$$

Se, in modo analogo, si integra in $d\eta$, si ha:

$$= \int dq f(q)\, \psi(x+\xi)\, \delta(q-x) =$$

e, in fine si giunge a:

$$(\Omega(f(q))\psi)(x) = f(x)\,\psi(x) \tag{G.2}$$

che è la forma proposta nel testo.

- il secondo esempio è $f = f(p)$. Dalla definizione:

$$(\Omega(f(p))\psi)(x) = \int \frac{d\xi\, d\eta\, dq\, dp}{(2\pi\hbar)^2} f(p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta - p\xi)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi)$$

In modo simile a quanto argomentato precedentemente, l'integrazione in dq introduce un fattore $\delta(\eta)$, che permette di effettuare immediatamente l'integrazione in $d\eta$, così da ottenere:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \int d\xi\, f(p)\, e^{\frac{i}{\hbar} p\xi} \psi(x+\xi)$$

una trasformazione della variabile di integrazione $a = x + \xi$ dà:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \int da\, f(p)\, e^{\frac{i}{\hbar} p(a-x)} \psi(a)$$

Nel caso particolare in cui $f = p$ allora questa espressione diviene:

$$\left(\hat{\Omega}(p)\,\psi\right)(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \int da\, p e^{\frac{i}{\hbar} p(a-x)} \psi(a)$$

visto che:

$$p e^{\frac{i}{\hbar} p(a-x)} = \left(i\hbar \frac{d}{dx}\right) e^{\frac{i}{\hbar} p(a-x)} \tag{G.3}$$

allora si ha, dal momento che x non è una variabile d'integrazione:

$$\left(\hat{\Omega}(p)\,\psi\right)(x) = \left(i\hbar \frac{d}{dx}\right) \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \int da\, e^{\frac{i}{\hbar} p(a-x)} \psi(a)$$

Questo integrale può essere valutato immediatamente: l'integrazione in dp dà un termine $\delta\left(a-x\right)$, per cui:

$$\left(\hat{\Omega}\left(p\right)\psi\right)\left(x\right)=\left(i\hbar\frac{d\psi}{dx}\right) \tag{G.4}$$

In generale questa linea si può estendere a funzioni polinomiali in p. Si considera una generalizzazione di (G.3):

$$p^{n}e^{\frac{i}{\hbar}p(a-x)}=\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)^{n}e^{\frac{i}{\hbar}p(a-x)} \tag{G.5}$$

e si ottiene:

$$\left(\hat{\Omega}\left(p^{n}\right)\psi\right)\left(x\right)=\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)^{n}\psi$$

Qualora la funzione f sia analitica in p allora questi calcoli attribuiscono un significato all'espressione, proposta nel testo:

$$\left(\hat{\Omega}\left(f\left(p\right)\right)\psi\right)\left(x\right)=\left.\left(f\left(i\hbar\frac{d}{da}\right)\psi\left(a\right)\right)\right|_{a=x} \tag{G.6}$$

- il terzo esempio è quello in cui si considera $f=q^{a}p^{b}$. Dalla definizione:

$$\left(\Omega\left(q^{a}p^{b}\right)\psi\right)\left(x\right)=\int\frac{d\xi\,d\eta\,dq\,dp}{\left(2\pi\hbar\right)^{2}}\,q^{a}p^{b}e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta-p\xi)}e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)}\psi\left(x+\xi\right)$$

Si considera la trasformazione di coordinate $s=x+\xi$ e l'espressione diviene:

$$=\frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)^{2}}\int ds\int d\eta\int dq\int dp\;q^{a}p^{b}e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta)}e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}e^{\frac{i}{2\hbar}\eta(x+s)}\psi\left(s\right)$$

mentre,se si integra in $d\eta$:

$$=\frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)}\int dq\int ds\int dp\;q^{a}p^{b}e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}\delta\left(q-\frac{x}{2}-\frac{s}{2}\right)\psi\left(s\right)$$

ciò rende immediata l'integrazione in dq per cui si ha:

$$=\frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)}\int ds\int dp\;\left(x+s\right)^{a}p^{b}e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}\frac{1}{2^{a}}\psi\left(s\right)$$

Sviluppando il binomio e considerando che x non è una variabile di integrazione:

$$=\frac{1}{2^{a}}\sum_{k=0}^{a}\left(\begin{array}{c}a\\k\end{array}\right)x^{k}\frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)}\int ds\int dp\;s^{a-k}p^{b}e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}\psi\left(s\right)$$

Per semplificare l'integrazione in dp si ricorre alla (G.5), e si ha:

$$= \frac{1}{2^a} \sum_{k=0}^{a} \left(\begin{array}{c} a \\ k \end{array} \right) x^k \left(i\hbar \frac{d}{dx} \right)^b \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int ds \int dp \; s^{a-k} e^{\frac{i}{\hbar} p(s-x)} \psi(s)$$

In quest'ultima espressione, al solito, l'integrazione in dp è banale ed il termine $\delta(s-x)$ semplifica l'ulteriore integrazione in ds, in modo da arrivare alla forma proposta nel testo:

$$\left(\hat{\Omega} \left(q^a p^b \right) \right)(x) = \frac{1}{2^a} \sum_{k=0}^{a} \left(\begin{array}{c} a \\ k \end{array} \right) x^k \left(i\hbar \frac{d}{dx} \right)^b \left[x^{a-k} \psi(x) \right] \qquad \text{(G.7)}$$

Queste stesse linee si possono estendere: in particolare, ora verranno applicate per chiarire con maggiore dettaglio quali sono le differenze con la mappa di Weyl pesata, di cui si è discusso. La prima analisi è capire quale sia la forma degli operatori $\hat{\Omega}^{(w)}(q)$ e $\hat{\Omega}^{(w)}(p)$.

- Dalla definizione:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}(q) \psi \right)(x) = \int \frac{d\xi \, d\eta \, dq \, dp}{(2\pi\hbar)^2} w(\xi, \eta) \, q e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta - p\xi)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi)$$

  Al solito, si integra in dp e si ottiene un termine $\delta(\xi)$ che semplifica l'integrazione in $d\xi$:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq \int d\eta \; w(0, \eta) \, q e^{-\frac{i}{\hbar} q\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta x} \psi(x)$$

  Se si definisce:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq \int d\eta \; w(0, \eta) \, q e^{-\frac{i}{\hbar} q\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta x}$$

  allora l'espressione di partenza coincide con quella riportata nel testo.

- Parallelamente si ha:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}(p) \psi \right)(x) = \int \frac{d\xi \, d\eta \, dq \, dp}{(2\pi\hbar)^2} f(q) \; w(\xi, \eta) \, p e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta - p\xi)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi)$$

  Chiaramente in questo caso si integra in dq, e dopo la semplificazione si ha:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \int d\xi \; w(\xi, 0) \, p e^{\frac{i}{\hbar} p\xi} \psi(x+\xi)$$

  secondo la trasformazione $a = x + \xi$ questo integrale diviene:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \int da \; w(a-x, 0) \, p e^{\frac{i}{\hbar} p(a-x)} \psi(a)$$

anche in questo caso si ricorre all'identità (G.3) e si ha:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \int da\, w\left(a-x,0\right) i\hbar\frac{d}{dx}[e^{\frac{i}{\hbar}p(a-x)}]\psi\left(a\right)$$

La regola di derivazione di un prodotto permette di scrivere questa espressione come la somma di due addendi:

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \int da[-i\hbar\frac{d}{dx}\ w\left(a-x,0\right)]e^{\frac{i}{\hbar}p(a-x)}\psi\left(a\right) \\ + & i\hbar\frac{d}{dx}[\frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \int da\, w\left(a-x,0\right) e^{\frac{i}{\hbar}p(a-x)}\psi\left(a\right)] \end{aligned}$$

Questi integrali sono risolubili in modo ormai evidente; si ottiene:

$$= -i\hbar\ [\frac{\partial}{\partial x}w\left(a-x,0\right)]\Big|_{a=x}\psi\left(x\right) + w\left(0,0\right) i\hbar\frac{d\psi}{dx}$$

Questa è proprio l'espressione data nel testo.

Nel testo si sono considerati due esempi particolari, $w = e^{\pm i\xi\eta/2\hbar}$. Se si specializzano i risultati appena illustrati a questi casi si vede che:

$$\hat{\Omega}^{(w)}\left(q\right) = \hat{\Omega}\left(q\right)$$

$$\hat{\Omega}^{(w)}\left(p\right) = \hat{\Omega}\left(p\right)$$

La traccia delineata permette di provare, inoltre, che, in questi casi:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\left(q\right)\right)\psi\right)\left(x\right) = \left(\hat{\Omega}\left(f\left(q\right)\right)\psi\right)\left(x\right)$$

e pure che:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\left(p\right)\right)\psi\right)\left(x\right) = \left(\hat{\Omega}\left(f\left(p\right)\right)\psi\right)\left(x\right)$$

Ciò che è interessante è però condurre in dettaglio questa analisi nel caso di $f = q^a p^b$; come è stato detto, è in questo modo che si evidenzia il ruolo della funzione peso nella mappa di Weyl.

- se $w = e^{\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}$ allora in generale:

  $$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(f\right)\psi\right)\left(x\right) = \int \frac{d\xi\, d\eta\, dq\, dp}{\left(2\pi\hbar\right)^2} f\left(q\right)\ f\left(q,p\right) e^{-\frac{i}{\hbar}q\eta}e^{\frac{i}{\hbar}p\xi}e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)}\psi\left(x+\xi\right)$$

  attraverso la trasformazione $s = x+\xi$ quest'integrale diviene:

  $$= \int\frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{d\eta}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ f\left(q,p\right) e^{-\frac{i}{\hbar}q\eta}e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}e^{\frac{i}{\hbar}\eta s}\psi\left(s\right)$$

  L'integrazione in $d\eta$ introduce un termine $\delta\left(q-s\right)$, che rende immediata l'ulteriore integrazione in ds:

  $$= \int\frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ f\left(q,p\right) e^{\frac{i}{\hbar}p(q-x)}\psi\left(q\right)$$

Se $f = q^a p^b$ questa espressione assume la forma:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(q^a p^b\right)\psi\right)(x) = \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(q^a p^b\right) e^{\frac{i}{\hbar}p(q-x)}\psi(q)$$

che si può anche porre come:

$$= \left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)^b \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} q^a e^{\frac{i}{\hbar}p(q-x)}\psi(q)$$

e, quindi, infine:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(q^a p^b\right)\psi\right)(x) = \left(\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)^b x^a \psi\right)(x) \tag{G.8}$$

- Se, invece, $w = e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}$ si ha:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}(f)\psi\right)(x) = \int \frac{d\xi\, d\eta\, dq\, dp}{(2\pi\hbar)^2} f(q)\ f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}q\eta} e^{\frac{i}{\hbar}p\xi} e^{\frac{i}{\hbar}\eta x}\psi(x+\xi)$$

Con la oramai solita sostituzione $s = \xi + x$ diviene:

$$= \int \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}q\eta} e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)} e^{\frac{i}{\hbar}\eta x}\psi(s)$$

e, ancora, integrando in $d\eta$ e semplificando:

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} f(x,p)\, e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}\psi(s)$$

Se $f = q^a p^b$ allora:

$$\left(\hat{\Omega}^{(w)}\left(q^a p^b\right)\psi\right)(x) = \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} x^a p^b e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}\psi(s)$$

Visto che x non è una variabile di integrazione, questo integrale diviene:

$$= x^a \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} p^b e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)}\psi(s)$$

e, a questo punto in modo naturale, questo si scrive:

$$x^a \left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)^b \psi(x) \tag{G.9}$$

Appendice H

Sulla mappa di Wigner

In questa appendice si proverà che la mappa di Wigner, introdotta nel testo, definisce l'inversa della mappa di Weyl (nel caso della mappa di Weyl non pesata, poichè l'estensione è molto semplice) , e ancora che, attraverso esse, si ha una biezione fra l'insieme delle funzioni che appartengono a $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, dqdp\right)$ e gli operatori della classe di Hilbert-Schmidt in $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}, dx\right)$.

Nello sviluppo di questa analisi si considererà la traccia in senso generalizzato, ovvero la si valuterà rispetto ad una base di autofunzioni improprie, in quanto relative allo spettro continuo degli operatori $\hat{P}$ o $\hat{Q}$. Nella notazione alla Dirac, in cui le manipolazioni formali sono rese in modo più semplice ed intuitivo, si ha che, se $|x\rangle$ è un autoket dell'operatore $\hat{Q}$ relativo all'elemento dello spettro continuo x allora:

$$\hat{Q}|x\rangle = x|x\rangle$$

$$e^{ip\hat{Q}/\hbar}|x\rangle = e^{ipx/\hbar}|x\rangle$$

Analogamente se $|k\rangle$ è un autoket dell'operatore $\hat{P}$ relativo all'elemento dello spettro continuo k allora:

$$\hat{P}|k\rangle = k|k\rangle$$

$$e^{iq\hat{P}/\hbar}|k\rangle = e^{iqk/\hbar}|k\rangle$$

Inoltre, visto che gli operatori sono realizzati sullo spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato sommabile definite su una retta:

$$\langle k|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}xk}$$

Attraverso essi le relazioni di completezza si scrivono come:

$$\mathbf{1} = \int dx|x\rangle\langle x|$$

e

$$\mathbf{1} = \int dk|k\rangle\langle k|$$

e quelle di ortogonalità sono assunte rispetto alla δ di Dirac:

$$\langle x|y\rangle = \delta\,(x-y)$$

$$\langle p|k\rangle = \delta\,(p-k)$$

Al solito questi argomenti vanno intesi esclusivamente come regole di calcolo: essi danno, come già sottolineato, risultati che coincidono con quelli rigorosamente ottenibili mediante un'analisi corretta e approfondita [18]. Il primo passo è valutare il termine:

$$Tr[\hat{W}\,(\xi,\eta)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)]$$

In base alla definizione di sistema di Weyl, esso è uguale a:

$$= Tr[e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}e^{-\frac{i}{2\hbar}xk}e^{\frac{i}{\hbar}\xi\hat{P}}e^{\frac{i}{\hbar}\eta\hat{Q}}e^{-\frac{i}{\hbar}x\hat{P}}e^{-\frac{i}{\hbar}k\hat{Q}}]$$

Invertendo la posizione del terzo operatore col quarto si introduce un'ulteriore fattore di fase, secondo le proprietà di commutazione di questi:

$$= Tr[e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}e^{\frac{i}{2\hbar}xk}e^{\frac{i}{\hbar}\xi\hat{P}}e^{\frac{i}{\hbar}\eta\hat{Q}}e^{-\frac{i}{\hbar}k\hat{Q}}e^{-\frac{i}{\hbar}x\hat{P}}]$$

Se si considera la traccia rispetto ad un sistema di autoket dell'operatore $\hat{P}$:

$$= e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}e^{\frac{i}{2\hbar}xk}\int dl\; e^{\frac{i}{\hbar}l(\xi-x)}\langle l|e^{\frac{i}{\hbar}\eta\hat{Q}}e^{-\frac{i}{\hbar}k\hat{Q}}|l\rangle$$

e dalla relazione che esprime il prodotto scalare di un autoket dell'operatore $\hat{P}$ rispetto ad un autoket dell'operatore $\hat{Q}$:

$$= e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}e^{\frac{i}{2\hbar}xk}\frac{1}{2\pi\hbar}\int dl\int ds\; e^{\frac{i}{\hbar}l(\xi-x)}e^{\frac{i}{\hbar}s(\eta-k)}$$

Quindi si ha:

$$Tr[\hat{W}\,(\xi,\eta)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)] = e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}e^{\frac{i}{2\hbar}xk}\,(2\pi\hbar)\,\delta\,(\xi-x)\,\delta\,(\eta-k) \tag{H.1}$$

Il secondo passo è valutare il termine:

$$Tr[\hat{\Omega}\,(f)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)]$$

Dalla definizione si ha che è uguale a:

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int dq\,dp\,d\xi\,d\eta\,f\,(q,p)\,e^{-\frac{i}{2\hbar}q\eta}e^{\frac{i}{2\hbar}\xi p}Tr[\hat{W}\,(\xi,\eta)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)]$$

In base a quanto già calcolato, (H.1), questa espressione è uguale a:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dq\,dp\,d\xi\,d\eta\,f\,(q,p)\,e^{-\frac{i}{2\hbar}q\eta}e^{\frac{i}{2\hbar}\xi p}e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}e^{\frac{i}{2\hbar}xk}\delta\,(\xi-x)\,\delta\,(\eta-k)$$

i termini δ rendono immediate le integrazioni in $d\eta$ e $d\xi$, per cui:

$$Tr[\hat{\Omega}(f)\,\hat{W}^{\dagger}(x,k)] = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dq \int dp\, f(q,p)\, e^{-\frac{i}{2\hbar}qk} e^{\frac{i}{2\hbar}xp} \tag{H.2}$$

Questo rende evidente che $Tr[\hat{\Omega}(f)\,\hat{W}^{\dagger}(x,k)]$ rappresenta la trasformata di Fourier simplettica di f. Quindi:

$$f(s,l) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{2\hbar}xl} e^{\frac{i}{2\hbar}sk} Tr[\hat{\Omega}(f)\,\hat{W}^{\dagger}(x,k)] \tag{H.3}$$

E questa è proprio la mappa di Wigner definita nel testo. Senza, come si è detto, entrare nel dettaglio del calcolo, è semplice provare che la mappa di Wigner, nel caso in cui la mappa di Weyl sia pesata attraverso una funzione $w(\xi,\eta)$, coincide con quella riportata nel testo.

Ora si considera l'azione dell'operatore $\hat{\Omega}(f)$ su un elemento ψ. Secondo la definizione:

$$(\Omega(f)\,\psi)(x) = \int \frac{d\xi\, d\eta\, dq\, dp}{(2\pi\hbar)^2} f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta - p\xi)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\xi\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta(x+\xi)} \psi(x+\xi)$$

con $s = x + \xi$ diviene:

$$(\Omega(f)\,\psi)(x) = \int \frac{ds\, d\eta\, dq\, dp}{(2\pi\hbar)^2} f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\eta(q-s)} e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)} e^{-\frac{i}{2\hbar}(s-x)\eta} \psi(s)$$

$$= \int ds\; k(s,x)\,\psi(s)$$

avendo definito:

$$k(s,x) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int dq \int dp \int d\eta\; f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta)} e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)} e^{-\frac{i}{2\hbar}(s-x)\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta s} \tag{H.4}$$

Per provare quanto ipotizzato bisogna calcolare:

$$\int ds \int dx |k(s,x)|^2$$

Esso è uguale a:

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int dq \int ds \int dp \int dx \int d\eta \int d\sigma \int da \int db\; f(q,p)\, f^*(a,b) \\ \cdot \quad & e^{-\frac{i}{\hbar}(q\eta)} e^{\frac{i}{\hbar}p(s-x)} e^{-\frac{i}{2\hbar}(s-x)\eta} e^{\frac{i}{\hbar}\eta s} e^{\frac{i}{\hbar}(a\sigma)} e^{-\frac{i}{\hbar}b(s-x)} e^{\frac{i}{2\hbar}(s-x)\sigma} e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma s} \end{aligned}$$

se si integra in $d\sigma$ si ottiene un termine $\delta\left(a - \frac{s}{2} - \frac{x}{2}\right)$ che semplifica l'integrazione in ds. Riordinando i termini l'espressione diviene :

$$= \frac{2}{2\pi\hbar}\int dx\, dq\, dp\, d\eta\, da\, db\, f(q,p)\, f^*(a,b)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\eta(q-a)} e^{\frac{2i}{\hbar}(p-b)(a-x)}$$

Poi si effettua l'integrazione in $d\eta$: essa dà un termine $\delta(a-q)$ che rende immediata l'integrazione in da. Si ottiene:

$$2\int dx\int dq\int dp\int db\, f(q,p)\, f^*(q,b)\, e^{\frac{2i}{\hbar}(p-b)(q-x)}$$

Ancora, come si vede, l'integrazione in dx dà un termine del tipo $\delta(2(p-b))$, per cui il valore finale dell'integrale è:

$$\int ds\int dx|k(s,x)|^2 = 2\pi\hbar\int dq\int dp|f(q,p)|^2 \tag{H.5}$$

e questa uguaglianza chiarisce che se $f\in\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, dqdp\right)$ allora $\hat{\Omega}(f)$ è della classe di Hilbert-Schmidt in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$.

Per provare il viceversa di questa affermazione, cioè che ad ogni operatore della classe di Hilbert-Schmidt in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ per cui è finita la traccia dell'operatore $\hat{A}\hat{W}^\dagger(x,k)$, la mappa di Wigner associa una funzione in $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^2, dqdp\right)$, il primo passo è ottenere una forma della funzione:

$$f_{\hat{A}}(q,p) = \left(\hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{A}\right)\right)(q,p) \tag{H.6}$$

con:

$$f_{\hat{A}}(q,p) = \int\frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}xp}e^{\frac{i}{\hbar}qk}Tr[\hat{A}\hat{W}^\dagger(x,k)]$$

Per valutare la traccia si considerano $|s\rangle$ e $|t\rangle$ sistemi di autoket di $\hat{Q}$ e $|l\rangle$ sistema di autoket di $\hat{P}$:

$$\begin{aligned} f_{\hat{A}}(q,p) &= \int\frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}xp}e^{\frac{i}{\hbar}qk}\int ds\int dl\int dt \\ &\cdot\ e^{-\frac{i}{2\hbar}xk}\langle s|\hat{A}|t\rangle\langle t|e^{-\frac{i}{\hbar}x\hat{P}}|l\rangle\langle l|e^{-\frac{i}{2\hbar}k\hat{Q}}|s\rangle \end{aligned}$$

Dalle proprietà di questi sistemi si ha che:

$$\begin{aligned} &= \int\frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}xp}e^{\frac{i}{\hbar}qk}e^{-\frac{i}{2\hbar}xk} \\ &\cdot\ \int ds\int dl\int dt\frac{1}{2\pi\hbar}\langle s|\hat{A}|t\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}xl}e^{-\frac{i}{\hbar}sk}e^{-\frac{i}{\hbar}l(s-t)} \end{aligned}$$

Dall'integrazione in dl si ha un termine $\delta(t-s-x)$ che permette di semplificare l'integrazione in dx. Si ottiene:

$$f_{\hat{A}}(q,p) = \int ds\int dk\int dt\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}qk}e^{-\frac{i}{\hbar}p(t-s)}e^{-\frac{i}{2\hbar}k(t+s)}\langle s|\hat{A}|t\rangle$$

Parallelamente, se $\hat{A}$ è un'operatore della classe di Hilbert-Schmidt, allora:

$$\left(\hat{A}\psi\right)(x) \equiv \int dsk(x,s)\,\psi(s) \tag{H.7}$$

con $k\left(x,s\right)$ funzione a quadrato sommabile sul piano. Questa relazione si può pure scrivere:

$$\langle x|\hat{A}|\psi\rangle = \int ds \langle x|\hat{A}|s\rangle\langle s|\psi\rangle \tag{H.8}$$

e quindi identificare:

$$k\left(x,s\right) \equiv \langle x|\hat{A}|s\rangle \tag{H.9}$$

ovvero:

$$f_{\hat{A}}\left(q,p\right) = \int ds \int dk \int dt \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}qk} e^{-\frac{i}{\hbar}p(t-s)} e^{-\frac{i}{2\hbar}k(t+s)} k\left(t,s\right)$$

Fatto ciò, adesso bisogna calcolare il modulo quadro della funzione $f_{\hat{A}}$:

$$\begin{aligned} \int dq \int dp |f_{\hat{A}}\left(q,p\right)|^2 &= \int \frac{dq\, dp\, dk\, dt\, ds\, d\tau\, d\sigma\, d\eta}{\left(2\pi\hbar\right)^2} k\left(s,t\right) k^*\left(\sigma,\tau\right) \\ &\cdot \; e^{\frac{i}{\hbar}q(k-\eta)} e^{\frac{i}{\hbar}p(s-t)} e^{\frac{i}{\hbar}p(\tau-\sigma)} e^{-\frac{i}{2\hbar}k(t+s)} e^{\frac{i}{2\hbar}\eta(\tau+\sigma)} \end{aligned}$$

In questa espressione si effettua l'integrazione in dk: il termine $\delta\left(q-\frac{t}{2}-\frac{s}{2}\right)$ che ne deriva rende possibile la semplificazione dell'integrazione in dq. Si ottiene:

$$= \int \frac{dp\, dt\, ds\, d\tau\, d\sigma\, d\eta}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{2\hbar}\eta(t+s)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\eta(\tau+\sigma)} e^{-\frac{i}{\hbar}p(\sigma-\tau)} e^{\frac{i}{\hbar}p(s-t)} k\left(s,t\right) k^*\left(\sigma,\tau\right)$$

si definisce un trasformazione delle variabili di integrazione:

$$a = t + s \qquad \underline{=} t - s$$

$$\alpha = \tau + \sigma \qquad \beta = \tau - \sigma$$

e l'integrale diviene:

$$= \int \frac{dp\, d\eta\, da\, db\, d\alpha\, d\beta}{8\pi\hbar} k\left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) k^*\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) e^{\frac{i}{2\hbar}\eta(a-\alpha)} e^{\frac{i}{\hbar}\phi(b-\beta)}$$

se si integra in $d\eta$ e dp si ottengono due termini: $\delta\left(\frac{a-\alpha}{2}\right)$ e $\delta\left(b-\beta\right)$ Grazie ad essi l'espressione si riduce a:

$$\int dq \int dp |f_{\hat{A}}\left(q,p\right)|^2 = \pi\hbar \int da \int db |k\left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)|^2 \tag{H.10}$$

Riespresso nelle precedenti variabili diviene:

$$\int dq \int dp |f_{\hat{A}}\left(q,p\right)|^2 = 2\pi\hbar \int ds \int dt |k\left(s,t\right)|^2 \tag{H.11}$$

e questa quantità è finita poichè, secondo la (H.5), $k\left(s,t\right)$ definisce il nucleo integrale di un operatore della classe di Hilbert-Schmidt in $\mathcal{L}^2\left(\mathbb{R},dx\right)$.

Come ultima questione si considera:

$$f^*_{\hat{A}}(q,p) = \left(\left(\hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{A}\right)\right)(q,p)\right)^*$$

secondo la definizione, ciò è uguale a:

$$= \left(\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{2\hbar}xp} e^{\frac{i}{2\hbar}qk} Tr[\hat{A}\hat{W}^\dagger(x,k)]\right)^*$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{2\hbar}xp} e^{-\frac{i}{2\hbar}qk} \left(Tr[\hat{A}\hat{W}^\dagger(x,k)]\right)^*$$

Visto che:

$$\left(Tr\hat{A}\right)^2 = Tr\hat{A}^\dagger$$

allora l'espressione precedente diviene:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{2\hbar}xp} e^{-\frac{i}{2\hbar}qk} Tr[\hat{A}^\dagger\hat{W}(x,k)]$$

Attraverso una trasformazione nelle variabili di integrazione:

$$x \rightarrow -x \qquad\qquad k \rightarrow -k$$

si ha:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{2\hbar}xp} e^{\frac{i}{2\hbar}qk} Tr[\hat{A}^\dagger\hat{W}(-x,-k)]$$

ma:

$$\hat{W}(-x,-k) = \hat{W}^\dagger(x,k)$$

e quindi:

$$f^*_{\hat{A}}(q,p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{2\hbar}xp} e^{\frac{i}{2\hbar}qk} Tr[\hat{A}^\dagger\hat{W}^\dagger(x,k)] \tag{H.12}$$

ovvero:

$$f^*_{\hat{A}}(q,p) = f_{\hat{A}^\dagger}(q,p) \tag{H.13}$$

Appendice I

Sul prodotto di Moyal

In questa appendice si espliciteranno i calcoli che conducono ad assumere, come sottolineato nel testo, una specifica forma per l'espressione del prodotto di Moyal, ottenuto in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$ mediante un sistema di Weyl relativo alla struttura simplettica in un sistema di coordinate in cui ha la forma canonica.

Come si è detto, se f e g sono elementi di $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$ si definisce prodotto di Moyal:

$$f *_M g = \hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{\Omega}\,(f) \circ \hat{\Omega}\,(g)\right) \tag{I.1}$$

ovvero, secondo quanto detto a proposito della mappa di Wigner:

$$\left(\hat{\Omega}^{-1}\left(\hat{\Omega}\,(f) \circ \hat{\Omega}\,(g)\right)\right)(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx \int dk\, e^{-\frac{i}{\hbar}xp} e^{\frac{i}{\hbar}kq} Tr[\hat{\Omega}\,(f)\,\hat{\Omega}\,(g)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)]$$

con:

$$\begin{aligned} Tr[\hat{\Omega}\,(f)\,\hat{\Omega}\,(g)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)] &= \int \frac{da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau}{(2\pi\hbar)^4}\, e^{-\frac{i}{\hbar}a\beta} e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau} e^{\frac{i}{\hbar}t\sigma} \\ &\cdot\; f\,(a,b)\,g\,(s,t)\,Tr[\hat{W}\,(\alpha,\beta)\,\hat{W}\,(\sigma,\tau)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)] \end{aligned}$$

Il primo passo di questo calcolo è valutare il termine:

$$Tr[\hat{W}\,(\alpha,\beta)\,\hat{W}\,(\sigma,\tau)\,\hat{W}^{\dagger}\,(x,k)]$$

Secondo la definizione che si è data di sistema di Weyl, esso è uguale a:

$$= Tr[e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{P}} e^{\frac{i}{\hbar}\beta\hat{Q}} e^{\frac{i}{\hbar}\sigma\hat{P}} e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{Q}} e^{-\frac{i}{\hbar}x\hat{P}} e^{-\frac{i}{\hbar}k\hat{Q}}] e^{-\frac{i}{2\hbar}\alpha\beta} e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\tau} e^{-\frac{i}{2\hbar}xk}$$

Le proprietà di commutazione di questi operatori permettono di scrivere questa espressione nella forma:

$$= e^{\frac{i}{\hbar}x(\beta+\tau)} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\sigma} e^{-\frac{i}{2\hbar}\alpha\beta} e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\tau} e^{-\frac{i}{2\hbar}xk} Tr[e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha+\sigma-x)\hat{P}} e^{\frac{i}{\hbar}(\beta+\tau-k)\hat{Q}}]$$

Per valutare la traccia si ricorre a $|z\rangle$, sistema di autoket di $\hat{P}$ e a $|u\rangle$, sistema di autoket di $\hat{Q}$, ottenendo:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int du \int dz e^{\frac{i}{\hbar}(\beta+\tau-k)u} e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha+\sigma-x)z} e^{\frac{i}{\hbar}x(\beta+\tau)} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\sigma} e^{-\frac{i}{2\hbar}\alpha\beta} e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\tau} e^{-\frac{i}{2\hbar}xk}$$

Noto questo risultato, si può adesso considerare l'espressione esplicita del prodotto di Moyal fra f e g:

$$\begin{aligned}
(f *_M g)(q,p) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^6}\int dx\, dk\, da\, db\, d\alpha\, d\beta\, ds\, dt\, d\sigma\, d\tau\, du\, dz \\
&\cdot\quad e^{-\frac{i}{\hbar}a\beta}e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha}e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau}e^{\frac{i}{\hbar}t\sigma}e^{-\frac{i}{\hbar}xp}e^{\frac{i}{\hbar}kq}f(a,b)\, g(s,t)\,\cdot \\
&\cdot\quad e^{\frac{i}{\hbar}(\beta+\tau-k)u}e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha+\sigma-x)z}e^{\frac{i}{\hbar}x(\beta+\tau)}e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\sigma}e^{-\frac{i}{2\hbar}\alpha\beta}e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\tau}e^{-\frac{i}{2\hbar}xk}
\end{aligned}$$

Se si effettua l'integrazione in du e dz si ottengono un termine $\delta(\beta+\tau-k)$ e uno $\delta(\alpha+\sigma-x)$ che permettono di semplificare le integrazioni in dx e dk. Riordinando i termini si ha:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int da\int db\int d\alpha\int d\beta\int ds\int dt\int d\sigma\int d\tau\,\cdot \\
&\cdot\quad e^{-\frac{i}{\hbar}a\beta}e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha}e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau}e^{\frac{i}{\hbar}t\sigma}e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha+\sigma)p}e^{\frac{i}{\hbar}(\beta+\tau)q}f(a,b)\, g(s,t)\,\cdot \\
&\cdot\quad e^{\frac{i}{\hbar}(\beta+\tau)(\alpha+\sigma)u}e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\sigma}e^{-\frac{i}{2\hbar}\alpha\beta}e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\tau}e^{-\frac{i}{2\hbar}(\beta+\tau)(\alpha+\sigma)u}
\end{aligned}$$

ancora semplificando:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int da\, db\, d\alpha\, d\beta\, ds\, dt\, d\sigma\, d\tau\, f(a,b)\, g(s,t)\,\cdot \\
&\cdot\quad e^{-\frac{i}{\hbar}a\beta}e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha}e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau}e^{\frac{i}{\hbar}t\sigma}e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha+\sigma)p}e^{\frac{i}{\hbar}(\beta+\tau)q}e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\beta}e^{\frac{i}{2\hbar}\tau\alpha}
\end{aligned}$$

Ora si effettua l'integrazione in $d\sigma$ e $d\alpha$, da cui si hanno un termine $\delta\left(b-p+\frac{\tau}{2}\right)$ e uno $\delta\left(t-p-\frac{\beta}{2}\right)$, con i quali è immediata l'integrazione in $d\beta$ e $d\tau$. Si vede, perciò, che questa espressione assume la forma:

$$= 4\int\frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{db}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dt}{\sqrt{2\pi\hbar}}f(a,b)\, g(s,t)\, e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)}e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)} \tag{I.2}$$

che è quella proposta nel testo.

Per proseguire in questa analisi, per ottenerne la forma in termini di sviluppo in serie del parametro $\hbar$, si considera una trasformazione nelle variabili di integrazione:

$$\epsilon = 2(t-p) \qquad \phi = 2(p-b)$$

Con esse si ha:

$$\begin{aligned}
(f *_M g)(q,p) &= \int\frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{d\epsilon}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\
&\cdot\quad f\left(a,p-\frac{\phi}{2}\right) g\left(s,p+\frac{\epsilon}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}a\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s}e^{\frac{i}{\hbar}q(\epsilon+\phi)}
\end{aligned}$$

e si restringe l'insieme delle funzioni a quelle per cui è lecito uno sviluppo in serie di Taylor rispetto alla seconda variabile:

$$f\left(a,p-\frac{\phi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n}{\partial k^n}f(a,k)\right|_{k=p}\left(-\frac{\phi}{2}\right)^n$$

$$g\left(s,p+\frac{\epsilon}{2}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m}{\partial u^m}g\left(s,u\right)\Big|_{u=p}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^m$$

Grazie a ciò si ha, considerando lecita l'inversione dell'operazione di integrazione con quella di serie:

$$\begin{aligned}\left(f*_M g\right)(q,p) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int\frac{da\,ds\,d\phi\,d\epsilon}{(2\pi\hbar)^2}\left(-\frac{\phi}{2}\right)^n\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^m\\ &\cdot\ \frac{\partial^n}{\partial k^n}f\left(a,k\right)\Big|_{k=p}\frac{\partial^m}{\partial u^m}g\left(s,u\right)\Big|_{u=p}e^{-\frac{i}{\hbar}a\epsilon}e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s}e^{\frac{i}{\hbar}q(\epsilon+\phi)}\end{aligned}$$

come già illustrato, (G.5), si considera che:

$$\left(-\frac{\phi}{2}\right)^n e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)^n e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s}$$

$$\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^m e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon a}=\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial a}\right)^m e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon a}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}f*_M g &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\frac{(-1)^n}{2^{n+m}}\int\frac{da\,ds\,d\phi\,d\epsilon}{(2\pi\hbar)^2}e^{\frac{i}{\hbar}q(\epsilon+\phi)}\\ &\cdot\ \frac{\partial^n}{\partial k^n}f\left(a,k\right)\Big|_{k=p}\frac{\partial^m}{\partial u^m}g\left(s,u\right)\Big|_{u=p}[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)^n e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s}][\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial a}\right)^m e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon a}]\end{aligned}$$

Se si restringe ancora l'insieme a cui appartengono f e g a quello delle funzioni infinitamente derivabili anche rispetto alla prima variabile, e per le quali le derivate di ogni ordine, rispetto ad entrambe le variabili, si annullano al tendere all'infinito del valore di esse, allora si può effettuare, in questa espressione, un'integrazione per parti ripetuta, e visto che i termini al bordo si annullano, si ha:

$$\begin{aligned}f*_M g &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\frac{(-1)^n}{2^{n+m}}\int\frac{da\,ds\,d\phi\,d\epsilon}{(2\pi\hbar)^2}e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(s-q)}e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon(a-q)}\\ &\cdot\ [\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial a}\right)^m\frac{\partial^n}{\partial k^n}f\left(a,k\right)\Big|_{k=p}][\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)^n\frac{\partial^m}{\partial u^m}g\left(s,u\right)\Big|_{u=p}]\end{aligned}$$

Solo a questo punto è possibile effettuare l'integrazione nelle variabili $d\epsilon$ e $d\phi$, ottenere un fattore $\delta\left(a-q\right)$ e un altro $\delta\left(s-q\right)$, e semplificare quindi le integrazioni pure in ds e da. In questo modo si ottiene proprio l'espressione riportata nel testo:

$$\left(f*_M g\right)(q,p)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n+m}\frac{(-1)^m}{n!m!}\left(\frac{\partial^m}{\partial a^m}\frac{\partial^n}{\partial b^n}f\left(a,b\right)\frac{\partial^n}{\partial a^n}\frac{\partial^m}{\partial b^m}g\left(a,b\right)\right)\Bigg|_{\substack{a=q\\ b=p}}\tag{I.3}$$

Questa analisi chiarisce che la forma con la quale il prodotto di Moyal viene spesso presentato si può ottenere dalla nozione di sistema di Weyl, restringendo poi opportunamente l'insieme delle funzioni sulle quali è definito. L'insieme delle funzioni sulle quali questa analisi è corretta si può sostanzialmente identificare con lo spazio delle funzioni schwartziane, $S^{\infty}(\mathbb{R})$, che ha come base, nella norma di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$, le funzioni di Hermite.

Ma, ad esempio, questa analisi non si può applicare al caso in cui almeno una delle due funzioni sia un polinomio. Questo rende particolarmente interessante lo studio specifico di questa situazione. Nella relazione:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \int \frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\epsilon}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &\cdot\quad f\left(a, p - \frac{\phi}{2}\right) g\left(s, p + \frac{\epsilon}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}a\epsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s} e^{\frac{i}{\hbar}q(\epsilon+\phi)}\end{aligned}$$

che è valida indipendentemente dalla forma delle funzioni f e g, si considera il caso in cui g sia un polinomio, mentre f soddisfi ancora le condizioni di decrescenza rapida in ogni ordine di derivata, come supposto precedentemente. Allora:

$$f\left(a, p - \frac{\phi}{2}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t!} \left.\frac{\partial^t}{\partial k^t} f(a,k)\right|_{k=p} \left(-\frac{\phi}{2}\right)^t$$

e:

$$g\left(s, p + \frac{\epsilon}{2}\right) = s^{g_1}\left(p + \frac{\epsilon}{2}\right)^{g_2} = \sum_{u=0}^{g_2} \begin{pmatrix} g_2 \\ u \end{pmatrix} p^{g_2-u} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^u s^{g_1}$$

Perciò, sostituendo nell'integrale e visto che p non è una variabile su cui si integra:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t!} \sum_{u=0}^{g_2} \begin{pmatrix} g_2 \\ u \end{pmatrix} p^{g_2-u} \int \frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\epsilon}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &\cdot\quad \left.\frac{\partial^t}{\partial k^t} f(a,k)\right|_{k=p} \left(-\frac{\phi}{2}\right)^t \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^u s^{g_1} e^{-\frac{i}{\hbar}a\epsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s} e^{\frac{i}{\hbar}q(\epsilon+\phi)}\end{aligned}$$

Come già posto:

$$\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^u e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon a} = \left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial a}\right)^u e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon a}$$

Se si sostituisce nell'integrale, e si effettua un'integrazione per parti ripetuta in da, poichè la funzione f è tale che in questa operazione i termini di bordo si annullano, si ottiene:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t!} \sum_{u=0}^{g_2} \begin{pmatrix} g_2 \\ u \end{pmatrix} p^{g_2-u} \int \frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\epsilon}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &\cdot\quad \left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^u \left.\frac{\partial^u}{\partial a^u}\frac{\partial^t}{\partial k^t} f(a,k)\right|_{k=p} \left(-\frac{\phi}{2}\right)^t s^{g_1} e^{-\frac{i}{\hbar}a\epsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}\phi s} e^{\frac{i}{\hbar}q(\epsilon+\phi)}\end{aligned}$$

Ora l'integrazione in $d\epsilon$ dà un termine $\delta(a-q)$, che permette di eliminare l'integrazione in da:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}\sum_{u=0}^{g_2}\begin{pmatrix} g_2 \\ u \end{pmatrix} p^{g_2-u}\int\frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &\cdot \left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^u \frac{\partial^u}{\partial a^u}\frac{\partial^t}{\partial k^t} f(a,k)\Big|_{\substack{k=p\\a=q}} \left(-\frac{\phi}{2}\right)^t s^{g_1} e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(s-q)}\end{aligned}$$

Esso è uguale, visto che non si integra né su da né su dk, a:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}\sum_{u=0}^{g_2}\begin{pmatrix} g_2 \\ u \end{pmatrix} p^{g_2-u}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^u \frac{\partial^u}{\partial a^u}\frac{\partial^t}{\partial k^t} f(a,k)\Big|_{\substack{k=p\\a=q}} \\ &\cdot \int\frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)^t s^{g_1} e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(s-q)}\end{aligned}$$

in cui si è ancora fatto uso dell'identità (G.5). Attraverso l'integrazione in $d\phi$ questa espressione si semplifica ulteriormente:

$$f *_M g = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{g_2}\frac{1}{t!}\begin{pmatrix} g_2 \\ u \end{pmatrix}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^u \frac{\partial^u}{\partial a^u}\frac{\partial^t}{\partial k^t} f(a,k)\Big|_{\substack{k=p\\a=q}} p^{g_2-u}\left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)^t q^{g_1}$$

Svolgendo la derivata:

$$f *_M g = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{g_2}\begin{pmatrix} g_2 \\ u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ t \end{pmatrix}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{u+t}(-1)^u \frac{\partial^u}{\partial a^u}\frac{\partial^t}{\partial k^t} f(a,k)\Big|_{\substack{k=p\\a=q}} p^{g_2-u}q^{g_1-t} \tag{I.4}$$

Questo risultato è proprio quello che si otterrebbe se si utilizzasse, senza ulteriori commenti, la formula standard pure per il caso in cui g fosse un polinomio.

Per finire, si considera il caso in cui sia f che g sono polinomi. Se si parte, al solito, con l'espressione già presente nel testo, si ha:

$$(f *_M g)(q,p) =$$

$$= 4\int\frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{db}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\frac{dt}{\sqrt{2\pi\hbar}} f(a,b)\,g(s,t)\,e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)}e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)}$$

Attraverso una trasformazione di coordinate (essa è diversa da quella precedentemente utilizzata):

$$\epsilon = 2(q-a) \qquad \phi = 2(p-b)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \int \frac{d\epsilon}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &\cdot \; f\left(q-\frac{\epsilon}{2}, p-\frac{\phi}{2}\right) g(s,t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon(t-p)} e^{-\frac{i}{\hbar}(s-q)\phi}\end{aligned}$$

con:

$$f\left(q-\frac{\epsilon}{2}, p-\frac{\phi}{2}\right) = \sum_{a=0}^{f_1}\sum_{b=0}^{f_2} \begin{pmatrix} f_1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ b \end{pmatrix} q^{f_1-a} p^{f_2-b} \left(-\frac{\epsilon}{2}\right)^a \left(-\frac{\phi}{2}\right)^b$$

$$g(s,t) = s^{g_1} t^{g_2}$$

allora l'integrale diviene:

$$\begin{aligned}f *_M g &= \sum_{a=0}^{f_1}\sum_{b=0}^{f_2} \begin{pmatrix} f_1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ b \end{pmatrix} q^{f_1-a} p^{f_2-b} \int \frac{d\epsilon\, d\phi\, ds\, dt}{(2\pi\hbar)^2} \\ &\cdot \; \left(-\frac{\epsilon}{2}\right)^a \left(-\frac{\phi}{2}\right)^b s^{g_1} t^{g_2} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon(t-p)} e^{-\frac{i}{\hbar}(s-q)\phi}\end{aligned}$$

Sempre per la (G.5) si ha:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \sum_{a=0}^{f_1}\sum_{b=0}^{f_2} \begin{pmatrix} f_1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ b \end{pmatrix} q^{f_1-a} p^{f_2-b} \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^a \left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)^b \\ &\cdot \; \int \frac{d\epsilon\, d\phi\, ds\, dt}{(2\pi\hbar)^2} s^{g_1} t^{g_2} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon(t-p)} e^{-\frac{i}{\hbar}(s-q)\phi}\end{aligned}$$

Questo integrale è facilmente risolubile, sempre ricordando della rappresentazione integrale della distribuzione δ di Dirac. In fine si ha:

$$= \sum_{a=0}^{f_1}\sum_{b=0}^{f_2} \begin{pmatrix} f_1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ b \end{pmatrix} q^{f_1-a} p^{f_2-b} \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^a \left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)^b q^{g_1} p^{g_2}$$

$$\begin{aligned}q^{f_1} p^{f_2} *_M q^{g_1} p^{g_2} &= \sum_{a=0}^{min(f_1,g_2)} \sum_{b=0}^{min(f_2,g_1)} \begin{pmatrix} g_1 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ b \end{pmatrix} \\ &\cdot \; \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{a+b} (-1)^a\, a!b!\, q^{f_1+g_1-a-b} p^{f_2+g_2-a-b} \qquad \text{(I.5)}\end{aligned}$$

E questo è, ancora una volta, lo stesso risultato che si avrebbe se si applicasse, in principio, la formula standard a funzioni che sono polinomi, senza preoccuparsi del modo in cui questa formula ha origine. Un'analisi simile porterebbe pure a capire che la formula qui detta standard, cioè quella presente nel testo, dà risultati corretti pure quando le funzioni a cui si applica sono date dal prodotto di una potenze di una delle variabili, per una funzione dell'altra: ovvero funzioni del tipo: $f = q^a k\,(p)$.

Come applicazione di ciò, e per motivare altre affermazioni riportate nel testo, si possono considerare esplicitamente i primi termini, in serie di potenze di $\hbar$, dell'espressione di questo prodotto di Moyal:

$$\begin{array}{rcl} f & *_M & g = \\ f & \cdot & g + \\ -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}\right. & - & \left.\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}\right) + \\ \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 [\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}\right. & \cdot & \left.\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial^2 g}{\partial q^2}\right)] + \\ \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^3 [\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial p^3}\frac{\partial^3 g}{\partial q^3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial p^2 \partial q}\frac{\partial^3 g}{\partial q^2 \partial p}\right) & + & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial q^2 \partial p}\frac{\partial^3 g}{\partial p^2 \partial q}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial q^3}\frac{\partial^3 g}{\partial p^3}\right)] + \\ & \cdots & \end{array}$$

L'analisi di questi termini indica che:

- i termini che corrispondono a potenze pari nel parametro di deformazione sono simmetrici in f e g, quindi in: $\{f, g\}_M = \frac{i}{\hbar}\left(f *_M g - g *_M f\right)$ compaiono solo termini di grado pari nel parametro di deformazione.

- si ha che:
$$q *_M H = qH - \frac{i\hbar}{2}\{q, H\}$$
poichè i termini di ordine superiore prevedono almeno due gradi di derivazione, quindi è pure:
$$H *_M q = qH + \frac{i\hbar}{2}\{q, H\}$$
e perciò, come riportato nel testo:
$$\{q, H\}_M = \{q, H\}$$
e, analogamente:
$$\{p, H\}_M = \{p, H\}$$
Inoltre proprio per il motivo che nella parentesi di Moyal il primo termine di effettiva deformazione prevede almeno che la funzione sia derivata 3 volte, si ha che:
$$\{f, V\}_M = \{f, V\}$$
per un polinomio V solo se V è di grado non superiore al secondo, considerato sommando il grado rispetto a ciascuna variabile.

Appendice J

Sui prodotti di Moyal ottenuti attraverso mappe di Weyl pesate

In questa appendice si proverà in primis l'equivalenza fra un prodotto di Moyal pesato e quello standard, cioè relativo a un peso unitario, poi si otterrà, come già fatto per il prodotto di Moyal non pesato, una forma esplicita per il prodotto di Moyal pesato nei due esempi specifici menzionati nel testo.

Il primo punto è provare che l'operatore integrale definito nel testo:

$$\left(T^{(w)}\cdot f\right)(\epsilon,\phi) \equiv \int \frac{dx\,dk\,dq\,dp}{(2\pi\hbar)^2}\,w\,(x,k)\,f\,(q,p)\,e^{-ix(\phi-p)/\hbar}e^{ik(\epsilon-q)/\hbar}$$

su funzioni in $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^2\right)$, soddisfa l'uguaglianza:

$$T^{(w)}\left(f *_{M(w)} g\right) = \left(T^{(w)}f\right) *_M \left(T^{(w)}g\right)$$

qualora il prodotto di Moyal pesato sia stato definito da:

$$f *_{M(w)} g \equiv [\hat{\Omega}^{(w)}]^{-1} \circ [\hat{\Omega}^{(w)}\,(f) \circ \hat{\Omega}^{(w)}\,(g)]$$

in cui la mappa di Weyl pesata è:

$$\hat{\Omega}^{(w)}\,(f) \equiv \int \frac{d\xi\,d\eta\,dq\,dp}{(2\pi\hbar)^2}\,f\,(q,p)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(q,p);(\xi,\eta)]}\hat{W}\,(\xi,\eta)$$

e l'inversa è:

$$f\,(q,p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}\omega_D[(x,k);(q,p)]}\frac{1}{w\,(x,k)}Tr[\hat{\Omega}^{(w)}\,(f)\,\hat{W}^\dagger\,(x,k)]$$

La prova consiste nel calcolo diretto, esplicito. Dalla definizione:

$$\begin{aligned}
f *_{M(w)} g &= \int \frac{dx\,dk}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}xp} e^{\frac{i}{\hbar}kq} \frac{1}{w(x,k)} Tr[\hat{\Omega}^{(w)}(f)\,\hat{\Omega}^{(w)}(g)\,\hat{W}^{\dagger}(x,k)] = \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^5} \int dx \int dk \int da \int db \int d\alpha \int d\beta \int ds \int dt \int d\sigma \int d\tau \\
&\cdot \quad e^{-\frac{i}{\hbar}a\beta} e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau} e^{\frac{i}{\hbar}t\sigma} e^{-\frac{i}{\hbar}xp} e^{\frac{i}{\hbar}kq} f(a,b)\,g(s,t) \\
&\cdot \quad \frac{w(\alpha,\beta)\,w(\sigma,\tau)}{w(x,k)} Tr[\hat{W}(\alpha,\beta)\,\hat{W}(\sigma,\tau)\,\hat{W}^{\dagger}(x,k)]
\end{aligned}$$

il termine di traccia è già stato calcolato in un'altra appendice. Sostituendo nell'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned}
(f *_{M(w)} g)(q,p) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int dx\,dk\,da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau\,du\,dz \\
&\cdot \quad e^{\frac{i}{\hbar}(\beta+\tau-k)u} e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha+\sigma-x)z} e^{\frac{i}{\hbar}x(\beta+\tau)} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\sigma} e^{-\frac{i}{2\hbar}\alpha\beta} e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\tau} e^{-\frac{i}{2\hbar}xk} \\
&\cdot \quad e^{-\frac{i}{\hbar}a\beta} e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau} e^{\frac{i}{\hbar}t\sigma} e^{-\frac{i}{\hbar}xp} e^{\frac{i}{\hbar}kq} \\
&\cdot \quad \frac{w(\alpha,\beta)\,w(\sigma,\tau)}{w(x,k)} f(a,b)\,g(s,t)
\end{aligned}$$

In questa espressione le integrazioni in du e dz determinano un fattore $\delta(k-\beta-\tau)$ e un fattore $\delta(x-\alpha-\sigma)$, che rendono immediate le integrazioni in dx e dk: riordinando i termini, così come fatto in precedenza:

$$\begin{aligned}
(f *_{M(w)} g)(q,p) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int da \int db \int d\alpha \int d\beta \int ds \int dt \int d\sigma \int d\tau \\
&\cdot \quad e^{-\frac{i}{\hbar}a\beta} e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau} e^{\frac{i}{\hbar}t\sigma} e^{-\frac{i}{\hbar}p(\alpha+\sigma)} e^{\frac{i}{\hbar}q(\beta+\tau)} e^{-\frac{i}{2\hbar}\sigma\beta} e^{\frac{i}{2\hbar}\tau\alpha} \\
&\cdot \quad \frac{w(\alpha,\beta)\,w(\sigma,\tau)}{w(\alpha+\sigma,\beta+\tau)} f(a,b)\,g(s,t)
\end{aligned}$$

Ora si considera l'immagine di questa funzione attraverso l'operatore $T^{(w)}$:

$$\begin{aligned}
\left(T^{(w)}(f *_{M(w)} g)\right)(\epsilon,\phi) &= \int \frac{dq\,dp\,da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau\,d\mu\,d\gamma}{(2\pi\hbar)^6} e^{-\frac{i}{\hbar}(a\beta-b\alpha)} \\
&\cdot \quad e^{-\frac{i}{\hbar}(s\tau-t\sigma)} e^{-\frac{i}{\hbar}p(\alpha+\sigma)} e^{\frac{i}{\hbar}q(\beta+\tau)} e^{-\frac{i}{2\hbar}(\sigma\beta-\tau\alpha)} e^{-\frac{i}{\hbar}\mu(\phi-p)} \\
&\cdot \quad e^{\frac{i}{\hbar}\gamma(\epsilon-q)} \frac{w(\alpha,\beta)\,w(\sigma,\tau)\,w(\mu,\gamma)}{w(\alpha+\sigma,\beta+\tau)} f(a,b)\,g(s,t)
\end{aligned}$$

ora, dall'integrazione in dq e dp si ottengono un termine $\delta(\mu-\alpha-\sigma)$ e un altro $\delta(\gamma-\beta-\tau)$, mediante i quali si semplificano le integrazioni in $d\mu$ e $d\gamma$, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\left(T^{(w)}(f *_{M(w)} g)\right)(\epsilon,\phi) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau \\
&\cdot \quad e^{-\frac{i}{\hbar}(a\beta-b\alpha)} e^{-\frac{i}{\hbar}(s\tau-t\sigma)} e^{-\frac{i}{2\hbar}(\sigma\beta-\tau\alpha)} e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(\alpha+\sigma)} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon(\beta+\tau)} \\
&\cdot \quad w(\alpha,\beta)\,w(\sigma,\tau)\,f(a,b)\,g(s,t) \qquad \text{(J.1)}
\end{aligned}$$

Parallelamente ora si considera che secondo la definizione del prodotto di Moyal, per quanto provato nell'altra appendice:

$$\begin{aligned}\left(\left(T^{(w)}f\right) *_M \left(T^{(w)}g\right)\right)(\epsilon,\phi) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau \\ &\cdot\ e^{-\frac{i}{\hbar}(a\beta-b\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}(s\tau-t\sigma)}e^{-\frac{i}{2\hbar}(\sigma\beta-\tau\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(\alpha+\sigma)}e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon(\beta+\tau)} \\ &\cdot\ \left(T^{(w)}f\right)(a,b)\left(T^{(w)}g\right)(s,t)\end{aligned}$$

questo integrale è uguale a, secondo la definizione dell'operatore $T^{(w)}$, a:

$$\begin{aligned}\left(\left(T^{(w)}f\right) *_M \left(T^{(w)}g\right)\right)(\epsilon,\phi) &= \int \frac{da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau\,dx\,dk\,dq\,dp\,d\tilde{q}\,d\tilde{p}\,d\tilde{x}\,d\tilde{k}}{(2\pi\hbar)^8} \\ &\cdot\ e^{-\frac{i}{\hbar}(a\beta-b\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}(s\tau-t\sigma)}e^{-\frac{i}{2\hbar}(\sigma\beta-\tau\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(\alpha+\sigma)}e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon(\beta+\tau)} \\ &\cdot\ e^{-\frac{i}{\hbar}x(b-p)}e^{-\frac{i}{\hbar}k(q-a)}e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{x}(t-\tilde{p})}e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{k}(\tilde{q}-s)} \\ &\cdot\ w(x,k)\,f(q,p)\,w\left(\tilde{x},\tilde{k}\right)g(\tilde{q},\tilde{p})\end{aligned}$$

se si integra in da, db, ds, dt, si hanno: $\delta(\beta-k)$; $\delta(\alpha-x)$; $\delta\left(\tilde{k}-\tau\right)$; $\delta(\tilde{x}-\sigma)$, per cui si ottiene, in definitiva:

$$\begin{aligned}\left(\left(T^{(w)}f\right) *_M \left(T^{(w)}g\right)\right)(\epsilon,\phi) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int d\alpha\,d\beta\,d\sigma\,d\tau\,dq\,dp\,d\tilde{q}\,d\tilde{p} \\ &\cdot\ e^{-\frac{i}{\hbar}\phi(\alpha+\sigma)}e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon(\beta+\tau)}e^{-\frac{i}{2\hbar}(\sigma\beta-\tau\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}(q\beta-p\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}(\tilde{q}\tau-\tilde{p}\sigma)} \\ &\cdot\ w(\alpha,\beta)\,f(q,p)\,w(\sigma,\tau)\,g(\tilde{q},\tilde{p}) \qquad \text{(J.2)}\end{aligned}$$

se, a questo punto, si identificano:

$$a \leftrightarrow q \quad b \leftrightarrow p$$

$$s \leftrightarrow \tilde{q} \quad t \leftrightarrow \tilde{p}$$

si vede che i due integrali (J.1) e (J.2) coincidono, e ciò prova l'equivalenza.

Nel testo si sono considerati due esempi specifici di funzioni peso:

$$w\pm(x,k) = e^{\pm\frac{i}{2\hbar}xk}$$

L'operatore che descrive l'equivalenza fra il prodotto di Moyal standard e quelli ottenuti con queste funzioni peso è tale da consentire un interessante sviluppo, come già illustrato appunto nel testo, legato a temi di studio che specificatamente fanno riferimento al problema della caratterizzazione delle algebre deformate. Dalla definizione:

$$\left(T^{(w\pm)}f\right)(\epsilon,\phi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int dq\,dp\,dx\,dk\,e^{\pm\frac{i}{2\hbar}xk}f(q,p)\,e^{-\frac{i}{\hbar}x(\phi-p)}e^{-\frac{i}{\hbar}k(\epsilon-q)}$$

se si considera:

$$e^{\pm\frac{i}{2\hbar}xk}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pm\frac{i}{2\hbar}\right)^{n}\frac{1}{n!}\left(xk\right)^{n}$$

allora l'espressione diviene:

$$=\frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)^{2}}\int dq\,dp\,dx\,dk\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pm\frac{i}{2\hbar}\right)^{n}\frac{1}{n!}\left(xk\right)^{n}f\left(q,p\right)e^{-\frac{i}{\hbar}x(\phi-p)}e^{-\frac{i}{\hbar}k(\epsilon-q)}$$

al solito, considerando lecito l'inversione dell'operazione di integrazione con quella di somma di una serie, l'espressione diviene:

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2\hbar}\right)^{n}\frac{\left(\pm1\right)^{n}}{n!}\int\frac{dq\,dp\,dx\,dk}{\left(2\pi\hbar\right)^{2}}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^{n}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^{n}f\left(q,p\right)e^{-\frac{i}{\hbar}x(\phi-p)}e^{-\frac{i}{\hbar}k(\epsilon-q)}$$

secondo le già più volte utilizzate proprietà della funzione esponenziale. Quindi, visto che ϵ e ϕ non sono variabili di integrazione, si ha:

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n}\frac{\left(\pm1\right)^{n}}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^{n}\int\frac{dq\,dp\,dx\,dk}{\left(2\pi\hbar\right)^{2}}f\left(q,p\right)e^{-\frac{i}{\hbar}x(\phi-p)}e^{-\frac{i}{\hbar}k(\epsilon-q)}$$

Ma questo integrale rappresenta, come è evidente, l'antitrasformata della trasformata di Fourier di f, per cui, in definitiva:

$$\left(T^{(w\pm)}f\right)\left(\epsilon,\phi\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pm\frac{i\hbar}{2}\right)^{n}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^{n}f\left(\epsilon,\phi\right)\qquad\text{(J.3)}$$

che è quanto posto nel testo.

- A questo punto si considera il prodotto di Moyal ottenuto attraverso una mappa di Weyl pesata da $w\left(x,k\right)=e^{-ixk/2\hbar}$. Secondo quanto provato precedentemente in questa appendice, riguardo ad una generica funzione peso:

$$\begin{aligned}\left(f*_{M(w)}g\right)\left(q,p\right) &= \frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)^{4}}\int da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau\\ &\cdot\ e^{-\frac{i}{\hbar}(a\beta-b\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}(s\tau-t\sigma)}e^{-\frac{i}{\hbar}p(\alpha+\sigma)}e^{\frac{i}{\hbar}q(\beta+\tau)}e^{-\frac{i}{2\hbar}(\sigma\beta-\alpha\tau)}\\ &\cdot\ \frac{w\left(\alpha,\beta\right)w\left(\sigma,\tau\right)}{w\left(\alpha+\sigma,\beta+\tau\right)}f\left(a,b\right)g\left(s,t\right)\end{aligned}$$

  Questa espressione diviene, in questo caso specifico:

$$\begin{aligned}\left(f*_{M(w)}g\right)\left(q,p\right) &= \int\frac{da\,db\,d\alpha\,d\beta\,ds\,dt\,d\sigma\,d\tau}{\left(2\pi\hbar\right)^{4}}f\left(a,b\right)g\left(s,t\right)\\ &\cdot\ e^{-\frac{i}{\hbar}(a\beta-b\alpha)}e^{-\frac{i}{\hbar}(s\tau-t\sigma)}e^{-\frac{i}{\hbar}p(\alpha+\sigma)}e^{\frac{i}{\hbar}q(\beta+\tau)}e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\tau}\end{aligned}$$

se si effettua l'integrazione nelle variabili $d\sigma$ e $d\beta$ si ottengono un fattore $\delta(t-p)$ e uno $\delta(a-q)$, che rendono immediate le ulteriori integrazioni in da e dt, per giungere a:

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int db \int d\alpha \int ds \int d\tau\, e^{-\frac{i}{\hbar}p\alpha} e^{\frac{i}{\hbar}b\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}s\tau} e^{\frac{i}{\hbar}\tau q} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\tau} f(q,b)\, g(s,p)$$

si integra ora in $d\alpha$: si ottiene un termine $\delta(b-p+\tau)$, per cui:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int db \int ds e^{\frac{i}{\hbar}(q-s)(p-b)} f(q,b)\, g(s,p)$$

essa è l'espressione data nel testo: per svilupparla ulteriormente, si definisce una trasformazione di variabili:

$$\epsilon = p - b$$

e perciò diviene:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\epsilon \int ds e^{\frac{i}{\hbar}(q-s)\epsilon} f(q,p-\epsilon)\, g(s,p)$$

seguendo la traccia di quanto sviluppato a riguardo del prodotto di Moyal standard nella precedente appendice, si pone:

$$f(q,p-\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(q,t)\right|_{t=p}(-\epsilon)^k$$

allora questo integrale assume la forma:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(q,t)\right|_{t=p}\int d\epsilon \int ds\, e^{\frac{i}{\hbar}(q-s)\epsilon}(-\epsilon)^k g(s,p)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(q,t)\right|_{t=p}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)^k\int d\epsilon \int ds\, e^{\frac{i}{\hbar}(q-s)\epsilon} g(s,p)$$

il dettaglio di questi passaggi è stato più volte analizzato: in definitiva si ha:

$$(f *_{M(w)} g)(q,p) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\hbar)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial p^k} f(q,p)\,\frac{\partial^k}{\partial q^k} g(q,p) \tag{J.4}$$

Al di là del dettaglio dei calcoli, ciò che è importante sottolineare è che questa espressione formale è stata ottenuta richiedendo soltanto che la funzione f sia espandibile in serie di Taylor rispetto alla sola seconda variabile : non si sono effettuate integrazioni per parti che avrebbero eventualmente richiesto delle opportune condizioni all'infinito né si sono definite delle richieste sulla funzione g. Ciò ad esempio significa che non è necessario sviluppare una prova ad hoc qualora si considerino come funzioni f e g due polinomi. Resta chiaramente sottinteso che, a voler essere ripetitivi, questi integrali vanno interpretati nel senso delle funzioni generalizzate.

- parallelamente si può considerare il caso in cui $w = e^{ixk/2\hbar}$. Considerando questo caso specifico, l'espressione generale diviene:

$$\begin{aligned}(f *_{M(w)} g)(q,p) &= \int \frac{da\, db\, d\alpha\, d\beta\, ds\, dt\, d\sigma\, d\tau}{(2\pi\hbar)^4} f(a,b)\, g(s,t) \\ &\cdot \quad e^{-\frac{i}{\hbar}(a\beta - b\alpha)} e^{-\frac{i}{\hbar}(s\tau - t\sigma)} e^{-\frac{i}{\hbar}p(\alpha+\sigma)} e^{\frac{i}{\hbar}q(\beta+\tau)} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\sigma}\end{aligned}$$

  al solito, le integrazioni in $d\alpha$; $d\tau$ e $d\sigma$ introducono fattori $\delta(p-b)$ $\delta(q-s)$ $\delta(t-p-\beta)$ per cui si giunge a:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int da \int d\beta e^{-\frac{i}{\hbar}\beta(a-q)} f(a,p)\, g(q, p+\beta)$$

  se si considera, come spiegato, che sia lecito:

$$g(q,p+\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} g(q,t) \right|_{t=p} (\beta)^k$$

  allora la forma definitiva si ottiene in modo perfettamente identico a quanto illustrato nell'altro esempio:

$$(f *_{M(w)} g)(q,p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial q^k} f(q,p) \frac{\partial^k}{\partial p^k} g(q,p) \qquad \text{(J.5)}$$

  e per esso valgono, in modo ovvio, gli stessi commenti allora espressi.

Come è stato menzionato nel testo, aver ottenuto l'espressione di questi differenti prodotti di Moyal e dell'operatore $T^{(w)}$ che descrive l'equivalenza fra essi nella forma di una serie di termini rispetto a potenze di un parametro di deformazione (qui $i\hbar/2$), permette di leggere questa stessa equivalenza come una relazione in serie di potenze nel parametro di deformazione. Infatti si ha:

$$(f *_M g)(q,p) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^s M_s(f,g)$$

per il prodotto di Moyal non pesato e:

$$\left(f *_{M(w\pm)} g\right)(q,p) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^s M_s^{(w\pm)}(f,g)$$

per i due prodotti di Moyal pesati specificati, con:

$$M_s(f,g) = \sum_{n+m=s} \frac{(-1)^m}{n!m!} \frac{\partial^m}{\partial q^m} \frac{\partial^n}{\partial p^n} f(q,p) \frac{\partial^n}{\partial q^n} \frac{\partial^m}{\partial p^m} g(q,p)$$

e:

$$M_s^{(w+)}(f,g) = \frac{(-2)^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial q^k} \frac{\partial^k g}{\partial p^k}$$

mentre:

$$M_s^{(w-)}(f,g) = \frac{2^k}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial p^k}\frac{\partial^k g}{\partial q^k}$$

Come provato, si considera:

$$T^{(w\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n T_n^{(w\pm)}$$

con

$$T_n^{(w\pm)} = \frac{(\pm 1)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)^n$$

La relazione di equivalenza è:

$$T^{(w\pm)}\left(f *_{M(w\pm)} g\right) = \left(T^{(w\pm)}f\right) *_M \left(T^{(w\pm)}g\right)$$

Essa diviene:

$$T^{(w\pm)}[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k M_k^{(w\pm)}(f,g)] = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^s M_s\left(T^{(w\pm)}f, T^{(w\pm)}g\right)$$

e, secondo le definizioni:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n T_n^{(w\pm)}[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k M_k^{(w\pm)}(f,g)] = \\ \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^s M_s[\sum_{d=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^d T_d^{(w\pm)}f, \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^r T_r^{(w\pm)}g]\end{gathered}$$

identificando i termini di ordine uguale nel parametro di deformazione:

$$\sum_{n,k=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n+k} T_n^{(w\pm)}[M_k^{(w\pm)}(f,g)] = \sum_{s,d,r=0}^{\infty}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{s+d+r} M_s[T_d^{(w\pm)}f, T_r^{(w\pm)}g] \tag{J.6}$$

Questa è proprio l'uguaglianza (3.146) considerata nel testo.

Appendice K

Ancora su una nuova rappresentazione dei prodotti di Moyal

In questa appendice si illustrerà una nuova espressione a rappresentare la forma del prodotto di Moyal: come si vedrà, essa chiarisce ulteriormente il ruolo della funzione peso, lì dove introdotta. In questa forma, l'espressione per il prodotto di Moyal riflette esplicitamente l'ordinamento che la funzione peso attribuisce alla procedura con cui, attraverso la mappa di Weyl, si associa un operatore ad una funzione.

L'analisi di questi temi inizia dallo studiare, ancora una volta, l'espressione del prodotto di Moyal nella formulazione integrale. Per quello non pesato si ha:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \frac{4}{(2\pi\hbar)^2}\int da\,db\,ds\,dt\,f(a,b)\,g(s,t)\\ &\cdot\quad e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)}e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)}\end{aligned}$$

In questa situazione ci si limiterà a considerare come funzione f un polinomio:

$$f(a,b) = a^m b^n$$

Le proprietà della funzione esponenziale permettono di provare che, sulla traccia di quanto già provato:

$$a^m e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)} = \left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^m e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)}$$

$$b^n e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)} = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)}$$

Quindi l'espressione precedente diviene:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \frac{4}{(2\pi\hbar)^2}\int da\,db\,ds\,dt\ \ a^m b^n\, g(s,t)\\ &\cdot\ \ [\left(q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^m e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)}][\left(p-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)}]\end{aligned}$$

Se si sceglie la funzione g nell'insieme, più volte menzionato, $S^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, allora si effettua una ripetuta integrazione per parti nelle variabili s e t e si ottiene, visto che i termini di bordo si annullano:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q,p) &= \frac{4}{(2\pi\hbar)^2}\int da\,db\,ds\,dt\, e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)}e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)}\\ &\cdot\ \ [\left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\left(p+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n g(s,t)]\end{aligned}$$

Al solito, in questa espressione l'integrazione nelle variabili da e db conduce a due fattori δ, con i quali diviene immediata pure l'integrazione nelle variabili ds e dt. Il risultato è:

$$(q^m p^n) *_M g(q,p) = [\left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\left(p+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial s}\right)^n]g(s,t)\Big|_{\substack{s=q\\ t=p}} \tag{K.1}$$

Quanto visto allora si può estendere al caso in cui la funzione f sia analitica. Si pone:

$$(f *_M g)(q,p) = f\left(\left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right),\left(p+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial s}\right)\right)\cdot g(s,t)\Big|_{\substack{s=q\\ t=p}} \tag{K.2}$$

Questa espressione formale va interpretata nel significato di considerare tutti i termini di sviluppo di f, e sostituire alle potenze in q e p gli operatori associati:

$$\begin{aligned}q &\rightarrow \left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\\ p &\rightarrow \left(p+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial s}\right)\end{aligned}$$

Il risultato corretto si ottiene poi valutando l'azione di questi operatori sulle funzioni g per $s=q$ e $t=p$. Come si vede, in questa forma il prodotto di Moyal dipende dall'azione di un operatore, definito dalla funzione f, su g. Ad esempio, se $f=q^2p$ si ha:

$$\begin{aligned}q^2p *_M g(q,p) &= \left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\left(p+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial s}\right)g(s,t)\\ &= \left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2[pg+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial g}{\partial s}] =\end{aligned}$$

$$= \left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)[qpg + \frac{i\hbar}{2}\left(q\frac{\partial g}{\partial s} - p\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}] =$$

$$= q^2pg - \frac{i\hbar}{2}[qp\frac{\partial g}{\partial t} - q^2\frac{\partial g}{\partial s} - qp\frac{\partial g}{\partial t}] + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 [p\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - 2q\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}] + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 g}{\partial s \partial t^2}$$

Valutando la funzione g e le sue derivate per $s = q$ e $t = p$ si ha proprio il risultato già noto:

$$= q^2pg - \frac{i\hbar}{2}[qp\frac{\partial g}{\partial p} - q^2\frac{\partial g}{\partial q} - qp\frac{\partial g}{\partial p}] + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 [p\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} - 2q\frac{\partial^2 g}{\partial q \partial p}] + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 g}{\partial q \partial p^2}$$

Per proseguire in questa analisi, ed ottenere una ulteriore caratterizzazione per il prodotto di Moyal, si considera se sia possibile ottenere una forma per l'espressione:

$$qf *_M g$$

ovvero per il prodotto di Moyal fra la funzione qf e la funzione g, con $g \in S^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$. Evidentemente, bisogna considerare:

$$\begin{aligned} qf *_M g &= \frac{4}{(2\pi\hbar)^2}\int da\, db\, ds\, dt\; af\,(a,b)\, g\,(s,t) \\ &\cdot\; e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)} \end{aligned}$$

Essa è uguale, utilizzando le identità più volte menzionate:

$$\begin{aligned} &= 4\int \frac{da}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{db}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, af\,(a,b)\, g\,(s,t) \\ &\cdot\; e^{-\frac{2i}{\hbar}(s-q)(p-b)}[\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{-\frac{2i}{\hbar}(a-q)(t-p)}] \end{aligned}$$

I dettagli della risoluzione di questo integrale sono analoghi a quelli di altri già mostrati. Il risultato è che si ha:

$$qf *_M g = q[f *_M g] + f *_M \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial g}{\partial p}\right) \tag{K.3}$$

Allo stesso modo si vede che:

$$pf *_M g = p[f *_M g] + f *_M \left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial g}{\partial q}\right) \tag{K.4}$$

Qualora, invece si considera $f \in S^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ si ha:

$$f *_M qg = q[f *_M g] + \left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial f}{\partial p}\right) *_M g \tag{K.5}$$

$$f *_M pg = p[f *_M g] - \left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial f}{\partial q}\right) *_M g \tag{K.6}$$

Ancora, con le stesse tecniche si ha che:

$$-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}[f *_M g] = [qf *_M g] - [f *_M qg] \tag{K.7}$$

$$-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}[f *_M g] = [f *_M pg] - [pf *_M g] \tag{K.8}$$

Combinando queste relazioni si può dimostrare che:

$$qf *_M g = \frac{1}{2}\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)[f *_M g] + \frac{1}{2} f *_M \left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) g \tag{K.9}$$

e che:

$$pf *_M g = \frac{1}{2}\left(p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)[f *_M g] + \frac{1}{2} f *_M \left(p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right) g \tag{K.10}$$

Queste due relazioni, è bene sottolinearlo ancora, valgono qualunque sia f se g è schwartziana. Esse sono molto interessanti. Se si specializzano per $f = 1$ si ha:

$$q *_M g = \left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) g$$

e che, naturalmente:

$$q^m *_M g = \left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^m g \tag{K.11}$$

Questa scrittura non ha alcuna ambiguità, poichè l'operatore di moltiplicazione per q commuta con l'operatore di derivazione $\frac{\partial}{\partial p}$. Parallelamente, si ha:

$$p *_M g = \left(p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right) g$$

e:

$$p^n *_M g = \left(p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)^n g \tag{K.12}$$

e pure questa scrittura non presenta ambiguità. La questione ora diviene: a cosa conduce questa espressione per $qp *_M g$? E, in generale, per $f *_M g$ quando f è un polinomio?

Il primo esempio si può stimare in modo esplicito. In virtù di quanto provato si ha:

$$qp *_M g = \frac{1}{2}\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)[p *_M g] + p *_M \frac{1}{2}\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) g$$

$$= \frac{1}{2}\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right) g + \frac{1}{2}\left(p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)\left(q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) g$$

Per induzione è possibile provare che:

$$q^m p^n *_M g = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) \left(q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^k \left(p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right)^n \left(q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m-k} g \tag{K.13}$$

Questo indica che il prodotto di Moyal fra un monomio e una funzione g si può leggere come l'immagine della funzione g attraverso un operatore, la cui forma dipende dal monomio. Questa espressione diviene ancora più interessante qualora si identifichi:

$$q \;\rightarrow\; \left(q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) \equiv \hat{\mathcal{Q}}$$

$$p \;\rightarrow\; \left(p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) \equiv \hat{\mathcal{P}}$$

poichè ora si può scrivere:

$$q^m p^n *_M g = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) \hat{\mathcal{Q}}^k \hat{\mathcal{P}}^n \hat{\mathcal{Q}}^{m-k} g \tag{K.14}$$

Questo operatore ha, rispetto a $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\mathcal{Q}}$, la stessa forma che, rispetto a $\hat{p}$ e $\hat{q}$, ha l'immagine di f attraverso la mappa di Weyl. Questo indica che ora, se invece di considerare un semplice monomio, si considera una f analitica, ha ancora un significato l'espressione:

$$f *_M g = f \left(\left(q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right), \left(p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) \right) g$$

a patto però che ad ogni termine dello sviluppo in serie di f corrisponda l'operatore che si ottiene con la prescrizione illustrata. Questa è, evidentemente, una prescrizione per l'ordinamento con cui ad ogni singolo termine in q o p si associa l'operatore $\hat{\mathcal{Q}}$ o $\hat{\mathcal{P}}$, poichè ora, a differenza di quanto visto precedentemente, gli operatori $\hat{\mathcal{Q}}$ e $\hat{\mathcal{P}}$ non commutano.

Per evidenziare che il prodotto di Moyal fra f e g si può ottenere come l'azione di un operatore che dipende da f su g, e che questo operatore rispecchia una nozione di ordinamento, analoga a quella propria della mappa di Weyl, è utile considerare in dettaglio cosa accade nel caso dei prodotti di Moyal pesati secondo le funzioni peso $w_\pm$.

- Attraverso lo studio della forma integrale del prodotto di Moyal pesato da $w_- = e^{-i\xi\eta/2\hbar}$ si vede, in modo perfettamente simile a quello già illustrato, che, se g è una funzione schwartziana nella sola variabile q, allora:

$$qf *_{M(w)} g = q[f *_{M(w)} g] \tag{K.15}$$

$$pf *_{M(w)} g = p[f *_{M(w)} g] + f *_{M(w)} i\hbar \frac{\partial g}{\partial q} \tag{K.16}$$

e che:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial q}[f *_{M(w)} g] = f *_{M(w)} \left(i\hbar\frac{\partial g}{\partial q}\right) \tag{K.17}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial p}[f *_{M(w)} g] = \left(i\hbar\frac{\partial f}{\partial p}\right) *_{M(w)} g \tag{K.18}$$

Queste relazioni permettono di provare che:

$$qf *_{M(w)} g = q[f *_{M(w)} g] \tag{K.19}$$

$$pf *_{M(w)} g = f *_{M(w)} \left(p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) g \tag{K.20}$$

Ciò indica che:

$$q *_{M(w)} g = qg$$

e quindi che:

$$q^m *_{M(w)} g = q^m g \tag{K.21}$$

Mentre:

$$p *_{M(w)} g = \left(p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) g$$

e:

$$p^n *_{M(w)} g = \left(p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)^n g \tag{K.22}$$

Per valutare il prodotto di Moyal pesato fra un generico monomio e una funzione g basta utilizzare queste definizioni:

$$\begin{aligned} q^m p^n *_{M(w)} g &= q^m[p^n *_{M(w)} g] \\ &= q^m \left(p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)^n g \end{aligned}$$

Proprio come nel caso precedente, si può ipotizzare l'identificazione:

$$q \;\rightarrow\; \hat{\mathcal{Q}}_{w-} = q$$

(è la moltiplicazione per la variabile q) e:

$$p \;\rightarrow\; \hat{\mathcal{P}}_{w-} = \left(p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Grazie ad esse si ha:

$$q^m p^n *_{M(w-)} g = \hat{\mathcal{Q}}^m_{w-} \hat{\mathcal{P}}^n_{w-} g \tag{K.23}$$

Questa espressione indica che anche il prodotto di Moyal pesato fra un monomio e una funzione g con opportune condizioni all'infinito si può scrivere come l'azione di un operatore definito dal monomio su g. In particolare, ancora una volta, questo operatore ha la stessa forma, rispetto a $\hat{\mathcal{P}}_{w-}$ e $\hat{\mathcal{Q}}_{w-}$, che ha l'immagine, attraverso la mappa di Weyl pesata, del monomio rispetto a $\hat{p}$ e $\hat{q}$. Ciò che rende peculiare questa identificazione, caso per caso, è la forma degli operatori $\hat{\mathcal{Q}}$ e $\hat{\mathcal{P}}$. Anche in questo caso, se f è analitica, si attribuisce un significato all'espressione:

$$f *_{M(w-)} g = f\left(q, \left(p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\right) \tag{K.24}$$

attraverso l'associazione, ad ognuno dei termini di sviluppo in serie, di un operatore definito secondo quanto illustrato.

- In modo perfettamente identico si può studiare il caso del prodotto di Moyal pesato da $w_+ = e^{i\xi\eta/2\hbar}$. Senza sviluppare tutti i calcoli, si può dimostrare che, ora, l'identificazione fra variabili e operatori è:

$$q \;\rightarrow\; \left(q - i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right) \equiv\; \hat{\mathcal{Q}}_{w+}$$

$$p \;\rightarrow\; p \equiv \hat{\mathcal{P}}_{w+}$$

(è la moltiplicazione per la variabile p). Si ha:

$$p^n q^m *_{M(w+)} g = p^n \left(q - i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^m g \tag{K.25}$$

ovvero:

$$p^n q^m *_{M(w+)} g = \hat{\mathcal{P}}^n_{w+}\hat{\mathcal{Q}}^m_{w+} g \tag{K.26}$$

e, proprio come negli altri esempi, il parallelismo fra la forma dell' operatore desunto dal monomio e l'operatore immagine, attraverso la mappa di Weyl pesata, del monomio, è chiaro. E, per concludere, se f è analitica questa procedura attribuisce un significato ad ogni termine del suo sviluppo in serie, e questo viene utilizzato per attribuire un significato all'espressione:

$$f *_{M(w+)} g = f\left(\left(q - i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right), p\right) g \tag{K.27}$$

Appendice L

Sul prodotto di Moyal in $\mathbb{R}^4$

In questa appendice di calcolerà il valore del prodotto di Moyal fra funzioni che non rientrano nell'insieme di quelle per cui esso si può esprimere come serie, in termini di potenze di $\hbar$, di operatori bidifferenziali. Si considererà la forma integrale di questo, e si specializzerà ai due casi di interesse per l'analisi svolta nel testo.

- il primo esempio è quello in cui si considera il prodotto di Moyal in $\mathbb{R}^4$ fra una f e una g, funzioni delle sole variabili (q_1, q_2). Dalla forma integrale di questo:

$$
\begin{aligned}
(f *_M g)(q_1, q_2, p_1, p_2) \; = & \int da_1 \; da_2 \, db_1 \, db_2 \, ds_1 \, ds_2 \, dt_1 \, dt_2 \\
\cdot & \; \frac{16}{(2\pi\hbar)^4} f(a_1, a_2, b_1, b_2) \, g(s_1, s_2, t_1, t_2) \\
\cdot & \; e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_1 - q_1)(t_1 - p_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_2 - q_2)(t_2 - p_2)} \\
\cdot & \; e^{-\frac{2i}{\hbar}(s_1 - q_1)(p_1 - b_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(s_2 - q_2)(p_2 - b_2)}
\end{aligned}
\qquad \text{(L.1)}
$$

si vede che, in questo caso specifico, diviene:

$$
\begin{aligned}
(f *_M g)(q_1, q_2, p_1, p_2) \; = & \int da_1 \; da_2 \, db_1 \, db_2 \, ds_1 \, ds_2 \, dt_1 \, dt_2 \\
\cdot & \; \frac{16}{(2\pi\hbar)^4} f(a_1, a_2) \, g(s_1, s_2) \\
\cdot & \; e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_1 - q_1)(t_1 - p_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_2 - q_2)(t_2 - p_2)} \\
\cdot & \; e^{-\frac{2i}{\hbar}(s_1 - q_1)(p_1 - b_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(s_2 - q_2)(p_2 - b_2)}
\end{aligned}
\qquad \text{(L.2)}
$$

In questa espressione l'integrazione nelle variabili db_1, db_2, dt_1 e dt_2 è immediata: si ha un termine:

$$
\frac{(2\pi\hbar)^4}{16} \delta(a_1 - q_1) \, \delta(a_2 - q_2) \, \delta(s_1 - q_1) \, \delta(s_2 - q_2)
$$

e quindi il prodotto di Moyal si riduce a quello usuale:

$$(f *_M g)(q_1, q_2, p_1, p_2) = f(q_1, q_2)\, g(q_1, q_2)$$

Un discorso simile si può condurre quando una funzione dipende solo da variabili che commutano[1] con quelle da cui dipende l'altra funzione: inoltre, se si tengono a mente i termini della serie in cui si esprime solitamente il prodotto di Moyal, si vede che essa si può considerare formalmente valida anche in questo caso. Se si applica a queste situazioni specifiche essa dà il risultato corretto.

- il secondo caso è quello in cui f è un polinomio nelle variabili q_1 e q_2, e g è una funzione arbitraria delle variabili p_1 e p_2, senza particolari condizioni di decrescenza all'infinito, così come le funzioni esponenziali considerate nel testo. Dalla definizione si vede che:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \int da_1\, da_2\, db_1\, db_2\, ds_1\, ds_2\, dt_1\, dt_2 \\ &\cdot \frac{16}{(2\pi\hbar)^4}\, a_1^k a_2^n\, g(t_1, t_2) \\ &\cdot e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_1-q_1)(t_1-p_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_2-q_2)(t_2-p_2)} \\ &\cdot e^{-\frac{2i}{\hbar}(s_1-q_1)(p_1-b_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(s_2-q_2)(p_2-b_2)} \end{aligned} \tag{L.3}$$

se si integra in db_1 e db_2 si ottengono termini del tipo $\delta(s_1 - q_1)$ e $\delta(s_2 - q_2)$ che rendono immediata l'integrazione pure sulle variabili ds_1 e ds_2, per cui si ha:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{4}{(2\pi\hbar)^2} \int da_1\, da_2\, dt_1\, dt_2\, a_1^k a_2^n\, g(t_1, t_2) \\ &\cdot e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_1-q_1)(t_1-p_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_2-q_2)(t_2-p_2)}\end{aligned}$$

Una generalizzazione di quanto provato in una precedente appendice indica che:

$$a_1^k e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_1-q_1)(t_1-p_1)} = \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_1} + q_1\right)^k e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_1-q_1)(t_1-p_1)}$$

e una relazione simile vale, ovviamente, per la seconda variabile. Perciò l'espressione diviene, visto che non c'è integrazione sulle variabili q_i e p_i:

$$\begin{aligned}(f *_M g)(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_1} + q_1\right)^k \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_2} + q_2\right)^n \\ &\cdot \frac{4}{(2\pi\hbar)^2} \int da_1 \int da_2 \int dt_1 \int dt_2 \\ &\cdot g(t_1, t_2)\, e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_1-q_1)(t_1-p_1)} e^{-\frac{2i}{\hbar}(a_2-q_2)(t_2-p_2)}\end{aligned}$$

[1] Qui, per variabili che commutano, si intendono sempre quelle che hanno parentesi di Poisson nulla

In modo ormai noto, questo integrale è valutabile in modo elementare. Il risultato finale è:

$$q_1^k q_2^n *_M g(p_1, p_2) = \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_1} + q_1\right)^k \left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_2} + q_2\right)^n g(p_1, p_2) \tag{L.4}$$

Se in questa espressione si esplicitano gli operatori si vede che questo risultato è, ancora una volta, uguale a quello che si otterrebbe se si definisse il prodotto di Moyal in termini della serie di operatori bidifferenziali più volte citata. Inoltre, seguendo questa linea, si può vedere che pure se si sceglie f polinomio nelle variabili p_a e g funzione delle variabili q_a si ha un risultato riprodotto dalla serie generale, come pure se si scambia il ruolo delle funzioni f e g.

Proprio questi risultati permettono di ottenere, per le funzioni che realizzano un analogo classico della mappa di Jordan-Schwinger, l'espressione per il prodotto di Moyal riportata nel testo, il che prova che quelle stesse funzioni definiscono una mappa di Jordan-Schwinger anche rispetto alla parentesi di Moyal.

Appendice M

Sulla prova che $+_D$ e $\cdot_D$ definiscono una struttura di spazio vettoriale

In questa appendice si prova che le operazioni di somma :

$$z +_D w = D^{-1}\left(D\left(z\right) + D\left(w\right)\right)$$

(in cui z e w sono elementi di uno spazio vettoriale reale rispetto all'operazione $+$ e D è un diffeomorfismo globale su esso) e di prodotto per uno scalare reale :

$$\alpha \cdot_D z = D^{-1}\left(\alpha \cdot D\left(z\right)\right)$$

soddisfano tutte le richieste con le quali si definisce una struttura di spazio vettoriale rispetto al campo reale.

- questa somma è chiaramente commutativa.
- $(z +_D w) +_D u = D^{-1}\left(D\left(z +_D w\right) + D\left(u\right)\right) = D^{-1}\left(D\left(z\right) + D\left(w\right) + D\left(u\right)\right)$ mentre:

  $$z +_D (w +_D u) = D^{-1}\left(D\left(z\right) + D\left(w +_D u\right)\right) = D^{-1}\left(D\left(z\right) + D\left(w\right) + D\left(u\right)\right)$$

  quindi l'addizione è associativa.
- la relazione $z +_D w = z$ diviene

  $$D^{-1}\left(D\left(z\right) + D\left(w\right)\right) = z \quad \rightarrow$$

  $$D\left(z\right) = D\left(z\right) + D\left(w\right) \quad \rightarrow \quad D\left(w\right) = 0$$

  Quindi l'elemento nullo è: $0_D = D^{-1}\left(0\right)$

- la relazione $z +_D w = 0_D$ dà:

$$D^{-1}\left(D\left(z\right)+D\left(w\right)\right)=D^{-1}\left(0\right) \quad \rightarrow \quad D\left(z\right)+D\left(w\right)=0$$

  e quindi: $-_D z = D^{-1}\left(-D\left(w\right)\right)$ definisce l'elemento opposto.

- rispetto al campo scelto come scalare:$\lambda \cdot_D \left(z +_D w\right)$ e questa espressione è uguale a:

$$D^{-1}\left(\lambda D\left(z +_D w\right)\right)=D^{-1}\left(\lambda\left(D\left(z\right)+D\left(w\right)\right)\right)$$

  Parallelamente $\left(\lambda \cdot_D z\right) +_D \left(\lambda \cdot_D w\right)$ si sviluppa in:

$$\Big(D^{-1}\left(\lambda D\left(z\right)\right)\Big) +_D \Big(D^{-1}\left(\lambda D\left(w\right)\right)\Big)=D^{-1}\left(\lambda D\left(z\right)+\lambda D\left(w\right)\right)$$

  e ciò prova che vale una prima proprietà distributiva

- In modo analogo l'espressione:$\left(\lambda \cdot_D z\right) +_D \left(\mu \cdot_D z\right)$ diviene:

$$D^{-1}\left(D\left(\lambda \cdot_D z\right)+D\left(\mu \cdot_D z\right)\right)=D^{-1}\left(\lambda D\left(z\right)+\mu D\left(z\right)\right)$$

  mentre:

$$\left(\lambda+\mu\right) +_D z = D^{-1}\left(\left(\lambda+\mu\right)D\left(z\right)\right)$$

  e quindi vale anche una seconda proprietà distributiva.

- ancora:$\left(\lambda\mu\right)\cdot_D z = D^{-1}\left(\lambda\mu D\left(z\right)\right)$ ed è uguale a:

$$\lambda \cdot_D \left(\mu \cdot_D z\right)=\lambda \cdot_D D^{-1}\left(\mu D\left(z\right)\right)=D^{-1}\left(\lambda\mu D\left(z\right)\right)$$

  perciò $\left(\lambda\mu\right)\cdot_D z = \lambda \cdot_D \left(\mu \cdot_D z\right)$

- inoltre, se 1 è l'unità del campo scalare, allora

$$1 \cdot_D z = z$$

Bibliografia

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1985)

[2] G. S. Agarwal, E. Wolf, *Phys. Rev. D*, **2** (1970) 2161, 2187, 2206

[3] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowitz, D. Sternheimer, *Ann. Physics* **110** (1978) 111

[4] M. Bordemann, J. Hoppe, P. Schaller, M. Schlichenmeier, *Comm. Math. Phys.*, **138** (1991) 207

[5] J. F. Carinena, L. A. Ibort, G. Marmo, A. Stern, *Physics Reports*, **263**, (1995), 3

[6] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1958

[7] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, 1989

[8] P. Jordan, *Zeit. Phys.*, **94** (1935) 531

[9] A. Kriegl and P. Michor, *The Convenient Setting of Global Analysis*, AMS, 1997.

[10] F. Lizzi, R. J. Szabo, A. Zampini *Geometry of the Gauge Algebra in Noncommutative Yang-Mills Theory*, in preparazione

[11] G. W. Mackey, *The Theory of Unitary Group Representations*, University of Chicago Press, 1976

[12] V.I. Man'ko, G. Marmo, P. Vitale and F. Zaccaria, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 5541, hep-th/9310053.

[13] G. Marmo, E. Saletan, A. Simoni, B. Vitale, *Dynamical Systems*, J. Wiley, 1985

[14] J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** (1940) 99

[15] N. Mukunda, E. C. G. Sudarshan, *Classical Dynamics: a Modern Perspective*, J. Wiley, 1974

[16] E. Onofri, C. Destri, *Istituzioni di fisica teorica*, N. I. S. , 1996

[17] J. C. T. Pool, *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 66

[18] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis*, Academic Press, 1972.

[19] J. J. Sakurai, *Meccanica Quantistica Moderna*, Zanichelli, 1996

[20] J. Schwinger, *Quantum Theory of Angular Momentum*, L. C. Biedenharn e H. Van Dam eds, 1965 Academic Press

[21] J. von Neumann, *Collected works*, vol. II, 221-229, Pergamon Press, 1961

[22] H. Weyl, *The theory of groups and Quantum Mechanics*, Dover, 1931

[23] H. Whitney, *Ann. Math.* **37** (1936) 645

[24] E. P. Wigner, . *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.

[25] E. P. Wigner, *Group Theory and its applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959