



Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali



Tesi Magistrale in Fisica

*“Modello Standard e Gravitazione  
in geometria non commutativa”*

Relatore:  
**Fedele Lizzi**

Candidato:  
**Agostino Devastato**  
Matricola N94/000/057

Anno Accademico 2010/2011

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Modello Standard</b>	<b>9</b>
1.1 Teorie di gauge . . . . .	10
1.1.1 Campo di Forza e Azione di Yang-Mills . . . . .	13
1.2 Rottura spontanea di simmetria . . . . .	15
1.2.1 Meccanismo di Goldstone . . . . .	16
1.2.2 Meccanismo di Higgs . . . . .	18
1.3 Modello elettrodebole . . . . .	19
1.4 Interazione Forte . . . . .	23
1.5 Spazio di Hilbert del Modello Standard . . . . .	25
1.6 Masse dei neutrini e meccanismo dell'altalena . . . . .	27
1.6.1 Spinori di Weyl, Dirac e Majorana . . . . .	27
1.6.2 Meccanismo dell'altalena . . . . .	30
1.6.3 Analisi con autovalori . . . . .	32
1.6.4 Invarianza di Gauge e Rinormalizzazione . . . . .	34
1.7 Gravitazione . . . . .	35
1.7.1 <i>Vierbein e Spinori in Relatività Generale</i> . . . . .	39
<b>2 NCG: strumenti matematici</b>	<b>42</b>
2.1 Motivazioni: meccanica quantistica . . . . .	43
2.2 Algebre . . . . .	44
2.3 Spazi commutativi: teorema di Gel'fand-Naimark . . . . .	46
2.4 Fibrati e Moduli . . . . .	49
2.4.1 Fibrati vettoriali . . . . .	50
2.4.2 Moduli . . . . .	51
2.4.3 Moduli di Hilbert . . . . .	54

<b>3</b>	<b>NCG: geometria spettrale di Connes</b>	<b>58</b>
3.1	Operatori compatti e Infinitesimi . . . . .	58
3.2	Traccia di Diximer . . . . .	60
3.3	Triple spettrali . . . . .	61
3.3.1	Integrazione e Metrica . . . . .	62
3.3.2	Tripla Canonica su una varietà . . . . .	64
3.4	Varietà non commutative . . . . .	67
3.4.1	Strutture Reali . . . . .	67
3.4.2	Assiomi di Connes . . . . .	68
3.5	Forme differenziali . . . . .	69
3.5.1	Forme differenziali universali . . . . .	69
3.5.2	Forme differenziali di Connes . . . . .	72
3.5.3	Algebra esterna di de Rham . . . . .	75
3.6	Teorie di gauge su Triple spettrali . . . . .	76
3.6.1	Teoria di Gauge su uno spazio a due punti . . . . .	78
<b>4</b>	<b>NCG: il Modello Standard e oltre</b>	<b>81</b>
4.1	Varietà a due superfici e Meccanismo di Higgs . . . . .	81
4.2	Tripla spettrale del Modello Standard . . . . .	87
4.2.1	Modello elettrodebole e Meccanismo Seesaw . . . . .	96
4.2.2	Invarianza di Gauge e Rinormalizzazione . . . . .	99
4.3	L'azione bosonica spettrale . . . . .	104
	<b>Conclusioni</b>	<b>108</b>
<b>A</b>	<b>Elementi di teoria dei gruppi</b>	<b>110</b>
A.1	Gruppi $SU(N)$ . . . . .	114
<b>B</b>	<b>Algebre</b>	<b>116</b>
B.1	Costruzione GNS . . . . .	118
<b>C</b>	<b>Campi di Dirac Euclidei</b>	<b>121</b>
	<b>Referenze</b>	<b>124</b>

# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è la descrizione del Modello Standard e di come esso emerge in un quadro matematico moderno che fa riferimento agli strumenti della geometria non commutativa, una geometria che generalizza in linguaggio algebrico gli usuali concetti fondamentali di punto, distanza, integrazione. Tale trascrizione ha permesso a Connes, Lott, Chamseddine e altri collaboratori di mostrare come il Modello Standard sia una generalizzazione dell'elettrodinamica al caso di una semplice "geometria non commutativa". Gli elementi chiave di questa nuova struttura matematica sono tre oggetti algebrici -un'algebra, uno spazio di Hilbert e un operatore di Dirac- che già compaiono in modo naturale nella descrizione quantistica del più semplice modello fisico, l'oscillatore armonico. In tale modello infatti l'insieme delle osservabili fisiche -posizione, momento, energia- costituisce un'algebra associativa; gli spinori che descrivono l'oscillatore appartengono ad uno spazio di Hilbert e la dinamica è determinata da un operatore detto operatore di Dirac. Come chiariremo meglio nel corso della tesi, le radici della geometria non commutativa sono quindi intrinseche alla meccanica quantistica.

Obiettivo finale di questo lavoro consiste nella costruzione di un Modello Standard allargato: in particolare si cercherà di disegnare un quadro originale sulla possibilità di estensione del Modello Standard inglobando neutrini massivi, sia essi di Dirac che di Majorana bypassando i problemi relativi alle invarianze di gauge e alla rinormalizzabilità della teoria.

Questi nuovi modelli rivestono quindi un notevole interesse: la matematica non solo serve come guida, ma anche come possibilità predittiva, benchè al momento si tratta ancora di modelli non completamente aderenti alla realtà, ma non per questo non degni di essere approfonditi.

## Introduzione storica

Nel mondo della fisica classica, materia e forze sono sempre state considerate due entità distinte. La natura della materia è un qualcosa di abbastanza intuitivo per l'uomo, poten-

dosi questi basare sull'esperienza macroscopica quotidiana; la natura della forza invece ha sempre suscitato grandi difficoltà, non tanto per le forze di contatto ma sicuramente per le forze che agiscono a distanza, come ad esempio la gravità:

“Che la gravità dovrebbe essere innata, inerente ed essenziale alla materia, così che un corpo può agire su un altro corpo, attraverso il vuoto, senza la mediazione di un qualcosa, è per me un qualcosa di enormemente assurdo, che credo nessun uomo anche competente in campo filosofico potrebbe mai accettare” (lettera da Newton a Bentley)

Newton non riuscì a trovare alcun meccanismo soddisfacente, alcun modello fisico che spiegasse la trasmissione della forza gravitazionale tra due corpi a distanza.

Nel XIX secolo venne sviluppata una precisa formulazione della più complicata forza elettromagnetica. Anche qui l'avversione per le teorie di azione a distanza portò alla formulazione di numerosi meccanismi e modelli fluido-dinamici per spiegare il modo con cui la forza elettromagnetica (e la luce) si propagassero. Maxwell si adoperò brillantemente su tali modelli per cercare di conferire un aspetto fisico e matematico alle idee empiriche sulle linee di forza di Faraday. Le equazioni di Maxwell furono infatti enormemente usate per descrivere il moto meccanico dell'etere, un immaginario mezzo che permeando l'Universo consentisse la propagazione della luce. In un lavoro del 1864 Maxwell, abbandonando l'approccio meccanico, introdusse le *equazioni di campo*. Successivamente tali equazioni verranno derivate da un formalismo lagrangiano, una sorta di “meccanica generalizzata” che si rivelerà essere molto più soddisfacente rispetto ai tanti modelli che esistevano all'epoca; dopotutto, le stesse equazioni matematiche descrivono, se adeguatamente interpretate, sistemi di masse, di molle, di membrane oppure di resistenze, conduttori, induttori etc. Con questo passaggio il concetto di “moto” venne allargato per includere nuove e fondamentali entità, i campi.

Il dilemma dell'azione a distanza della forza elettromagnetica venne così risolto con l'introduzione di un campo che permea l'intero spazio circostante, fornendo una risposta locale ed agendo su altri corpi lontani con una propagazione che avviene alla velocità della luce. La teoria di Maxwell, oltre che unificare elettricità e magnetismo, predice così anche l'esistenza delle onde elettromagnetiche che viaggiano alla velocità della luce come poi viene confermato da Hertz nel 1888.

Poco dopo l'affermazione di questi modelli classici i fisici iniziarono ad affacciarsi ad un altro mondo, quello quantistico. La risoluzione del problema del corpo nero, data da Planck nei primi del '900, costituì una delle pietre miliari della nuova teoria dei quanti che avrebbe rivoluzionato la fisica. L'effetto fotoelettrico prima e l'effetto Compton poi, mostrarono che le onde elettromagnetiche possedevano anche un aspetto particellare, chiamando la parti-

cella associata fotone. Allo stesso tempo iniziò a crollare anche l'idea intuitiva sulla natura della materia: gli elettroni, pensati come particelle di materia, si comportavano anche come onde mostrando proprietà quali l'interferenza e la diffrazione. Perciò la distinzione concettuale tra materia e forze, o tra particelle e campi, non apparve più molto chiara. Da una parte le forze elettromagnetiche trattate in termini di campi mostravano un aspetto particellare; dall'altra le particelle mostravano un aspetto ondulatorio o di campo. "Electrons behave just like light" scrive Feynman nel 1965 nell'introduzione al III volume delle sue *Lectures on Physics*. *Tutto allora, materia e forze, verrà descritto in termini di campi*. In particolare distingueremo i campi spinoriali da quelli di gauge: i primi sono i campi di materia le cui particelle associate, i leptoni ed i quark, hanno spin semi intero; i campi di gauge invece sono i campi che mediano le interazioni (elettromagnetica, debole e forte) e le cui particelle associate, i fotoni, i bosoni vettori  $W$  e  $Z$ , i gluoni, sono particelle con spin intero.

Oltre all'elettromagnetismo e alla gravità, le rimanenti interazioni in natura sono quelle nucleari; le così dette interazioni forti e deboli. La prima è osservabile in due aree: a larghe scale è la forza che unisce protoni e neutroni nei nuclei; a piccole scale è la forza che tiene uniti i quark, i costituenti ultimi della materia, per formare i protoni, i neutroni e altre particelle. L'interazione debole è invece responsabile dei decadimenti radioattivi delle particelle subatomiche.

La prima teoria che spiegasse l'interazione debole, in particolare il decadimento  $\beta$  :  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  è dovuta a Fermi, ed è la teoria a quattro fermioni. Questi non introdusse alcun campo che mediasse l'interazione a distanza visto che intuitivamente non essendoci alcun effetto da essere propagato da un punto all'altro, cioè non essendoci alcuna azione a distanza chiaramente non era necessario alcun campo. La teoria di Fermi dava buoni risultati e non vi erano evidenze sperimentali dirette che la smentissero. Tuttavia la non rinormalizzabilità della teoria era segno evidente della sua incompletezza. Uno dei recenti trionfi nella fisica delle particelle (1960) si è avuto con l'affermazione della teoria di Glashow, Weinberg e Salam degna erede della teoria di Fermi. Con essa i campi elettromagnetici e deboli vengono unificati. I campi deboli acquisiscono dei *quanti* - i bosoni  $W$  e  $Z$  - che sono circa 80 volte più massivi del protone.

L'interazione forte avviene tra i quark, i costituenti ultimi della materia, ed è mediata dai gluoni. Grazie ad essa è resa possibile l'esistenza del nucleo atomico. Consideriamo un atomo qualsiasi composto da un certo numero di protoni e neutroni. Essendo i protoni carichi positivamente, se sono presenti, in uno stesso nucleo, due o più protoni, questi tenderanno a respingersi per azione della forza elettromagnetica. Un nucleo in cui agisse solo la forza elettromagnetica sarebbe destinato ad essere distrutto da queste forze repulsive. Occorre quindi introdurre un nuovo meccanismo per spiegare questo effetto. Il fatto che

il nucleo continui ad esistere fu imputato all'azione attrattiva operata da una forza detta forza nucleare forte, che è il residuo dell'interazione forte che si esercita tra i quark per formare i protoni e neutroni. I gluoni svolgono dunque un'azione "collante" (da cui il loro nome) tra i quark che compongono i nucleoni. Ogni quark possiede infatti una carica di colore, che cambia continuamente trasferendo gluoni ad altri quark. La forza nucleare forte fu originariamente ipotizzata da Enrico Fermi.

## Modello Standard e Rivoluzione di Gauge

Il modello standard, basato sul gruppo di gauge  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  è uno dei grandi successi della rivoluzione di gauge che si ebbe tra gli anni '50 e '70. Nel 1971 't Hooft, rivisitando una vecchia teoria di Yang e Mills, generalizzazione della teoria della luce di Maxwell, eccetto la grandezza del gruppo di simmetria, mostrò che le teorie di gauge erano rinormalizzabili anche quando vengono rotti spontaneamente i gruppi di simmetria. Con questa fondamentale scoperta divenne possibile scrivere le teorie rinormalizzabili dell'interazione debole e forte in cui da una parte i bosoni W e dall'altra i gluoni vengono rappresentati come campi di gauge.

Il gruppo rilevante per le interazioni debole, elettromagnetica e forte è  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Per definire questo gruppo è però necessario prima descrivere i campi di materia e di forza. Partiamo dall'interazione debole: una sua nota caratteristica è che viola la conservazione della parità per mezzo dell'accoppiamento  $V - A$ . Da cui soltanto le componenti left dei leptoni sono accoppiate nel settore di variazione di carica; le componenti right giocano un ruolo passivo, per contribuire alla massa. Similmente le interazioni deboli adroniche possono essere rappresentate assumendo che i quark abbiano lo stesso tipo di accoppiamento debole. Perciò, per le interazioni deboli, le particelle elementari sono stati con chiralità<sup>1</sup> ben definita e con massa nulla (un autostato di massa finita è una sovrapposizione di uno stato left e right con ugual peso). Inizialmente Glashow propose una teoria unificata delle interazioni elettrodeboli basata sul gruppo di gauge  $SU(2) \times U(1)$ , che mischiasse i diversi stati chirali a massa nulla. Tuttavia il fatto che le particelle fisiche mostrassero massa non nulla portava alla violazione di questa simmetria. La stessa ipotesi fu avanzata da Weinberg e Salam i quali inclusero nella teoria un meccanismo di rottura spontanea di simmetria che tramite gli accoppiamenti ai campi scalari di Higgs conferisse massa alle particelle fisiche.

Le simmetrie che subiscono l'operazione di gauging, descritta in dettaglio in sezione 1.1, sono quelle riferite alle trasformazioni tra quark e leptoni privi di massa con chiralità definita. Questi sono raccolti in sei "sapori". I sapori leptonici sono  $(\nu_e, e)$ ,  $(\nu, \mu)$ ,  $(\nu, \tau)$ . I sei sa-

---

<sup>1</sup>La chiralità è definita come l'autovalore di  $\gamma_5$ , con  $\gamma_5 = 1$  corrispondente alle componenti right e  $\gamma_5 = -1$  alle componenti left.

Famiglia	Sapore $f$	Quark $q_{fn}$ Colore: $n = 1, 2, 3$	Leptoni $l_f$	
I	1	$u_1 u_2 u_3$	$\nu_e$	$\updownarrow SU(2)$
	2	$d_1 d_2 d_3$	$e$	
II	3	$c_1 c_2 c_3$	$\nu_\mu$	$\updownarrow SU(2)$
	4	$s_1 s_2 s_3$	$\mu$	
III	5	$t_1 t_2 t_3$	$\nu_\tau$	$\updownarrow SU(2)$
	6	$b_1 b_2 b_3$	$\tau$	

$\longleftrightarrow$   
 $SU(3)$

Tabella 1: SIMMETRIE INTERNE DEI QUARK E LEPTONI

pori di quark similmente a quelli leptonici vengono raccolti in tre doppietti  $(u, d)$ ,  $(s, c)$ ,  $(t, b)$ . In aggiunta, ogni sapore di quark si divide in tre “colori” al contrario dei leptoni che invece non hanno colore. Quindi le particelle elementari sono:

$$\begin{aligned}
 \text{quark: } q_{fn} & \begin{cases} (f = 1, 2, \dots, 6) & \text{indice di sapore} \\ (n = 1, 2, 3) & \text{indice di colore} \end{cases} \\
 \text{leptoni: } l_f & \begin{cases} (f = 1, 2, \dots, 6) & \text{indice di sapore} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

E' bene chiarire che, ad esempio,  $q_{fn}$  denota collettivamente sia  $(q_R)_{fn}$  che  $(q_L)_{fn}$  cioe la componente right e left, ognuna pensata come particella indipendente.

Per queste particelle postuliamo le seguenti simmetrie interne che ritroviamo riassunte in tabella 1:

1. **Colore**  $SU(3)$ : rispetto all'indice di colore i tre quark di ogni sapore formano un tripletto di un gruppo  $SU(3)_c$ . I leptoni sono singoletti rispetto a questo gruppo.
2. **Isospin debole**  $SU(2)$ : in ogni famiglia le componenti left delle particelle (ad esempio  $e_L$  e  $\nu_e$ ) formano un doppietto di un gruppo di Isospin debole  $SU(2)_I$ . Tutte le particelle right sono singoletti di  $SU(2)$ .
3. **Ipercarica debole**  $U(1)$ : per ogni particella c'è una simmetria  $U(1)$ , chiamata iper-carica debole, associata a trasformazioni simultanee di fase. Le relative fasi sono fissate definendo un particolare valore dell'iper-carica.

Il gruppo di gauge è quindi  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  il prodotto diretto dei tre gruppi mutualmente commutanti. L'operazione di gauging richiede l'introduzione di 12 campi di gauge, uno per ogni generatore del gruppo, come è mostrato in tabella 2.

I campi di gauge generalmente possono interagire con se stessi poichè, al contrario del fotone, essi generalmente portano “carica” in virtù della natura non abeliana del gruppo. E’ bene notare inoltre che ci sono altre simmetrie esatte nella teoria quali il numero barionico, leptonico e la stranezza che non subiscono alcun “gauging”. La Lagrangiana del Modello Standard si scrive:

$$\mathcal{L}_{MS} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_F \quad (0.0.2)$$

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (0.0.3)$$

$$\mathcal{L}_F = \sum_i iR_i\gamma \cdot D R_i + iL_i\gamma \cdot D L_i \quad (0.0.4)$$

dove  $\mathcal{L}_B$  è la parte bosonica contenente i campi di gauge (fotone, gluoni,  $W$  e  $Z$ ) e  $\mathcal{L}_F$  è la parte fermionica contenente i settori right e left dei quark e dei leptoni.

Questa teoria presenta però un serio problema dato che tutte le particelle sono supposte prive di massa e non si può pensare di risolvere il problema semplicemente aggiungendo termini di massa nella Lagrangiana, visto che questi violerebbero la simmetria  $SU(2) \times U(1)$  che noi assumiamo essere esatta. Inoltre termini di bosoni vettori massivi porterebbero ad una teoria non rinormalizzabile. Per risolvere il problema, come già accennato, si ricorre al principio di rottura spontanea di simmetria, che vedremo in dettaglio nel paragrafo 1.2, con l’aggiunta di un campo di Higgs che modifica l’espressione 0.0.2 con un termine  $\mathcal{L}_H$ ,

$$\mathcal{L}_H = D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 + G_e(\bar{L}\phi R_e + \bar{R}_e\phi^\dagger L) + G_\nu(\bar{L}\phi R_\nu + \bar{R}_\nu\phi^\dagger L) \quad (0.0.5)$$

Siccome la massa e la chiralità non commutano le particelle fisiche non formano necessariamente multipletti di  $SU(2) \times U(1)$ . Ciò comporta un mixing di sapori tra famiglie. D’altra parte i multipletti di colore sono autostati di massa, poichè quark left e right possono avere lo stesso colore. Evidenze sperimentali mostrano che il colore  $SU(3)$  non subisce il meccanismo di rottura spontanea.

Ad oggi il Modello Standard può apparentemente descrivere tutte le forze fondamentali

Gruppi di Gauge	Numero di generatori	Campi di Gauge
Colore $SU(3)$	8	$G_a^\mu$ ( $a = 1, \dots, 8$ ): Gluoni
Isospin debole $SU(2)$	3	$W_i^\mu$ ( $i = 1, 2, 3$ ): Bosoni vettori
Ipercarica debole $U(1)$	1	$B^\mu$

Tabella 2: CAMPI DI GAUGE DEL MODELLO STANDARD

(esclusa la gravità). È stato formulato per descrivere l'unione della teoria elettrodebole di Weinberg-Salam con la teoria della cromodinamica quantistica (QCD). Non è certamente la teoria completa delle interazioni fondamentali in quanto non spiega l'origine delle masse dei quark o delle varie costanti di accoppiamento oltre ad essere una teoria poco elegante e poco maneggevole. Tuttavia, ad oggi, sembra in grado di spiegare un'enorme quantità di dati sperimentali. Non solo è una teoria rinormalizzabile ma può anche spiegare un vasto numero di risultati di diverse aree della fisica delle particelle: gli esperimenti di diffusione dei neutrini, le regole di somma adronica, i decadimenti deboli, l'algebra delle correnti, etc. Infatti ad oggi non c'è alcun dato sperimentale che viola le sue predizioni.

## Presentazione della tesi

Nella prima parte di questa tesi sono presentate le principali caratteristiche del Modello Standard, la teoria che descrive tre delle quattro forze fondamentali, utilizzando gli strumenti tipici della teoria quantistica dei campi. Nel primo capitolo vengono descritti gli elementi fondamentali delle teorie di gauge di Yang-Mills, necessari per la scrittura della Lagrangiana di una qualsiasi teoria di campo; viene poi descritto il meccanismo di rottura spontanea di simmetria che consente la spiegazione dell'unificazione elettrodebole e del conferimento di massa alle particelle elementari; successivamente viene introdotta la teoria degli spinori di Majorana e il meccanismo dell'altalena fornendo così una possibile spiegazione sulla natura delle masse dei neutrini tanto diverse rispetto a quelle delle altre particelle elementari. Infine vengono dedotti parallelamente alle teorie di gauge di Yang-Mills i principali elementi della teoria della Relatività Generale di Einstein che consente la descrizione della Gravitazione.

Nella seconda parte vengono descritti i fondamentali elementi della geometria non commutativa. Dopo aver fornito qualche motivazione fisica per lo sviluppo di certi strumenti si comincia con la descrizione delle algebre, spazi vettoriali che consentono la costruzione di varietà topologiche anche in ambiente non commutativo. Si introduce poi la teoria dei moduli di Hilbert che consente di generalizzare la teoria dei fibrati vettoriali e cioè gli spazi su cui le rappresentazioni dell'algebra possono agire.

La terza parte è dedicata all'introduzione delle principali tecniche della geometria spettrale di Connes che è la generalizzazione al caso non commutativo dell'usuale geometria di spin su una varietà Riemanniana. In questa parte viene descritto in che modo implementare una struttura metrica e una misura sugli spazi algebrici. Vengono poi definite le triple spettrali che costituiscono l'ingrediente fondamentale e il cuore della geometria non commutativa, in quanto con esse è possibile costruire il calcolo differenziale e dal calcolo differenziale le teorie di gauge che permettono quindi una formulazione algebrica del

Modello Standard e della Gravitazione.

Nell'ultima parte della tesi, facendo uso di tutti gli strumenti introdotti, in particolare del formalismo alla Connes-Lott della geometria non commutativa, sono derivate algebricamente alcune importanti applicazioni fisiche -la teoria dell'interazione tra quark, il modello elettrodebole per i leptoni e il meccanismo dell'altalena- in un quadro originale che discostandosi dalla letteratura per l'aggiunta di neutrini destrorsi, consente l'implementazione di un meccanismo di conferimento massa ai neutrini. In ultima analisi, per completezza, verrà accennata la nuova teoria dell'azione spettrale di Connes-Chamseddine che consente di spiegare l'accoppiamento del Modello Standard con la Gravità.

# Capitolo 1

## Modello Standard

Nel Modello Standard tutte le interazioni sono derivate da un “*principio di gauge*” simile a quello per l’elettromagnetismo. L’accoppiamento del campo elettromagnetico  $A^\mu$  ad un campo di materia carico  $\psi$  può essere derivato attraverso la seguente prescrizione: sostituire  $\partial^\mu\psi$  nella parte di Lagrangiana di massa con la derivata covariante  $(\partial^\mu + ieA^\mu)\psi$  dove  $e$  è la carica elettrica di  $\psi$ . Senza l’aggiunta del termine di accoppiamento (cioè per  $e = 0$ ) la Lagrangiana di massa deve essere invariante per trasformazioni di fase costanti di  $\psi$ , chiamate “*trasformazioni globali di gauge*”. La prescrizione richiede di estendere questa simmetria ad una “*simmetria locale di gauge*”, e cioè un’invarianza di  $\psi$  per trasformazioni di fase dipendenti arbitrariamente dallo spazio-tempo (correlate con le corrispondenti trasformazioni di gauge di  $A^\mu$ ). L’invarianza di gauge globale originaria implica l’esistenza di una corrente di materia conservata  $j^\mu$ , e la prescrizione prevede un’interazione del tipo  $ej^\mu A^\mu$ , in corrispondenza alla teoria di Maxwell.

Per la derivazione del Modello Standard si usa un principio di gauge generalizzato, formulato da Yang e Mills [15] e applicato ad un campo di materia con multicomponenti. Invece di  $U(1)$  si considera un gruppo di trasformazioni di dimensione maggiore – $SU(2)$ ,  $SU(3)$ – che mischia le diverse componenti del campo. In questo caso ci saranno diversi campi di gauge - *i campi di Yang-Mills* - il cui numero coinciderà col numero di generatori del gruppo. La prescrizione descritta per la descrizione dell’elettromagnetismo è però universale ed è detta “principio di gauge” e verrà mostrata in dettaglio nella sezione seguente.

## 1.1 Teorie di gauge

L'elemento chiave della teoria di Yang-Mills consiste nell'invarianza delle teorie fisiche non soltanto per trasformazioni di gauge globali ma anche per trasformazioni di gauge locali, cioè i cui parametri dipendono dai punti dello spazio-tempo.

Consideriamo un campo fermionico  $\psi_i$  che si trasforma in una qualche rappresentazione del gruppo  $SU(N)$ <sup>1†</sup>, non necessariamente quella fondamentale,

$$\psi_i(x) \longrightarrow S_{ij}(x)\psi_j(x), \quad (1.1.1)$$

dove  $S_{ij}$  è un elemento di  $SU(N)$ . Indichiamo con  $\tau^a$  i generatori dell'algebra di Lie associata:

$$[\tau^a, \tau^b] = if^{abc}\tau^c. \quad (1.1.2)$$

Il punto essenziale è che l'elemento  $S$  del gruppo di simmetria è *funzione dello spazio-tempo* e può essere parametrizzato

$$S_{ij}(x) = (e^{i\theta^a(x)\tau^a})_{ij} \Rightarrow \psi'_i = (e^{i\theta^a(x)\tau^a})_{ij}\psi_j \quad (1.1.3)$$

dove i parametri della trasformazione  $\theta^a(x)$  sono variabili locali.

Il problema di questa costruzione è che le derivate ordinarie dei campi  $\partial_\mu\psi_i$  non sono covarianti a causa di un termine aggiuntivo  $(\partial_\mu S)$ ,

$$\partial_\mu\psi_i \longrightarrow \partial_\mu\psi'_i = S(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu S)\psi \quad (1.1.4)$$

Per cancellare questo termine indesiderato si introduce un nuovo operatore di derivazione  $D_\mu$  che risulta covariante sotto le trasformazioni del gruppo e che quindi prende il nome di derivata covariante. Per costruire l'operatore  $D_\mu$  viene introdotto un nuovo campo o potenziale  $A_\mu(x)$ , detto *connessione* da un punto di vista matematico:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (1.1.5)$$

con:

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)\tau^a. \quad (1.1.6)$$

che si trasforma nel seguente modo per una trasformazione del gruppo:

$$A'_\mu(x) = -\frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^{-1} + SA_\mu(x)S^{-1} \quad (1.1.7)$$

---

<sup>1†</sup>Gli elementi fondamentali della teoria dei gruppi sono sintetizzati in appendice A

In questo modo risulta che l'operatore  $D_\mu$  trasforma in maniera opportuna:

$$\begin{aligned}
 (D_\mu\psi)' &= \partial_\mu\psi' - igA'_\mu\psi' \\
 &= S(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu S)\psi - igA'_\mu S\psi \\
 &= S(D_\mu\psi).
 \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Le trasformazioni dei campi e dei potenziali (1.1.1) e (1.1.7) in forma infinitesima si riscrivono:

$$\begin{cases} \delta\psi = ig\theta^a\tau^a\psi \\ \delta A_\mu^a = -\frac{i}{g}\partial_\mu\theta^a + f^{abc}\theta^b A_\mu^c \end{cases} \tag{1.1.9}$$

**Esempio 1.**  $U(1)$ ,  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ .

1. Consideriamo il gruppo  $U(1)$ . Il gruppo ha un solo generatore che chiameremo  $\tau$  e in particolare scegliamo  $\tau = -1$ , quindi  $S = e^{-i\theta(x)}$ :

$$U(1) : \psi' = e^{-i\theta(x)}\psi \tag{1.1.10}$$

Usando inoltre la tradizionale notazione per l'accoppiamento elettromagnetico, la carica  $e$  invece di  $g$  per l'accoppiamento, otteniamo:

$$U(1) : D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{1.1.11}$$

e siccome  $\partial_\mu S = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta}$  si ha per il potenziale ( $A_\mu = A_\mu\tau = -A_\mu$ ):

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \tag{1.1.12}$$

Quindi abbiamo ritrovato le trasformazioni di campo della QED.

2. Vediamo poi il caso  $SU(N) = SU(2)$ . I generatori  $\tau^a$  questa volta sono le matrici  $2 \times 2$  di Pauli  $\tau^a = \sigma^a/2$  con  $a = 1, 2, 3$  definite come

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1.13}$$

e che definiscono la seguente algebra di Lie:

$$\left[ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i\epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}, \text{ con } i, j, k = 1, 2, 3. \tag{1.1.14}$$

Quindi  $S = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2}$ ,

$$SU(2) : \psi' = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2}\psi \quad (1.1.15)$$

e la derivata covariante si scrive:

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}_\mu\psi \quad (1.1.16)$$

Siccome si ha  $\partial_\mu S = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\theta})S$  con un pò di algebra l'equazione (1.1.7), per  $\theta^i$  infinitesimi, restituisce:

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu - \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{A}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\theta}. \quad (1.1.17)$$

3. Vediamo come ultima applicazione il caso  $SU(3)$ . I generatori  $\tau^a = \lambda^a/2$  sono 8 matrici  $3\times 3$ , dette matrici di Gell-Mann,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & & \\ \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

che obbediscono le regole di commutazione:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = if_{abc}\frac{\lambda_c}{2} \quad (1.1.19)$$

le quantità  $if_{abc}$  sono le costanti di struttura del gruppo e sono totalmente antisimmetriche negli indici. Si può verificare che le uniche componenti non nulle sono

$$\begin{cases} f_{123} = 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = 1/2 \\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (1.1.20)$$

Abbiamo quindi la trasformazione  $S = e^{i\frac{\lambda^a}{2}\theta^a}$  dove  $a$  è sommato da 1 a 8 e la derivata covariante si scrive:

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \frac{i}{2}g\lambda^a A_\mu^a\psi \quad (1.1.21)$$

Gli otto potenziali di gauge  $A_\mu^a$ , scritti in forma matriciale, sono:

$$\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} = \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_\mu^8 \end{pmatrix} \quad (1.1.22)$$

### 1.1.1 Campo di Forza e Azione di Yang-Mills

E' possibile costruire l'azione invariante per la connessione  $A_\mu$ . Siccome  $D_\mu$  è covariante allora il commutatore di due derivate covarianti è anche esso covariante. Definiamo allora il *campo di forza* (o *field strength*, o *campo di Gauge*)  $G_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

$$= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)\tau^a \quad (1.1.24)$$

Il tensore  $G_{\mu\nu}^a$  trasformerà nel seguente modo:

$$G_{\mu\nu} \rightarrow S G_{\mu\nu} S^{-1} \quad (1.1.25)$$

E' possibile quindi costruire un'azione invariante per il campo di Gauge e siccome vogliamo che questa contenga solo le derivate seconde possiamo scegliere:

$$\text{Tr}(S G_{\mu\nu} S^{-1} S G^{\mu\nu} S^{-1}) = \text{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \quad (1.1.26)$$

L'azione associata al campo di Gauge contenente sole derivate seconde è data perciò da:

$$\mathcal{S}_B = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right) = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right). \quad (1.1.27)$$

Questa è l'azione di Yang-Mills, ed è il punto di partenza di qualsiasi discussione riguardante le teorie di gauge.

In ultima analisi, siccome  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}S^\dagger(x)$  è facile verificare che l'azione fermionica accoppiata al campo di gauge  $G_{\mu\nu}$  è data da:

$$\mathcal{S}_F = \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma \cdot D - m)\psi \quad (1.1.28)$$

quindi l'azione totale si scriverà

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_B + \mathcal{S}_F \\ &= \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\gamma \cdot D - m)\psi - \frac{1}{4} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

**Esempio 2.** Ancora  $U(1)$ ,  $SU(2)$  e  $SU(3)$ .

1. Nel caso del gruppo  $U(1)$ , essendo questo abeliano, il termine con il commutatore in (1.1.23) è zero, quindi ponendo  $G \equiv F$  il campo di gauge associato si scrive

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.1.30)$$

che è il tensore di campo elettromagnetico. La Lagrangiana (1.1.29) costruita in modo che risulti invariante per il gruppo di trasformazioni locali  $U(1)$  diventa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

e descrive un sistema di fermioni (campi di materia  $\psi$ ) e *fotoni* (campi di gauge  $A_\mu$ ).

2. Se invece prendiamo  $SU(2)$ , i generatori  $\sigma^i$  che obbediscono le regole di commutazione (1.1.14) e restituiscono come campo di gauge (1.1.23),

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (1.1.32)$$

oppure in notazione vettoriale,

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu. \quad (1.1.33)$$

La Lagrangiana invariante per il gruppo  $SU(2)$  si scrive quindi:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{i}{2}g \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \mathbf{W}^{\mu\nu} \quad (1.1.34)$$

e descrive un campo di fermioni interagenti per mezzo di *bosoni vettori intermedi*  $\mathbf{W}_\mu$ .

3. Consideriamo infine il gruppo  $SU(3)$ : I generatori di Gell-Mann (1.1.18) restituiscono il campo di gauge (1.1.23) nella forma:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad a, b, c = 1, \dots, 8 \quad (1.1.35)$$

La Lagrangiana invariante per il gruppo  $SU(3)$  si scrive quindi:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{A}_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu} \quad (1.1.36)$$

e descrive un campo di fermioni interagenti per mezzo di *gluoni*  $\mathbf{A}_\mu$ .

## 1.2 Rottura spontanea di simmetria

In fisica si parla di rottura spontanea di simmetria quando una simmetria posseduta da un sistema non è condivisa dal suo stato fondamentale. Ad esempio in un ferromagnete gli atomi interagiscono per mezzo di un'interazione spin-spin

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (1.2.1)$$

che essendo uno scalare risulta invariante per rotazioni. Al di sopra di una certa temperatura, detta temperatura critica  $T_c$ , il ferromagnete non è magnetizzato e gli atomi hanno direzioni casuali dello spin. Anche lo stato fondamentale risulta pertanto invariante per rotazioni. Al di sotto della temperatura critica però, il ferromagnete si magnetizza spontaneamente orientando tutti gli spin lungo una particolare direzione. Il nuovo stato fondamentale non sarà più invariante per rotazioni generiche, dando luogo alla rottura spontanea di simmetria.

Un altro classico esempio è quello di un'asta poggiata perpendicolarmente ad un piano come in figura 1.2.1. Applicando una forza  $F$  lunga la direzione dell'asta, se la forza non è troppo intensa, non succede nulla e l'asta si mantiene ancora nella posizione iniziale. Se però  $F > F_c$  l'asta si piega scegliendo una direzione completamente casuale. Il nuovo stato fondamentale per  $F > F_c$ , rispetto a quello iniziale  $F < F_c$ , avrà perso chiaramente una simmetria.

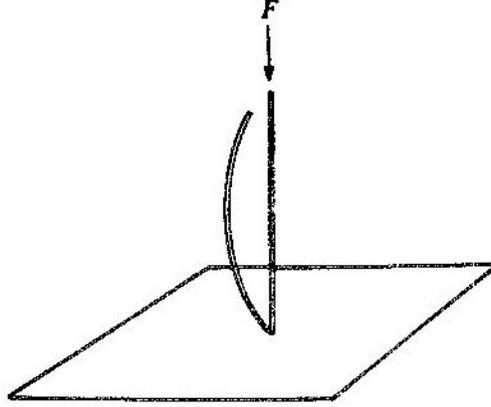


Figura 1.2.1: Un'asta piegata se sottoposta ad una forza. Lo stato finale dell'asta mostra una rottura spontanea di simmetria.

### 1.2.1 Meccanismo di Goldstone

In teoria dei campi si possono trovare situazioni simili a quelle appena illustrate: una Lagrangiana ha una simmetria che però non è condivisa dallo stato fondamentale del sistema per particolari valori di un parametro della teoria. Ad esempio la Lagrangiana di un campo complesso  $\phi$ ,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \quad (1.2.2)$$

$$= (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi, \phi^*) \quad (1.2.3)$$

è simmetrica rispetto ad una trasformazione globale di gauge di un gruppo  $U(1)$ :

$$U(1) : \phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi \quad (\Lambda \text{ cost.}) \quad (1.2.4)$$

Lo stato fondamentale del sistema  $\phi_0$  si ottiene minimizzando il potenziale  $V$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2 \phi^* + 2\lambda \phi^* (\phi^* \phi) = 0. \quad (1.2.5)$$

Quando il parametro  $m^2 > 0$  lo stato fondamentale ha la forma  $\phi_0 = 0$  mantenendo ancora la simmetria  $U(1)$ . Se però  $m^2 < 0$  lo stato  $\phi = 0$  diventa un massimo e il minimo del potenziale sarà  $\phi_0$  tale che

$$|\phi_0|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} \equiv a^2 \quad (1.2.6)$$

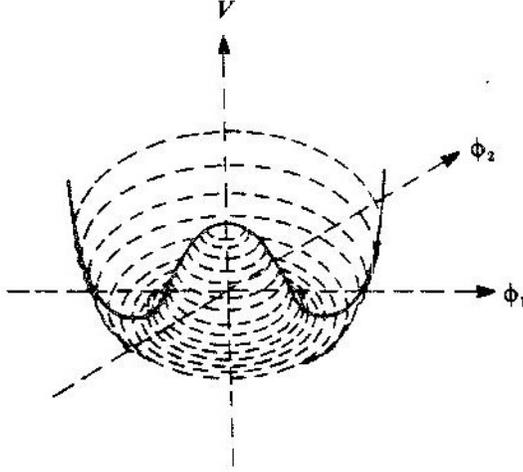


Figura 1.2.2: Il potenziale  $V$  ha un minimo per  $|\phi| = a$  e un massimo per  $\phi = 0$ .

e cioè  $|\phi_0| = a$ . In una teoria quantistica, dove il campo  $\phi$  è un operatore, questa condizione di minimo si riferisce al valore di aspettazione sul vuoto,

$$|\phi_0| = |\langle 0|\phi|0\rangle| = a. \quad (1.2.7)$$

La funzione  $V$  è mostrata in figura 1.2.2, rappresentata in un piano  $\phi_1 - \phi_2$ , dove  $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ . Il minimo di  $V$  giace lungo il cerchio  $|\phi| = a$ , pertanto esso non risulta più invariante  $U(1)$  che ricordiamo è una semplice rotazione nel piano considerato. Scegliendo allora un particolare stato di vuoto, ad esempio quello lungo l'asse reale  $\phi_1$ ,  $\phi_0 \equiv \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ , si opera chiaramente una rottura spontanea di simmetria avendo specificato una particolare direzione nell'isospazio considerato. Il campo  $\phi$  ha un valore di aspettazione sul vuoto diverso da zero, sintomo del fatto che abbiamo scelto un vuoto sbagliato. Per superare questo problema bisogna introdurre un nuovo campo fisico  $\phi'$  operando una traslazione sul campo  $\phi$ :

$$\phi' = \phi - a \quad (1.2.8)$$

in modo che  $\langle 0|\phi'|0\rangle = 0$ . Sostituendo nella Lagrangiana:

$$\phi = a + \frac{(\phi'_1 + i\phi'_2)}{\sqrt{2}} \quad (1.2.9)$$

il risultato finale sarà espresso in termini di campi di fisici (omettendo l'apice) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - 2\lambda a^2\phi_1^2 + \text{cubici} + \text{quartici} \quad (1.2.10)$$

e quindi i nuovi campi introdotti  $\phi_2$  e  $\phi_1$  rappresentano rispettivamente una particella priva di massa (siccome nella Lagrangiana non compaiono termini quadratici in  $\phi_2$ ) e una particella con massa  $m_1 = \sqrt{4\lambda a^2}$ .

Il meccanismo appena illustrato di rottura spontanea di una **simmetria globale**, va sotto il nome di meccanismo di Goldstone e i bosoni privi di massa emergenti prendono il nome di bosoni di Nambu-Goldstone.

### 1.2.2 Meccanismo di Higgs

Il meccanismo di Goldstone può facilmente essere esteso al caso di simmetrie locali. La Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \quad (1.2.11)$$

risulta invariante per una trasformazione locale  $U(1)$ :

$$U(1) : \phi \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\phi \quad (1.2.12)$$

se si introducono le connessioni  $A_\mu$ ,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.2.13)$$

Come prima nel caso  $m^2 > 0$  lo stato di vuoto risulta ancora invariante  $U(1)$ , ma quando  $m^2 < 0$  lo stato fondamentale avrà perso tale simmetria e avrà un valore di aspettazione sul vuoto diverso da zero, tale che  $|\phi| = a$ . Introduciamo allora i nuovi campi  $\phi'_1$  e  $\phi'_2$  tali che:

$$\phi(x) = a + \frac{\phi'_1(x) + i\phi'_2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (1.2.14)$$

La Lagrangiana in termini di campi fisici si riscriverà (omettendo gli apici):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + . \quad (1.2.15)$$

$$+ \sqrt{2}eaA^\mu\partial_\mu\phi_2 - 2\lambda a^2\phi_1^2 + \text{cubici} + \text{quartici}. \quad (1.2.16)$$

Il campo introdotto  $\phi_2$  non è un grado di libertà fisico visto che il termine  $A^\mu\partial_\mu\phi_2$  prevede la trasformazione di un fotone  $A_\mu$  in  $\phi_2$  e siccome inoltre può essere eliminato operando

una trasformazione di gauge sui campi  $\phi$ , scegliendo un parametro  $\Lambda$  tale che  $\phi_2 = 0$ . In questa gauge la Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2 a^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - 2\lambda a^2 \phi_1^2 + \text{cubici} + \text{quartici}. \quad (1.2.17)$$

Questa Lagrangiana contiene solo due campi, un fotone  $A_\mu$  con spin 1 e un bosone  $\phi_1$  con spin 0, entrambi massivi. Il campo  $\phi_2$ , che nel caso di simmetria globale costituiva il bosone di Goldstone privo di massa, in questo meccanismo è scomparso, dando luogo invece all'acquisizione di massa da parte del campo di gauge  $A_\mu$ . Questo fenomeno è detto meccanismo di Higgs e sarà usato nel seguito per la derivazione del modello elettrodebole.

### 1.3 Modello elettrodebole

Il modello che unifica l'interazione debole ed elettromagnetica fu sviluppato indipendentemente da Weinberg, Salam e Ward nel 1967. Nei diversi lavori venne usato come nuovo e cruciale ingrediente il meccanismo di *rottura spontanea di simmetria* sviluppato da Higgs, Englert e Brout indipendentemente qualche anno prima. L'idea generale consiste nel fatto che le interazioni deboli debbano essere mediate da bosoni di gauge ( $W^\pm$ ) inizialmente supposti privi di massa così come gli elettroni, i muoni e i rispettivi neutrini. La Lagrangiana iniziale è inoltre invariante per un gruppo di simmetria interna di gauge. Quindi nell'espressione della Lagrangiana (1.1.34) si ha  $m = 0$  e una sommatoria sugli spinori  $\psi$  che avranno un indice di sapore  $i$ ,  $\psi_i$  che diversifica le diverse specie di particelle. Un campo scalare, il campo di Higgs, con un valore di aspettazione sul vuoto diverso da zero, viene successivamente introdotto e la risultante rottura spontanea della simmetria conferisce massa ad  $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$  ed ai bosoni di gauge, ma non al fotone e al neutrino. Il modello che analizzeremo nel seguito però, con una leggera variante al modello di Weinberg e Salam (l'introduzione del neutrino right), porterà al conferimento di massa anche al neutrino.

Concentriamoci su una singola generazione leptonica, quella elettronica; per i  $\mu$  e i  $\tau$  varranno le stesse considerazioni.

Come già accennato nell'equazione (0.0.2), la Lagrangiana invariante per trasformazioni locali del gruppo  $SU(2) \times U(1)$  si scriverà come somma di una parte di gauge  $\mathcal{L}_B$  e di una parte fermionica  $\mathcal{L}_F$ :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_F \quad (1.3.1)$$

determinate dalle relazioni (1.1.34), (1.1.31):

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.3.2)$$

$$\mathcal{L}_F = i\bar{R}_e\gamma \cdot D R_e + i\bar{R}_\nu\gamma \cdot D R_\nu + i\bar{L}\gamma \cdot D L \quad (1.3.3)$$

dove  $L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$  consistente delle parti left del neutrino e dell'elettrone forma un *doppio* di isospin debole con carica non abeliana  $I_w = \frac{1}{2}$ ;  $I_w^3(\nu_e) = \frac{1}{2}$  e  $I_w^3(e_L) = -\frac{1}{2}$ . Invece  $R_e \equiv (e_R)$  e  $R_\nu \equiv (\nu_R)$ , consistenti dell'elettrone e del neutrino right, sono entrambi *singoletti* di isospin con  $I_w = 0$  e  $I_w^3 = 0$ . Questi due settori si trasformano quindi in maniera diversa sotto  $SU(2)$ :

$$SU(2) : \begin{cases} L \rightarrow e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}} L \\ R_e \rightarrow R_e \\ R_\nu \rightarrow R_\nu \end{cases} \quad (1.3.4)$$

La carica abeliana associata al settore  $U(1)$  è l'ipercarica  $Y$  che deve assumere i valori  $Y = -1$  per  $L$ ,  $Y = -2$  per  $R_e$ , e  $Y = 0$  per  $R_\nu$ , affinché venga rispettata la relazione sperimentale di Gell-Mann e Nishijima:

$$Q = I_w^3 + \frac{Y_w}{2}$$

La trasformazione corretta di  $L, R_e, R_\nu$  sotto  $U(1)$  sarà pertanto

$$U(1) : \begin{cases} L \rightarrow e^{\frac{i}{2}\beta} L \\ R_e \rightarrow e^{i\beta} R_e \\ R_\nu \rightarrow R_\nu \end{cases} \quad (1.3.5)$$

in modo che le cariche  $Q$  della coppie  $(\nu_e, e_L)$  risultino  $(0, -1)$  e dei singoletti  $(\nu_R)$  ed  $(e_R)$  rispettivamente  $0$  e  $-1$ . Abbiamo quindi bisogno sia del settore  $SU(2)$  che  $U(1)$  per scrivere correttamente le cariche.

Ricordiamo che esplicitamente i termini della Lagrangiana (1.3.1) come visto nel para-

grafo 1.1 sono:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\
D_\mu R_e &= (\partial_\mu + ig'B_\mu)R_e \\
D_\mu R_\nu &= \partial_\mu R_\nu \\
D_\mu L &= (\partial_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu - \frac{i}{2}g\sigma_i W_\mu^i)L
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Introduciamo nella Lagrangiana un campo scalare di Higgs  $\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}$  con valore di aspettazione sul vuoto diverso da zero, isospin 1/2 e ipercarica +1:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_H \tag{1.3.7}$$

con:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H &= D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 + G_e(\bar{L}\phi R_e + \bar{R}_e \phi^\dagger L) + G_\nu(\bar{L}\phi R_\nu + \bar{R}_\nu \phi^\dagger L) \\
D_\mu \phi &= (\partial_\mu - \frac{i}{2}g'B_\mu - \frac{i}{2}g\sigma_i W_\mu^i)\phi
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Sottolineiamo che questo termine di Higgs che estende la Lagrangiana viene aggiunto completamente “a mano”, con la motivazione di dare luogo ad una rottura spontanea di simmetria. La rottura di simmetria è infatti indotta dal valore di aspettazione sul vuoto di  $\phi$ :

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{1.3.9}$$

Dopo la rottura di simmetria i campi  $W_\mu^a$  e  $B_\mu$  si ricombinano e riemergono come campo fotonico  $A_\mu$ , un bosone vettore neutro massivo  $Z_\mu$  e un doppietto di particelle massive cariche  $W_\mu^\pm$ :

$$\begin{aligned}
Z_\mu &= \frac{gW_\mu^3 + g'B_\mu}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \equiv \cos\theta_W W_\mu^3 + \sin\theta_W B_\mu \\
A_\mu &= \frac{gB_\mu - g'W_\mu^3}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \equiv -\sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu \\
W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

dove  $\theta_W$  definisce l'angolo di Weinberg:

$$\cos\theta_W \equiv \frac{g}{(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.3.11)$$

Esaminando i termini quadratici della Lagrangiana dopo la rottura di simmetria possiamo leggere le masse delle particelle risultanti:

$$\begin{aligned} M_{W_1}^2 &= M_{W_2}^2 = \frac{g^2 \eta^2}{2} \\ M_Z^2 &= \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W} \\ M_A &= 0 \\ M_e &= G_e \eta / \sqrt{2} \\ M_\nu &= G_\nu \eta / \sqrt{2} \\ M_H^2 &= 2\lambda \eta^2 \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Dove  $M_e$  è la massa dell'elettrone,  $M_\nu$  del neutrino,  $M_W$  e  $M_z$  sono le masse dei bosoni vettori che mediano l'interazione debole,  $M_A$  è la massa del fotone che media l'interazione elettromagnetica e  $M_H$  è la massa del bosone di Higgs. Il valore stimato di  $\eta$  cioè del valore di aspettazione sul vuoto del campo di Higgs si ottiene dallo studio del decadimento del muone da cui si ricava la relazione  $G_F = g^2/2M_W^2$ , che combinata con la prima delle (1.3.12) restituisce,

$$\sqrt{2} \langle \phi \rangle_0 = \eta = \left( \sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} \simeq 246 \text{ Gev} . \quad (1.3.13)$$

A parte il bosone di Higgs che è l'unica particella del Modello Standard ancora non rilevata, sperimentalmente le predizioni del modello di Weinberg-Salam sono state testate fino alla quarta cifra decimale. E' quindi considerato un eccezionale successo della teoria di gauge di Yang-Mills.

Con la teoria di Weinberg-Salam i leptoni vengono allora classificati in doppietti e singoli di  $SU(2) \times U(1)$  in tre diverse generazioni:

$$\begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} \\ (e_R), \quad (\mu_R), \quad (\tau_R) \\ (\nu_R^e), \quad (\nu_R^\mu), \quad (\nu_R^\tau) \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

e l'interazione tra questi leptoni viene mediata dai bosoni vettori  $W^\pm, Z, A$ .

Il modello di Weinberg-Salam può essere esteso anche agli adroni visto che i quark interagiscono anche per mezzo dell'interazione elettrodebole. I doppietti di  $SU(2)$ , divisi anche essi in tre generazioni, saranno:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad (1.3.15)$$

che avranno isospin debole  $I_W = 1/2$  e ipercarica debole  $Y = 1/3$  associata alla trasformazione di fase del gruppo  $U(1)$ . Le componenti right invece:

$$\begin{matrix} (u_R), & (c_R), & (t_R) \\ (d_R), & (s_R), & (b_R) \end{matrix} \quad (1.3.16)$$

saranno singoletti di isospin con  $I_W = 0$  e ipercarica debole  $Y = 4/3$  per  $u_R, c_R, t_R$  e  $Y = -2/3$  per  $d_R, s_R, b_R$ . Le costanti di accoppiamento che compaiono nella Lagrangiana che legano i fermioni left con i fermioni right e con il bosone di Higgs (quelle che per l'elettrone e il neutrino abbiamo indicato con  $G_e$  e  $G_\nu$ ) sono dette costanti di *accoppiamento di Yukawa*  $Y_a$ .

Osserviamo che il modello di Weinberg-Salam per i quark si distacca da quello per i leptoni nei diversi valori delle fasi del gruppo  $U(1)$  che determinano un valore dell'ipercarica  $Y$  tale che la relazione di Gell-Mann e Nishijima assicuri  $Q(u, c, t) = 2/3$ ,  $Q(d, s, b) = 1/3$ .

## 1.4 Interazione Forte

Descritta l'interazione elettrodebole con il modello di Weinberg-Salam non ci resta che indagare il modo con cui i quark interagiscono tra loro per mezzo dell'interazione forte. Nel mondo delle interazioni forti la rivoluzione di gauge ha reso possibile l'affermazione della QCD. Postulando una nuova carica conservata, la simmetria di colore  $SU(3)$ , la teoria di Yang-Mills forniva un collante che consentisse ai quark di mantenersi uniti. La simmetria esatta di colore  $SU(3)$  non va confusa con la simmetria approssimata di sapore  $SU(3)_f$  che differenzia i diversi tipi di quark e che ha dominato la maggior parte della fenomenologia degli anni '60 e '70. I quark hanno quindi due indici: un indice  $a = u, d, s, c, t, b$  indica la simmetria di sapore mentre un altro indice etichetta la simmetria di colore. Possiamo

rappresentare questa distinzione nella tabella:

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ d^1 & d^2 & d^3 \\ s^1 & s^2 & s^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \\ t^1 & t^2 & t^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

dove 1,2,3 sono gli indici di colore, a volte indicati anche con  $R, W, B$ .

La Lagrangiana della QCD, invariante per trasformazioni del gruppo  $SU(3)_c$  in accordo con (1.1.36) è data da:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^6 \bar{\psi}_i (i\gamma \cdot D - m_i)\psi_i \quad (1.4.2)$$

con  $D_\mu = (\partial_\mu - \frac{i}{2}g\lambda^a A_\mu^a)$  e  $G_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)$ . L'indice  $i$  sommato da 1 a 6, indica i sapori quindi i vari tipi di quark dal down al bottom;  $\lambda^a$  sono le matrici di Gell-Mann definite in (1.1.18) e generatori del gruppo  $SU(3)$ . Tuttavia i quark portano anche un indice di colore  $SU(3)$ , che non compare nella formula. In altre parole i quark portano 6 indici di sapore e 3 di colore ma i primi si riferiscono ad una simmetria globale e non esatta, i secondi ad una simmetria locale ed esatta.

La Lagrangiana (1.4.2) è quindi invariante sotto l'azione di un gruppo di trasformazioni:

$$q \rightarrow Uq, \quad q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

dove  $q$  può essere uno qualsiasi dei 6 quark e  $U$  è una matrice 3x3 speciale unitaria. I motivi per cui scegliamo una Lagrangiana invariante per il gruppo  $SU(3)$  e non  $SO(3)$  sono essenzialmente due: (a) se il gruppo di colore fosse  $SO(3)$  i sistemi di diquark, cioè di due quark di uguale sapore tenuti insieme, potrebbero formare un singoletto di colore, ma i diquark non sono stati trovati in natura; (b)  $SO(3)$  non possiede libertà asintotica (proprietà fondamentale per la QCD) quando il numero di sapori è maggiore di due e minore di 16, range in cui di sicuro troviamo il numero di sapore della QCD.

La simmetria di colore  $SU(3)$  è una simmetria esatta e non viene rotta da alcun meccanismo di Higgs; per questo motivo i gluoni, come i fotoni, risultano privi di massa. A causa però della non abelianità del gruppo di simmetria si differenziano dai fotoni neutri della QED

	$SU(3)_C$	$SU(2)_W$	$U(1)_Y$	$Q$
$u_L$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	1/3	2/3
$d_L$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	1/3	-1/3
$u_R$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{S}$	4/3	2/3
$d_R$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{S}$	-2/3	-1/3
$\nu_L$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{F}$	-1	0
$e_L$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{F}$	-1	-1
$\nu_R$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{S}$	0	0
$e_R$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{S}$	-2	-1

Tabella 1.1: *Comportamenti delle particelle di una singola generazione per l'azione dei vari gruppi di simmetria. La  $\mathbb{F}$  indica che la particella trasforma sotto la rappresentazione fondamentale del gruppo. La  $\mathbb{S}$  significa che la particella trasforma sotto la rappresentazione triviale del gruppo (singoletto).*

perché portano essi stessi una carica di colore partecipando così anche essi all'interazione forte.

La tabella 1.1 sintetizza i numeri quantici che caratterizzano le particelle elementari di una singola generazione; le due famiglie rimanenti, a parte le differenze di massa, si ripeteranno esattamente nello stesso schema. I campi di quark possono essere rappresentati da un totale di 72 possibilità dati dalla combinazione,  $[3(\text{generazioni left}) \times 2(\text{isospin debole}) \times 3(\text{colore}) + 6(\text{particelle right}) \times 3(\text{colore})] \times 2(\text{spin}) = 72$ . Per i leptoni invece ci sono 24 possibilità,  $[3(\text{generazioni left}) \times 2(\text{isospin debole}) + 6(\text{particelle right})] \times 2(\text{spin}) = 24$ .

## 1.5 Spazio di Hilbert del Modello Standard

Mettendo insieme i risultati del modello elettrodebole e del modello a quark possiamo descrivere il mondo delle particelle del Modello Standard utilizzando lo spazio di Hilbert interno  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R$  con

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_L &= \underbrace{(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3)}_{\text{quark left}} \oplus \underbrace{(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C})}_{\text{leptoni left}} \\
 \mathcal{H}_R &= \underbrace{((\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3)}_{\text{quark right}} \oplus \underbrace{((\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C})}_{\text{leptoni right}}
 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

in ogni addendo, il primo fattore denota i doppietti o i singoletti di isospin debole, il secondo denota le  $N = 3$  generazioni e il terzo denota i tripletti o singoletti di colore a seconda se

sono quark o leptoni. Una base possibile per lo spazio  $\mathcal{H}$  è dato da:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} c^i \\ s^i \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} t^i \\ b^i \end{pmatrix}_L \quad (1.5.2)$$

$$\begin{matrix} (u^i)_R & (c^i)_R & (t^i)_R & (e)_R & (\mu)_R & (\tau)_R \\ (d^i)_R & (s^i)_R & (b^i)_R & (\nu^e)_R & (\nu^\mu)_R & (\nu^\tau)_R \end{matrix}$$

l'indice  $i$  va da 1 a 3 ed indica i tripletti di colore.

Ricordiamo che lo spazio di Hilbert deve tener conto anche delle antiparticelle e quindi  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_R^c \oplus \mathcal{H}_L^c$  dove l'apice indica la coniugazione di carica,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R^c &= \underbrace{(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3)}_{\text{antiquark right}} \oplus \underbrace{(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C})}_{\text{antileptoni right}} \\ \mathcal{H}_L^c &= \underbrace{((\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3)}_{\text{antiquark left}} \oplus \underbrace{(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}}_{\text{antileptoni left}} \end{aligned}$$

una base di  $\mathcal{H}_R^c \oplus \mathcal{H}_L^c$  si scrive applicando l'operatore coniugazione di carica  $\mathcal{C}$  alla base  $\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R$ :

$$\mathcal{H}_R^c \oplus \mathcal{H}_L^c = (\mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_L)^c. \quad (1.5.3)$$

La coniugazione di carica  $\cdot^c$  [16] manda particella in antiparticella e scambia le chiralità secondo la seguente costruzione:

$$\psi^c \equiv \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \mathcal{C}(\psi^\dagger \gamma^0)^T = \mathcal{C}\gamma^0 \psi^* = i\gamma^2 \psi^* \quad (1.5.4)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'espressione per  $\mathcal{C} = i\gamma^2 \gamma^0$ . Lo scambio della chiralità è così verificato:

$$(\psi_L)^c = \mathcal{C}((P_L \psi)^\dagger \gamma^0)^T = \mathcal{C}(\psi^\dagger \gamma^0 P_R)^T = \mathcal{C}(\bar{\psi} P_R)^T = \mathcal{C} P_R^T \bar{\psi}^T = P_R \mathcal{C} \bar{\psi}^T = (\psi^c)_R. \quad (1.5.5)$$

La base dello spazio di Hilbert per le antiparticelle si scriverà dunque:

$$\begin{pmatrix} \nu_e^c \\ e^c \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} \nu_\tau^c \\ \tau^c \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} \nu_\mu^c \\ \mu^c \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} u_i^c \\ d_i^c \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} c_i^c \\ s_i^c \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} t_i^c \\ b_i^c \end{pmatrix}_R$$

$$\begin{matrix} (u_i^c)_L & (c_i^c)_L & (t_i^c)_L & (e^c)_L & (\mu^c)_L & (\tau^c)_L \\ (d_i^c)_L & (s_i^c)_L & (b_i^c)_L & (\nu_e^c)_L & (\nu_\mu^c)_L & (\nu_\tau^c)_L \end{matrix}$$

## 1.6 Masse dei neutrini e meccanismo dell'altalena

Il modello di Weinberg-Salam con i neutrini destrorsi conferisce massa sia all'elettrone che al neutrino. Tuttavia la massa estremamente piccola del neutrino, quasi mille volte più piccola rispetto a quella dell'elettrone, pone un problema nella teoria: perché le costanti di accoppiamento con il campo di Higgs sono così diverse,  $G_\nu \ll G_e$ ? Sembra infatti molto insolito il fatto che da uno stesso meccanismo possano emergere particelle con masse così differenti.

Il meccanismo dell'altalena tenta di risolvere tale problema, considerando la ragionevole possibilità che dopo una rottura di simmetria esistano due neutrini di Majorana, uno con massa nulla (che non si accoppia all'Higgs) e l'altro con massa molto elevata, dell'ordine della scala energetica della rottura. Come vedremo, la combinazione di questi due campi darà luogo a due neutrini, uno con massa quasi nulla (ma non nulla) e osservato, l'altro molto pesante, dell'ordine della scala della rottura, quindi non osservato. Per poter descrivere il meccanismo dell'altalena è necessario prima parlare della differenza tra masse di Dirac e masse di Majorana e cioè a seconda se si trattano spinori di Dirac o di Majorana.

### 1.6.1 Spinori di Weyl, Dirac e Majorana

Ricordiamo che uno spinore di Weyl a due componenti è uno stato di una particella sinistrorsa (o destrorsa)  $\psi_{L,R}^{\dagger 2}$  a cui è associato necessariamente uno stato di antiparticella destrorsa  $\psi_{L,R}^c = (\psi^c)_{R,L}$  tramite una trasformazione  $CPT$ . Un *neutrino attivo* è per definizione uno spinore sinistrorso che trasforma come un doppietto di  $SU(2)$  insieme ad un partner leptonic carico anche esso sinistrorso. Questi subiscono quindi l'interazione debole così come le rispettive antiparticelle,

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix} \xrightarrow{CPT} \begin{pmatrix} (\nu^c)_R \\ e_R^+ \end{pmatrix}. \quad (1.6.1)$$

Un *neutrino sterile* invece è un singoletto di  $SU(2)$  e può essere aggiunto al Modello Standard ripristinando una simmetria, nel numero e nel tipo di stati, tra quark e leptoni. Di solito si indica con  $R$  lo stato destrorso di particella e con  $L$  il rispettivo stato di antiparticella legati sempre da trasformazione  $CPT$ ,

$$N_R \xrightarrow{CPT} N_L^c. \quad (1.6.2)$$

---

<sup>2†</sup> Il pedice  $L$  o  $R$  si riferisce alla chiralità sinistra o destra, cioè se è autostato della matrice  $\gamma_5$  con autovalore  $-1$  o  $+1$ . Nel limite di massa nulla questi corrispondono anche ad autostati sinistrorsi o destrorsi di elicità cioè dello spin nella direzione dell'impulso  $\sigma \cdot \hat{p}$ .

In generale i termini di massa descrivono accoppiamenti tra stati destrorsi e sinistrorsi. In particolare un termine di massa di Dirac, con numero leptonico conservato, coinvolge un accoppiamento tra due neutrini di Weyl distinti,  $\nu_L$  e  $N_R$ :

$$\mathcal{L}_D = -m_D (\bar{\nu}_L N_R + \bar{N}_R \nu_L) = -m_D \bar{\nu} \nu \quad (1.6.3)$$

dove un campo di Dirac per il neutrino è definito come  $\nu \equiv \nu_L + N_R$ . Perciò un campo di Dirac ha quattro componenti,  $\nu_L, \nu_L^c, N_R, N_R^c$  e il termine di massa implica un numero leptonico conservato  $L = L_\nu + L_N$ . Per un neutrino di Dirac ordinario lo spinore  $\nu_L$  è attivo e  $N_R$  è sterile.

Nel termine di massa si ha una transizione di isospin debole  $\Delta I = 1/2$ , visto che  $\nu_L$  ha isospin  $1/2$  mentre  $N_R$  ha isospin  $0$ . Il termine di massa richiede quindi una rottura di  $SU(2)$  generata da un accoppiamento di Yukawa del tipo,

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -h_\nu \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{e} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix} N_R + h.c. \quad (1.6.4)$$

in cui  $m_D = h_\nu v / \sqrt{2}$ , con  $h_\nu$  costante di accoppiamento di Yukawa e  $v = 246$  GeV da (1.3.13). Una massa di Dirac per un neutrino va pensata quindi proprio come una massa di un quark o di un leptone; tuttavia essa tiene aperto un grande dilemma: perché la costante di Yukawa associata al neutrino è tanto più piccola rispetto a quella del rispettivo elettrone? Bisogna richiedere infatti una costante di Yukawa  $h_\nu \sim 10^{-11}$  per avere  $m_\nu \sim 1$  eV quando invece per l'elettrone si ha  $h_e \sim 10^{-6}$ . Questo è il motivo per cui si introduce un diverso tipo di massa, la massa di Majorana.

Un fermione massivo neutro può essere descritto da uno spinore di Majorana [22], uno spinore a componenti reali che soddisfa la condizione,

$$\psi^* = \psi = \psi^c \quad (1.6.5)$$

dove  $\psi^c$  rappresenta la coniugazione di carica che manda particella in antiparticella e scambia le chiralità come visto in sezione 1.5.

Osserviamo che solo fermioni neutri possono essere descritti da spinori di Majorana in quanto i fermioni carichi dovrebbe rispettare contemporaneamente:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu - m)\psi = 0 \text{ (fermione carico } -e) \quad (1.6.6)$$

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu - m)\psi^c = 0 \text{ (antifermione carico } +e) \quad (1.6.7)$$

che è impossibile. La condizione di Majorana riduce inoltre a due il numero di componenti indipendenti di uno spinore. Infatti applicando i proiettori di proiezione  $P_{L,R} \equiv \frac{1 \mp \gamma^5}{2}$  alla condizione di Majorana,

$$P_{L,R}(\psi_L + \psi_R) = P_{L,R}[(\psi^c)_L + (\psi^c)_R] \xrightarrow{P_{L,R}} \begin{cases} \psi_L = (\psi^c)_L = (\psi_R)^c \equiv \psi_R^c \\ \psi_R = (\psi^c)_R = (\psi_L)^c \equiv \psi_L^c \end{cases} \quad (1.6.8)$$

Da cui si vede che la condizione di Majorana riduce a 2 le 4 componenti indipendenti dello spinore di un fermione massivo, che potrà scriversi quindi

$$\psi = \psi_L + \psi_L^c. \quad (1.6.9)$$

Una massa di Majorana per un neutrino coinvolgerà quindi un antineutrino destrorso  $\nu_L^c$  al posto di un distinto neutrino di Weyl. Essa assocerà quindi una transizione da un antineutrino ad un neutrino. Nella Lagrangiana il termine di massa per un neutrino attivo  $\nu_L$  si scriverà (ricordando che  $\bar{\nu}_L \nu_L = \bar{\nu}_L^c \nu_L^c = 0$ ),

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2} \mathbf{m}_L \bar{\nu} \nu = -\frac{1}{2} \mathbf{m}_L (\bar{\nu}_L^c \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_L^c) \quad (1.6.10)$$

dove  $\nu = \nu_L + \nu_L^c$  è uno stato autoaggiunto a due componenti soddisfacente la condizione di Majorana  $\nu = \nu^c$ . Se  $\nu_L$  è attivo, e quindi forma un doppietto di  $SU(2)$  con un'altra particella, allora nella Lagrangiana si ha  $\Delta I = 1$  e la massa  $\mathbf{m}_L$  dovrà essere generata da un tripletto elementare di Higgs oppure da un operatore che coinvolge due doppietti di Higgs sistemati in modo tale da trasformare come un tripletto.

Naturalmente si può anche avere un termine di Majorana per un neutrino sterile  $N_R$  (ricordando che  $\bar{\nu}_R \nu_R = \bar{\nu}_R^c \nu_R^c = 0$ ),

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2} \mathbf{m}_R (\bar{N}_R^c N_R + \bar{N}_R N_R^c), \quad (1.6.11)$$

il quale essendo un singoletto si  $SU(2)$  assocerà una transizione  $\Delta I = 0$  richiedendo quindi una rottura di simmetria ad opera di un singoletto di Higgs.

In conclusione la Lagrangiana di Majorana si scriverà

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \mathbf{m}_L \bar{\nu}_L \nu_L^c - \frac{1}{2} \mathbf{m}_R \bar{N}_R N_R^c + h.c. \quad (1.6.12)$$

dove i pedici  $L, R$  designano la chiralità sinistrorsa o destrorsa e l'apice  $c$  rappresenta la coniugazione di carica.

### 1.6.2 Meccanismo dell'altalena

Lo strumento chiave del meccanismo dell'altalena è di una sorprendente semplicità ed è illustrato nell'esempio seguente:

**Esempio 3.** Consideriamo una matrice  $\tilde{M}$  reale  $2 \times 2$  che in una certa base vettoriale ha la forma

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \quad (1.6.13)$$

Se ora consideriamo una nuova base ruotata di un certo angolo  $\varepsilon$  rispetto a quella originale, la matrice  $\tilde{M}$  si riscrive:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 100\sin^2\varepsilon & 100\cos\varepsilon \sin\varepsilon \\ -100\cos\varepsilon \sin\varepsilon & 100\cos^2\varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

nell'ipotesi in cui l'angolo di rotazione è piccolo, ad esempio  $\varepsilon \sim 2^\circ$ , allora  $\cos\varepsilon = 0.99939$  e  $\sin\varepsilon = 0.03490$  e si ha:

$$M = \begin{pmatrix} 0.122 & 3.488 \\ -3.488 & 99.878 \end{pmatrix} \quad (1.6.15)$$

che è una matrice molto simile a quella di partenza, visto che il termine  $m_{22}$  è molto maggiore rispetto agli altri: i termini fuori diagonale, che coincidono con la media geometrica dei due termini diagonali, vale a dire  $\sqrt{(100\sin^2\varepsilon)(100\cos^2\varepsilon)}$ , non sono così piccoli come  $m_{11}$  ma comunque significativamente più piccoli rispetto a  $m_{22}$ .

Il punto fondamentale e cuore del meccanismo dell'altalena è che partendo da una matrice del tipo (1.6.13) e passando ad una base leggermente ruotata rispetto a quella di partenza, otteniamo una matrice del tipo (1.6.15) con  $m_{22} \gg m_{12} > m_{11}$ .

Il ruolo della matrice  $M$  dell'esempio 3 viene giocato da una matrice  $\mathcal{M}$  che compare

nella Lagrangiana di massa riscritta in termini matriciali:

$$\mathcal{L}_{mass} = \left( -\frac{1}{2} \mathbf{m}_L \bar{\nu}_L \nu_L^c - \frac{1}{2} \mathbf{m}_R \bar{N}_R N_R^c + h.c. \right) + m_D (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \quad (1.6.16)$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{N}_R^c \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix} + h.c. \quad (1.6.17)$$

$$\mathcal{M} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{m}_L & m_D \\ m_D & \mathbf{m}_R \end{pmatrix} \quad (1.6.18)$$

Supponiamo che una rottura di simmetria conferisca ai neutrini soltanto termini di massa di Majorana. Così la matrice di massa risulta diagonale, a differenza di (1.6.18),

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad (1.6.19)$$

e i termini di massa nella Lagrangiana si scriveranno:

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu} & \bar{N} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix} \quad (1.6.20)$$

dove i vettori  $\nu$  e  $N$  sono gli autostati di massa per i neutrini. Gli autostati dell'interazione debole  $\nu_L$  e  $N_R$  (con i rispettivi coniugati) che compaiono in (1.6.16), combinazioni lineari di  $\nu$  e  $N$ , interagiscono per mezzo dell'interazione debole, e rappresentano ciò che rileviamo con gli esperimenti.

Ricavare la matrice  $\tilde{\mathcal{M}}$  da (1.6.18) è un semplice problema di diagonalizzazione, con  $m_\nu$  e  $M$  rappresentanti gli autovalori del problema. Il che significa che possiamo pensare i nostri campi in due diversi modi: un mix di particelle di Dirac e Majorana con vettori colonna espressi come in (1.6.16) oppure come sole particelle di Majorana associate alla matrice di massa  $\tilde{\mathcal{M}}$  rappresentata sui vettori di campo  $(\nu N)^T$ . Euristicamente trovare  $(\nu N)^T$  da  $(\nu_L^c \ N_R)$  significa ruotare la base vettoriale, in uno spazio astratto, di un angolo opportuno che restituisca il vettore  $(\nu N)^T$ .

**Analisi breve** In analogia all'esempio 3 possiamo immediatamente dedurre gli ordini di grandezza delle quattro componenti della matrice  $\mathcal{M}$  data la matrice  $\tilde{\mathcal{M}}$  con l'elemento diagonale sinistro uguale a zero e la base  $(\nu N)^T$  molto prossima a quella ruotata  $(\nu_L^c \ N_R)^T$ :

$$M \approx \mathbf{m}_R \gg m_D > \mathbf{m}_L \approx 0 \quad (1.6.21)$$

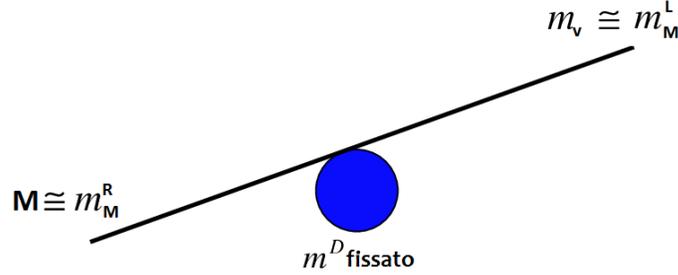


Figura 1.6.1: Meccanismo dell'altalena: tanto più grande risulta  $m_M^R$  tanto più piccolo sarà  $m_M^L$  e viceversa.

dove la massa di Dirac  $m_D$  è la media geometrica delle due masse di Majorana,  $m_D^2 = \mathbf{m}_R \mathbf{m}_L$ . Osserviamo che per un dato valore della massa di Dirac  $m_D$  un valore tanto più grande per  $\mathbf{m}_R$  implica un valore tanto più piccolo per  $\mathbf{m}_L$  e viceversa. Questo è il motivo da cui il nome “meccanismo dell’altalena”.

### 1.6.3 Analisi con autovalori

Il metodo di deduzione delle masse in analogia all’esempio 3 consente di comprendere l’essenza del meccanismo dell’altalena ma per avere una descrizione quantitativa più completa è necessario operare un’analisi con autovalori. Dalla diagonalizzazione della matrice  $\mathcal{M}$  si trova pertanto:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{m}_L - \lambda & m_D \\ m_D & \mathbf{m}_R - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (1.6.22)$$

da cui:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_L + \mathbf{m}_R) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mathbf{m}_L + \mathbf{m}_R)^2 - 4(\mathbf{m}_L \mathbf{m}_R - m_D^2)}. \quad (1.6.23)$$

Richiedendo,

$$\mathbf{m}_L \mathbf{m}_R = m_D^2 \quad (1.6.24)$$

si ottengono gli autovalori:

$$\lambda_+ = \mathbf{m}_L + \mathbf{m}_R \equiv M \quad (1.6.25)$$

$$\lambda_- \equiv m_\nu = 0 \quad (1.6.26)$$

L'autovettore corrispondente all'autovalore  $\lambda_+$  sarà determinato dal sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_L - (\mathbf{m}_L + \mathbf{m}_R) & m_D \\ m_D & \mathbf{m}_R - (\mathbf{m}_L + \mathbf{m}_R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix} = 0 \quad (1.6.27)$$

da cui discende  $\nu_L^c = (m_D/\mathbf{m}_R) N_R$  e quindi l'autovettore corrispondente è:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{m_D}{\mathbf{m}_R} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{m_D}{\mathbf{m}_R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{m_D}{\mathbf{m}_R} \nu_L^c + N_R. \quad (1.6.28)$$

Includendo anche il termine Hermitiano coniugato in (1.6.16) che abbiamo trascurato, abbiamo:

$$N = (N_R + N_R^c) + \frac{m_D}{\mathbf{m}_R} (\nu_L + \nu_L^c). \quad (1.6.29)$$

Similmente per l'autovettore corrispondente a  $\lambda_-$  si ha:

$$\nu = (\nu_L + \nu_L^c) - \frac{m_D}{\mathbf{m}_R} (N_R + N_R^c). \quad (1.6.30)$$

Se assumiamo:

$$\mathbf{m}_R \gg m_D \quad (1.6.31)$$

allora l'autovettore  $N$  con autovalore  $M$  sarà composto interamente da particelle destrorse, e risulterà molto pesante; viceversa  $N_R$  può essere pensato composto interamente da campi  $N$ . Similmente, l'autovettore  $\nu$  con autovalore  $m_\nu \sim 0$  sarà composto interamente da neutrini sinistrorsi  $\nu_L$  e  $\nu_L^c$  e risulterà molto leggero.

Con un approccio diverso, assegnati  $\mathbf{m}_L$  e  $\mathbf{m}_R$ , la massa  $m_D$  sarà la media geometrica delle due masse di Majorana, e sarà prossima alla più piccola delle due. Se vale (1.6.31) e (1.6.24) avremo,

$$\mathbf{m}_L \approx 0 \text{ (ma non zero)} \quad (1.6.32)$$

e da (1.6.25) segue  $\mathbf{m}_R \approx M$ . Così la relazione gerarchica (1.6.21) risulta ancora verificata. I risultati allora concordano con quelli dell'approccio precedente.

Si potrebbe giustamente osservare: il meccanismo dell'altalena sembra offrire una spie-

gazione convincente del perché le masse dei neutrini risultano così piccole rispetto alle altre masse. Tuttavia tale meccanismo è basato su un'assunzione ( $\mathbf{m}_R \gg m_D$ ) suscettibile di una stessa perplessità: perché  $\mathbf{m}_R$  dovrebbe risultare molto più grande di  $m_D$ ? La risposta però è presto data: se infatti partiamo con una matrice di massa puramente di Majorana  $\tilde{\mathcal{M}}$  con uno dei due campi a massa nulla ( $m_\nu = 0$ , non accoppiato alla particella di Higgs)

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad (1.6.33)$$

e operiamo una piccola rotazione nello spazio 2D dei vettori  $(\nu N)^T$ , otteniamo una matrice del tipo (1.6.18) che rispetta la condizione  $\mathbf{m}_R \gg m_D$  che è la nostra assunzione iniziale. Quindi la causa principale è ricondotta ad una piccola rotazione isospaziale.

#### 1.6.4 Invarianza di Gauge e Rinormalizzazione

E' chiaro che se un neutrino massivo viene descritto da uno spinore di Dirac è possibile associarvi un numero quantico leptonico legato all'invarianza per trasformazione di gauge del gruppo  $U(1)$ . Questo non è più possibile però nel caso di neutrini di Majorana [22], visto che i termini di massa nell'equazione (1.6.12) non risultano invarianti per una trasformazione globale di un gruppo  $U(1)$ ,

$$\nu_L \rightarrow e^{i\varphi} \nu_L. \quad (1.6.34)$$

Questo diventa chiaro riscrivendo il termine di massa di Majorana esplicitando  $\nu_L^c = \mathcal{C}\bar{\nu}_L^T$  come da equazione (1.5.4),

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2} m \left( \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + \nu_L^\dagger \mathcal{C} \nu_L^* \right), \quad (1.6.35)$$

che diventa quindi,

$$\mathcal{L}_{mass}^M \longrightarrow \frac{1}{2} m \left( e^{2i\varphi} \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + e^{-2i\varphi} \nu_L^\dagger \mathcal{C} \nu_L^* \right). \quad (1.6.36)$$

L'assenza di un numero quantico conservato è evidente anche dal fatto che i neutrini e gli antineutrini di Dirac hanno numero quantico leptonico opposto,  $L = \pm 1$ . Siccome nel formalismo di Majorana neutrini e antineutrini sono gli stessi oggetti è chiaro allora che essi non possono avere numero quantico leptonico conservato.

Tuttavia siccome le masse dei neutrini sono molto piccole e a parte il termine di massa di Majorana la Lagrangiana è invariante sotto una trasformazione di gauge  $U(1)$ , è possi-

bile assegnare ai leptoni carichi e ai neutrini un numero quantico leptonico. In tali processi i neutrini devono essere considerati privi di massa.

Un secondo problema relativo al formalismo degli spinori di Majorana è legato alla rinormalizzabilità della teoria. Ricordiamo [17] che se una Lagrangiana presenta un prodotto di campi la cui dimensione è maggiore di un'energia alla quarta potenza e quindi una costante di accoppiamento con dimensioni di una potenza negativa dell'energia (i campi fermionici hanno dimensione  $[E]^{3/2}$  mentre quelli bosonici hanno dimensioni  $[E]$ ) allora essa darà luogo ad una teoria non rinormalizzabile. Nel caso di Lagrangiana di Majorana il termine di dimensione più bassa che può generare un termine di Majorana tramite rottura di simmetria è,

$$\mathcal{L}_5 = \frac{g}{\mathcal{M}} (\psi_L^T \sigma_2 \phi) \mathcal{C}^\dagger (\phi^T \sigma_2 \psi_L) + h.c. \quad (1.6.37)$$

dove  $\sigma_2$  è la seconda matrice di Pauli,  $\mathcal{M}$  è una costante con le dimensioni di una massa,  $g$  è una costante di accoppiamento adimensionale,  $\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$  e  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ . Come conseguenza della rottura di simmetria elettrodebole,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Rottura di Simmetria}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}, \quad (1.6.38)$$

$\mathcal{L}_5$  genera un termine di massa di Majorana per  $\nu_L$ ,

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{1}{2} \frac{gv^2}{\mathcal{M}} \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + h.c.. \quad (1.6.39)$$

Il termine  $\mathcal{L}_5$  tuttavia non è accettabile nella struttura del Modello Standard siccome contiene un prodotto di campi con dimensione totale  $[E]^5$  e una costante di accoppiamento  $[\frac{g}{\mathcal{M}}] = [E]^{-1}$ , che rovina quindi la rinormalizzabilità.

## 1.7 Gravitazione

Gli elementi fondamentali della teoria della Relatività Generale possono essere dedotti seguendo un percorso parallelo a quello delle teorie di Gauge di Yang-Mills. Il gruppo di trasformazione per il quale l'azione della teoria deve risultare invariante non è più un semplice gruppo unitario  $SU(N)$  ma il gruppo delle trasformazioni generiche di coordinate. Dato un sistema di coordinate  $x^\mu$  che descrive lo spazio-tempo, una trasformazione di

coordinate generica risulta:

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\nu), \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4 \quad (1.7.1)$$

Per una generica trasformazione di coordinate (1.7.1) i differenziali  $dx^\mu$  e le derivate  $\partial/\partial x^\mu$  trasformeranno naturalmente nel seguente modo:

$$dx^\mu \longrightarrow d\bar{x}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \equiv G^{-1}(x) dx^\nu \quad (1.7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv G(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.7.3)$$

Gli oggetti che sotto una trasformazione di coordinate  $\bar{x} = \bar{x}(x)$  trasformano come i differenziali, quindi con la matrice  $G^{-1}(x)$  si diranno controvarianti mentre quelli che trasformano come le derivate, quindi con la matrice  $G(x)$  si diranno covarianti. Le grandezze fisiche saranno descritte da tensori, vale a dire oggetti che trasformano in maniera covariante o controvariante. Ad esempio un tensore di ordine zero (o scalare) è un oggetto che rimane invariato per trasformazione di coordinate, un tensore di ordine uno covariante (controvariante) o vettore covariante (controvariante) è un oggetto che trasforma una volta con la matrice  $G(x)$  ( $G^{-1}(x)$ ). Un tensore di ordine due volte covariante è un oggetto che trasforma due volte con la matrice  $G(x)$ , etc. In formule:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{x}) &= \phi(x) \quad \text{scalare} \\ \bar{A}_\mu(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu(x) \quad \text{vettore covariante} \\ \bar{A}^\mu(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \quad \text{vettore controvariante} \\ \bar{T}^{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) \quad \text{tensore contr.} \end{aligned}$$

Osserviamo che a differenza delle teorie di Yang-Mills in cui i gruppi di trasformazione per gli spinori sono i gruppi unitari  $SU(N)$  nella teoria della Gravitazione il gruppo di trasformazione per i vettori è il gruppo generale lineare  $GL(4)$  cioè il gruppo delle matrici reali arbitrarie  $4 \times 4$ .

Come per le teorie di Gauge è necessario definire una derivata covariante di un spinore così bisogna fare per i tensori della teoria di Einstein. Infatti la semplice derivazione  $\partial_\mu A_\nu$  non trasforma come un tensore:

$$\frac{\partial \bar{A}^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \partial_\alpha A_\beta + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\sigma \partial x^\rho} A_\rho \quad (1.7.4)$$

a causa del secondo termine che, si dice, rovina la covarianza. Per risolvere questo problema, come già visto nelle teorie di gauge, si introducono dei nuovi campi, detti connessioni, che assorbono i termini aggiuntivi indesiderati. Le connessioni per la Relatività Generale sono i simboli di Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . Definiamo allora la derivata covariante  $D_\mu$  di un vettore come,

$$D_\mu A_\nu \equiv \partial_\mu A_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \quad (1.7.5)$$

$$D_\mu A^\nu \equiv \partial_\mu A^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A^\lambda \quad (1.7.6)$$

Affinchè si abbia:

$$\overline{(D_\mu A_\nu)} = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \right) D_\alpha A_\beta \quad (1.7.7)$$

è necessario che i simboli di Christoffel trasformino nel seguente modo:

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial \bar{x}^\sigma \partial x^\rho} . \quad (1.7.8)$$

Un'altra grandezza fisica di fondamentale importanza in Relatività Generale è il tensore di curvatura, o tensore di Riemann, definito in modo analogo ai campi di Gauge della teoria di Yang-Mills:

$$[D_\mu, D_\nu] A_\lambda = R_{\mu\nu\lambda}^\rho A_\rho \quad (1.7.9)$$

$$R_{\mu\nu\lambda}^\rho \equiv \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \quad (1.7.10)$$

Ricordiamo che il tensore di curvatura, così come il campo di gauge delle teorie di Yang-Mills, si può ricavare prendendo un vettore  $A_\lambda$  e muovendolo lungo un cammino chiuso infinitesimo. Una volta completata la circuitazione il vettore risulterà ruotato di una quantità  $R_{\mu\nu\lambda}^\rho A_\rho S^{\mu\nu}$  dove  $S^{\mu\nu}$  è l'area racchiusa nella curva.

Riassumiamo in tabella 1.2 le varie analogie esistenti tra la teoria della Relatività Generale e le teorie di Gauge:

Naturalmente possiamo costruire un invariante generico contraendo tutti gli indici:

$$R_{\mu\nu\lambda}^\rho \delta_\lambda^\nu g^{\mu\lambda} \equiv R \quad (1.7.11)$$

Usando il calcolo ordinario possiamo costruire anche l'elemento di volume invariante. Infatti sapendo che in una trasformazione di coordinate l'elemento  $d^4x$  si trasforma in  $d^4\bar{x}$  secondo la legge:

$$d^4\bar{x} = \det\left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right) d^4x \quad (1.7.12)$$

Teoria di Gauge di Yang-Mills	Teoria della Relatività Generale di Einstein
Trasformazioni di Gauge su uno spazio spinoriale, $\psi' = (e^{i\theta^a(x)\tau^a})\psi$	Trasformazioni generiche di coordinate sullo spazio-tempo, $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\nu)$
Gruppo di simmetria: gruppo unitario $SU(N)$ , $U(x) = (e^{i\theta^a(x)\tau^a})$	Gruppo di simmetria: gruppo generale lineare $GL(4)$ , $G(x) = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu}$
Connessione: potenziale di Gauge, $A_\mu$ $A_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu = -\frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} + UA_\mu(x)U^{-1}$	Connessione: simbolo di Christoffel, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$
Campo di Gauge, $G_{\mu\nu}$ $G_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$	Tensore di Curvatura, $R_{\mu\nu\lambda}^\rho$ $R_{\mu\nu\lambda}^\rho A_\rho = [D_\mu, D_\nu]A_\lambda$

Tabella 1.2: PARALLELISMO TRA TEORIE DI GAUGE E RELATIVITA' GENERALE

un elemento di volume invariante sarà automaticamente,

$$\sqrt{-g}d^4x = \text{invariante} \quad (1.7.13)$$

in quanto  $\sqrt{-g}$  si trasforma con l'inverso di (1.7.12),

$$\sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}\right)\sqrt{-g(x)} \quad (1.7.14)$$

L'azione della Gravitazione deve tener conto di tre fondamentali proprietà:

1. Non deve contenere derivate del campo  $g_{\mu\nu}$  di ordine superiore a due.
2. Deve risultare invariante per trasformazioni generiche di coordinate.
3. Deve restituire equazioni del moto che nel limite di basse energie si riconducano alle equazioni di Newton.

Una possibile scelta è data dalla celebre azione di Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1.7.15)$$

Dalla minimizzazione di  $S$  si ricavano le equazioni di campo nel vuoto della Relatività Generale,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (1.7.16)$$

Nel limite di basse energie il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  si approssima alla metrica di Lorentz eccetto che per il termine  $g_{00} \sim 1 + \phi$  e le equazioni di Einstein si riducono all'equazione

di Poisson nel vuoto da cui si può ricavare la legge di gravitazione universale di Newton:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \longrightarrow \nabla^2\phi = 0 \quad (1.7.17)$$

### 1.7.1 Vierbein e Spinori in Relatività Generale

Mostriamo con un esempio in che modo una varietà Riemanniana di Spin consente di realizzare l'accoppiamento tra un campo gravitazionale e un campo spinoriale. Il nostro obiettivo è costruire l'equazione di Dirac covariante sotto una generica trasformazione di coordinate, quindi realizzare un accoppiamento gravità-spinori. Un tale accoppiamento porta però immediatamente ad una grossa difficoltà: non esistono rappresentazioni spinoriali di dimensione finita del gruppo  $GL(4)$ , matrici reali 4x4 rappresentanti trasformazioni generiche di coordinate. Per superare questa difficoltà si costruiscono spazi tangenti piatti in ogni punto dello spazio-tempo. Si immagini lo spazio-tempo come una collina ondulata. Allora lo spazio tangente si può costruire ponendo un piano piatto tangente in ogni punto della collina. Si possono così definire degli spinori in ogni punto della varietà tenendo conto che questi possono trasformarsi solo all'interno dello stesso spazio tangente per il quale, trattandosi di uno spazio piatto, si sa definire una rappresentazione spinoriale.

Di solito si indicano con lettere latine gli indici dello spazio piatto tangente e con lettere greche gli indici dei tensori dello spazio-tempo. I vierbein sono tensori misti che mettono insieme i due indici:

$$\text{Vierbein} : e_{\mu}^a(x) \quad (1.7.18)$$

la cui matrice inversa è per definizione  $e_a^{\mu}(x)$ . I vierbein possono essere visti come la “radice quadrata” del tensore metrico attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} e_{\mu}^a e_{\nu}^a &= g_{\mu\nu} \\ e^{a\mu} &= g^{\mu\nu} e_{\nu}^a \\ e_{\mu}^a e^{a\mu} &= \delta^{ab} \end{aligned} \quad (1.7.19)$$

siccome il gruppo di Lorentz agisce sugli indici dello spazio tangente possiamo definire gli spinori su questi spazi. Le matrici di Dirac  $\gamma^a$  non dipendono dai punti dello spazio tempo e rispettano l'usuale relazione:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \quad (1.7.20)$$

Queste usuali matrici di Dirac possono essere contratte sui vierbein:

$$\gamma^a e^{a\mu} = \gamma^\mu(x) \quad (1.7.21)$$

e si può mostrare che il commutatore tra due di queste matrici restituisce il tensore metrico:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}(x) \quad (1.7.22)$$

Introduciamo uno spinore  $\psi(x)$  definito come uno scalare sotto una generica trasformazione di coordinate e un ordinario spinore sotto trasformazioni di Lorentz sullo spazio tangente:

$$\begin{aligned} \text{Trasformazioni di coordinate : } & \psi \rightarrow \psi \\ \text{Trasformazioni di Lorentz : } & \psi \rightarrow e^{i\epsilon^{ab}(x)\sigma_{ab}}\psi \end{aligned} \quad (1.7.23)$$

è importante notare che abbiamo introdotto delle trasformazioni di Lorentz locali sullo spazio tangente piatto, perciò  $\epsilon_{ab}$  è una funzione dello spazio tempo e  $\sigma_{ab}$  sono i soliti  $\frac{i}{2}[\gamma_a, \gamma_b]$ . Ciò significa che la derivata di uno spinore  $\psi$  non è più un tensore. E' necessario introdurre una connessione  $\omega_\mu^{ab}$  che sotto una trasformazione di gauge  $\omega_\mu^{ab} \rightarrow \omega_\mu^{ab} - \partial_\mu \epsilon_{ab}$  e che consente di operare un gauging sul gruppo di Lorentz. La derivata covariante che permette di operare il gauging è:

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab})\psi \quad (1.7.24)$$

L'equazione covariante di Dirac si scriverà perciò:

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.7.25)$$

La Lagrangiana di una particella di Dirac interagente con un campo gravitazionale si scriverà:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2k^2}\sqrt{-g}R + e\bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi \quad (1.7.26)$$

dove  $e \equiv \det e_\mu^a = \sqrt{-g}$ .

A questo punto la connessione  $\omega_\mu^{ab}$  è ancora un campo indipendente. Ma è possibile esprimerlo in termini di soli vierbein imponendo un vincolo esterno sulla teoria:

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_\mu^{ab} e_\nu^b = 0 \quad (1.7.27)$$

così infatti come si ricava la forma esplicita delle connessioni affini  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  in termini del solo tensore metrico [35], allo stesso modo si può operare per la connessione  $\omega_\mu^{ab}$  il cui risultato

finale sarà,

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} e^{a\nu} (\partial_\mu e_\nu^b - \partial_\nu e_\mu^b) + \frac{1}{4} e^{a\rho} e^{b\sigma} (\partial_\sigma e_\rho^c - \partial_\rho e_\sigma^c) e_\mu^c - (a \leftrightarrow b) . \quad (1.7.28)$$

## Capitolo 2

# NCG: strumenti matematici

La geometria non commutativa fornisce un utile schema algebrico per trattare una vasta varietà di strutture fisico-geometriche. La sua applicazione alle teorie di gauge e in particolare al Modello Standard costituisce una strada originale per “geometrizzare” completamente l’interazione tra particelle elementari. Nella geometria non commutativa il ruolo che classicamente viene giocato da una varietà, vista essenzialmente come un insieme di punti, è sostituito da una  $*$ algebra, che nel caso commutativo altro non è che l’algebra delle funzioni a valori complessi, ma che più in generale può essere un’algebra non abeliana. Tale algebra è poi rappresentata come operatore limitato su uno spazio di Hilbert sul quale agisce un operatore di Dirac generalizzato che consente di implementare una struttura metrica. In una prima versione della geometria non commutativa sviluppata da Connes e Lott, l’azione fermionica corrisponde ad una generalizzazione dell’azione di Dirac  $\bar{\psi}(\not{D} + A)\psi$  mentre l’azione bosonica si ottiene considerando la traccia del quadrato del tensore di curvatura opportunamente generalizzato al caso algebrico. Un aspetto molto interessante in tale versione del Modello Standard e delle sue successive versioni, sta nel fatto che lo spazio di Hilbert sul quale l’algebra agisce coincide con lo spazio dei fermioni fisici visto in sezione 1.5. Da qualche anno sono stati fatti passi avanti anche verso una unificazione di tali forze con la gravità: recentemente Chamseddine e Connes hanno proposto infatti una formulazione alternativa dell’azione bosonica, basata sulla così detta “azione spettrale”; facendo uso esclusivamente del quadrato dell’operatore di Dirac con incluse anche le connessioni di spin gravitazionali, si arriva ad una descrizione del Modello Standard accoppiato con la Gravità. In questo lavoro di tesi però, fornendo anche un accenno a queste ultime novità, ci focalizzeremo essenzialmente sul primo approccio di Connes-Lott, per evidenziare alcuni importanti aspetti legati alle invarianze di gauge e alla rinormalizzazione di un Modello Standard che include neutrini massivi.

## 2.1 Motivazioni: meccanica quantistica

Consideriamo l'oscillatore armonico classico. Il suo spazio delle fasi è  $\mathbb{R}^2$  i cui punti hanno come coordinate la posizione  $x$  e il momento  $p$ . Un'osservabile classica è una funzione differenziabile sullo spazio delle fasi come ad esempio l'energia totale  $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$ . Le osservabili possono essere sommate e moltiplicate tra loro quindi formano un'algebra, nel caso classico si ha l'algebra delle funzioni  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  che risulta associativa e commutativa. Nel passaggio al mondo quantistico quest'algebra viene resa non commutativa con la richiesta della ben nota relazione di commutazione tra i generatori  $x$  e  $p$ ,

$$[x, p] = i\hbar 1. \quad (2.1.1)$$

Indichiamo  $\mathcal{A}$  l'algebra delle osservabili quantistiche. Questa risulta ancora associativa, ha una involuzione  $\cdot^*$  (la coniugazione Hermitiana) e un'unità 1. Ricordiamo brevemente che le proprietà che definiscono un'involuzione sono le seguenti:  $\cdot^*$  è una mappa lineare dall'algebra in se stessa e tale che  $(ab)^* = b^*a^*$ , conserva l'unità:  $1^* = 1$  e applicata due volte  $a^{**} = a$ .

Nel mondo quantistico chiaramente non esiste più uno spazio delle fasi di cui  $\mathcal{A}$  rappresenta l'algebra delle funzioni su di esso. Nonostante tutto si parla di uno spazio delle fasi quantistico come di uno spazio dotato di una struttura "a celle", vedi fig 2.1.1. Infatti la relazione (2.1.1) implica il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad (2.1.2)$$

da cui il concetto di punto nello spazio delle fasi perde ogni significato; si può al più parlare di celle elementari con volume  $\hbar/2$ . Per definire allora l'errore  $\Delta a$  di un'osservabile  $a \in \mathcal{A}$  abbiamo bisogno di una rappresentazione dell'algebra  $\mathcal{A}$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , e cioè un omomorfismo iniettivo  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H})$ . Per l'oscillatore armonico lo spazio di Hilbert è  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  i suoi elementi sono le funzioni d'onda  $\psi(x)$  quadrato integrabili sullo spazio delle configurazioni.

Infine la dinamica è definita da un osservabile autoaggiunto  $H = H^* \in \mathcal{A}$  tramite l'equazione di Schrodinger:

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \rho(\hat{H}) \right) \psi(x, t) = 0 \quad (2.1.3)$$

nel caso di meccanica quantistica non relativistica il tempo viene considerato come un parametro esterno, quindi non viene visto come un'osservabile. Questo cambia nella meccanica quantistica relativistica in cui l'equazione di Schrodinger viene sostituita con l'equazione

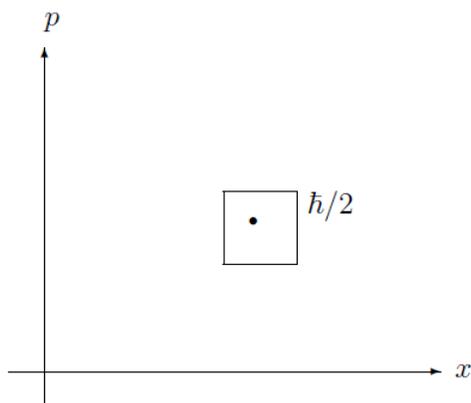


Figura 2.1.1: Spazio delle fasi quantistico: primo esempio di geometria non commutativa.

di Dirac:

$$\not{D}\psi = 0 \quad (2.1.4)$$

ora la funzione d'onda  $\psi$  è uno spinore a quattro componenti costituito da una parte left e right, che descrivono la particella e l'antiparticella e l'operatore di Dirac  $\not{D}$  non appartiene più all'algebra  $\mathcal{A}$  ma  $\not{D} \in \text{End}(\mathcal{H})$ .

Le geometrie non commutative di Connes sono descritte da questi tre oggetti algebrici  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \not{D})$  che come visto già compaiono in modo naturale nella descrizione quantistica del più semplice modello fisico.  $\mathcal{A}$  è un'algebra reale, associativa, in generale non commutativa, dotata di involuzione e di unità; uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$  sul quale l'algebra  $\mathcal{A}$  è rappresentata e  $\not{D}$  operatore autoaggiunto su  $\mathcal{H}$  che consentirà di implementare i concetti di distanza e integrazione.

Il punto di partenza della geometria non commutativa è il passaggio dagli spazi vettoriali alle algebre di funzioni definite su di essi. In questo capitolo presentiamo brevemente gli oggetti di cui ci serviremo nel seguito: le algebre delle funzioni continue sugli spazi topologici, che sono un esempio di algebra commutativa e le algebre di operatori limitati, primi esempi di algebre non commutative. Cercheremo di capire poi il nesso che esiste tra questi e i concetti fondamentali di "punti" e "fibrati vettoriali" su una certa varietà Riemanniana.

## 2.2 Algebre

Un'algebra  $\mathcal{A}$  sul campo complesso  $\mathbb{C}$  è uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{C}$  tale che oggetti come  $\alpha a + \beta b$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $a, b \in \mathcal{A}$ , appartengono ancora ad  $\mathcal{A}$ . L'algebra

è dotata anche di un prodotto  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  ossia  $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow ab \in \mathcal{A}$  che risulta distributivo rispetto alla somma:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc, \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad (2.2.1)$$

in generale il prodotto non è commutativo:

$$ab \neq ba \quad (2.2.2)$$

si assume che  $\mathcal{A}$  sia dotata di unità  $\mathbf{I}$ .

L'algebra  $\mathcal{A}$  è detta *\*-algebra* se ammette un'involuzione antilineare  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tale che

$$\begin{aligned} a^{**} &= a, \\ (ab)^* &= b^*a^* \\ (\alpha a + \beta b)^* &= \bar{\alpha}a^* + \bar{\beta}b^* \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

per ogni  $a, b \in \mathcal{A}$  ed  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $\bar{\cdot}$  indica l'ordinaria complessa coniugazione sui numeri complessi.

Un'algebra normata  $\mathcal{A}$  è un'algebra dotata di norma  $\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà: per ogni  $a, b \in \mathcal{A}$  ed  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \|a\| &\geq 0, \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ \|\alpha a\| &= |\alpha| \|a\| \\ \|a + b\| &\leq \|a\| + \|b\| \\ \|ab\| &\leq \|a\| \|b\| \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

La topologia definita dalla norma è detta *topologia uniforme*: gli intorni  $U$  corrispondenti a ciascun  $a \in \mathcal{A}$  sono dati da

$$\forall \epsilon > 0, \quad U_\epsilon(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid \|a - b\| < \epsilon\} \quad (2.2.5)$$

Un'algebra di Banach è un'algebra normata, completa nella topologia uniforme.

Una *\*-algebra* di Banach è per definizione una *\*-algebra* normata, completa, e tale che:

$$\|a^*\| = \|a\|, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.2.6)$$

Una *C\*-algebra*  $\mathcal{A}$  è una *\*-algebra* di Banach la cui norma soddisfa l'ulteriore identità:<sup>†1</sup>

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.2.7)$$

---

<sup>†1</sup> Ulteriori caratteristiche delle algebre, utili nel seguito, sono contenute in appendice B.

**Esempio 4.** Un esempio di  $C^*$ -algebra normata è  $C_0(M)$ , insieme delle funzioni continue complesse nulle all'infinito su uno spazio topologico localmente compatto  $M$ . Questa algebra non è dotata di unità, l'involuzione  $*$  è la complessa coniugazione e la norma è data dall'estremo superiore,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|. \quad (2.2.8)$$

**Esempio 5.** Un esempio di  $C^*$ -algebra non commutativa è l'algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  degli operatori lineari limitati su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  con norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ . L'involuzione  $*$  associa l'elemento aggiunto e la norma è l'usuale norma operatoriale,

$$\|B\| = \sup\{\|B\chi\|_{\mathcal{H}} \mid \chi \in \mathcal{H}, \|\chi\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}. \quad (2.2.9)$$

Nel caso in cui  $\mathcal{H}$  sia uno spazio di dimensione finita  $n$ ,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  è l'algebra non commutativa  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  delle matrici  $M$ ,  $n \times n$  a valori complessi, in cui  $M^*$  è l'Hermitiano coniugato di  $M$ . La norma operatoriale può equivalentemente essere definita come

$$\|B\| = \text{radice quadrata del più grande autovalore di } M^*M. \quad (2.2.10)$$

## 2.3 Spazi commutativi: teorema di Gel'fand-Naimark

Esiste una completa dualità tra spazi topologici ordinari e opportune algebre commutative. Il teorema di Gel'fand-Naimark esprime il fatto che l'algebra  $\mathcal{C}(M)$  delle funzioni a valori complessi su uno spazio topologico compatto  $M$  è l'unica  $C^*$ -algebra commutativa possibile. Data infatti una qualsiasi  $C^*$ -algebra  $\mathcal{C}$  si può ricostruire uno spazio topologico di Hausdorff  $M$  tale che  $\mathcal{C}$  risulti essere l'algebra delle funzioni continue su  $M$ . In altre parole lo studio degli spazi topologici di Hausdorff è equivalente allo studio delle  $C^*$ -algebre visto che queste contengono le stesse informazioni topologiche [24, 23].<sup>‡2</sup>

Consideriamo una  $C^*$ -algebra  $\mathcal{C}$  commutativa. Denotiamo con  $\hat{\mathcal{C}}$  lo *spazio struttura* di  $\mathcal{C}$ , cioè lo spazio delle classi di equivalenza delle rappresentazioni irriducibili di  $\mathcal{C}$ . Se la  $C^*$ -algebra  $\mathcal{C}$  è commutativa ogni sua rappresentazione irriducibile è 1-dimensionale quindi sarà espressa da un funzionale lineare

$$\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall a, b \in \mathcal{C} \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad (2.3.1)$$

---

<sup>‡2</sup>Un secondo teorema di Gel'fand e Naimark che prova l'isomorfismo tra algebre e operatori limitati è riportato in appendice B.

gli elementi di  $\widehat{\mathcal{C}}$  sono detti *caratteri*. Se l'algebra è unitale dalla definizione segue automaticamente che  $\varphi(\mathbb{I}) = 1$ .

Lo spazio  $\widehat{\mathcal{C}}$  diventa uno spazio topologico chiamato spazio di Gel'fand di  $\mathcal{C}$  dotato di topologia di Gel'fand, una topologia di convergenza puntuale su  $\mathcal{C}$ : una sequenza  $\varphi_n \in \widehat{\mathcal{C}}$  converge a  $\varphi \in \widehat{\mathcal{C}}$  se e solo se per ogni  $a \in \mathcal{C}$  la sequenza  $\{\varphi_n(a)\}$  converge a  $\varphi(a)$  nella topologia di  $\mathbb{C}$ . Se l'algebra  $\mathcal{C}$  è dotata di unità,  $\widehat{\mathcal{C}}$  è uno spazio compatto di Hausdorff. Se l'algebra  $\mathcal{C}$  non è dotata di unità,  $\widehat{\mathcal{C}}$  è uno spazio localmente compatto.

Equivalentemente  $\widehat{\mathcal{C}}$  può essere preso come lo spazio *ideale massimale* di  $\mathcal{C}$  invece dello spazio delle rappresentazioni irriducibili. Siccome la  $\mathcal{C}^*$ -algebra  $\mathcal{C}$  è commutativa le due costruzioni coincidono dato che da una parte i kernel (1-dimensionali) di rappresentazioni irriducibili sono ideali massimali e dall'altra ogni ideale massimale è il kernel di una rappresentazione irriducibile [[29] pag 9]. Consideriamo infatti un carattere  $\phi \in \widehat{\mathcal{C}}$ . Siccome  $\mathcal{C} = \ker(\phi) \oplus \mathbb{C}$  l'ideale  $\ker(\phi)$  è di codimensione 1 e quindi è un ideale massimale di  $\mathcal{C}$ . Viceversa supposto che  $\mathcal{I}$  è un ideale massimale di  $\mathcal{C}$ . Allora la rappresentazione naturale di  $\mathcal{C}$  su  $\mathcal{C}/\mathcal{I}$  è irriducibile, quindi 1 dimensionale. Segue che  $\mathcal{C}/\mathcal{I} \cong \mathbb{C}$ , così che l'omomorfismo quoziente  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{I}$  può essere identificato con un elemento  $\phi \in \widehat{\mathcal{C}}$

**Esempio 6.** Prendiamo il caso di algebra commutativa  $\mathcal{C} = \mathbb{C}^2$ ,  $\mathcal{C} \ni a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Una rappresentazione 1-dimensionale  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è

$$\pi(a) = \lambda_1$$

Un esempio di stato  $\phi$  di  $\mathcal{C}$  è

$$\phi(a) = \lambda_1$$

Un esempio di ideale è

$$\mathcal{I} = \left\{ a = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \lambda \end{pmatrix} \right\}$$

Lo spazio topologico allora può essere identificato equivalentemente con lo spazio delle rappresentazioni o con lo spazio ideale massimale: risulterà essere perciò uno spazio topologico di due punti:

$$\bullet \bullet \tag{2.3.2}$$

**Esempio 7.** Possiamo generalizzare l'esempio di sopra al caso di algebra commutativa

$$\mathcal{C} = \mathbb{C}^n, A \ni a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

per cui lo spazio topologico sarà un reticolo a n punti:

$$\bullet \bullet \bullet \dots \bullet \tag{2.3.3}$$

In generale se  $c \in \mathcal{C}$  si può definire la *trasformata di Gel'fand*  $\hat{c}$ , la funzione a valori complessi su  $\hat{\mathcal{C}}$ ,

$$\hat{c}: \varphi \in \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \hat{c}(\varphi) \in \mathbb{C}, \text{ con } \hat{c}(\varphi) = \varphi(c) \tag{2.3.4}$$

è chiaro che  $\hat{c}$  è continua per ogni  $c$ . Possiamo interpretare quindi gli elementi di  $\mathcal{C}$  come funzioni continue su  $\hat{\mathcal{C}}$  con valori in  $\mathbb{C}$ . Il teorema di Gel'fand-Naimark stabilisce che tutte le funzioni continue su  $\hat{\mathcal{C}}$  sono del tipo (2.3.4) per alcuni  $c \in \mathcal{C}$ . Precisamente:

**Teorema 8.** (*Gel'fand Naimark*)

*Sia  $\mathcal{C}$  una  $C^*$ -algebra commutativa. Allora la trasformata di Gel'fand  $c \rightarrow \hat{c}$  è uno \*-isomorfismo isometrico di  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}(\hat{\mathcal{C}})$ ; isometrico significa che*

$$\|\hat{c}\|_\infty = \|c\|, \forall c \in \mathcal{C} \tag{2.3.5}$$

con  $\|\cdot\|_\infty$  la norma del sup su  $\mathcal{C}(\hat{\mathcal{C}})$  come in (2.2.8).

Supponiamo ora che  $M$  sia uno spazio topologico compatto. Come visto nell'esempio 4 possiamo costruire una  $C^*$ -algebra  $\mathcal{C}(M)$ . E' naturale chiedersi allora qual è la relazione tra lo spazio di Gel'fand  $\widehat{\mathcal{C}(M)}$  ed  $M$  stesso. Si può provare che questi due spazi sono identici. Ad ogni  $m \in M$  è associato un omomorfismo  $\phi_m \in \mathcal{C}(M)$  :

$$\phi_m : \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_m(f) = f(m) \tag{2.3.6}$$

che associa a ciascuna funzione il valore della funzione nel punto m. Se  $\mathcal{I}_m = \ker(\phi_m)$ ,

vale a dire l'ideale massimale di  $C(M)$  costituito da tutte le funzioni nulle in  $M$ . Si può allora dimostrare il seguente teorema,

**Teorema 9.** *Il funzionale  $\phi_m$  definito in (2.3.6) è un omeomorfismo di  $M$  in  $\widehat{C(M)}$ . Equivalentemente ogni ideale massimale di  $C(M)$  è uguale a  $\mathcal{I}_m$  per qualche  $m \in M$ .*

Riassumendo, esiste una corrispondenza uno a uno tra gli \*-isomorfismi delle  $C^*$ -algebre e gli omeomorfismi sugli spazi (localmente) compatti di Hausdorff. Infatti questa corrispondenza rappresenta una completa dualità tra la categoria degli spazi (localmente) compatti di Hausdorff e delle trasformazioni continue e la categoria delle  $C^*$ -algebra commutative (non necessariamente) unitale e gli \*-omomorfismi.

Lo schema appena descritto per la ricostruzione di una topologia non può essere immediatamente generalizzato al caso di algebre non commutative  $\mathcal{A}$ . In questo caso infatti esistono più scelte possibili da fare per l'analogo dello spazio topologico  $M$ . Uno è lo spazio di struttura  $\widehat{\mathcal{A}}$  che è lo spazio di tutte le classi di equivalenza delle rappresentazioni irriducibili, l'altro lo spettro primitivo di  $\mathcal{A}$ ,  $\text{Prim}(\mathcal{A})$  che è lo spazio dei kernel delle rappresentazioni irriducibili. Mentre per un'algebra commutativa questi due spazi coincidono, nel caso non commutativo questo non è più vero. Ad esempio  $\widehat{\mathcal{A}}$  può essere uno spazio molto complicato mentre  $\text{Prim}(\mathcal{A})$  consistere di un solo punto.

## 2.4 Fibrati e Moduli

Mentre nella sezione precedente abbiamo mostrato come le algebre (commutative) costituiscono l'analogo di spazi topologici, in questa sezione ci concentreremo sui fibrati vettoriali e vedremo che i loro analoghi algebrici sono i moduli, cioè spazi su cui le rappresentazioni dell'algebra agiscono. L'analogo algebrico di un fibrato vettoriale ha la sua origine nel fatto che un fibrato vettoriale  $E \rightarrow M$  su una varietà  $M$  è completamente caratterizzato dallo spazio  $\mathcal{E} = \Gamma(E, M)$  delle sue sezioni regolari. Siccome l'algebra agisce sulle sezioni del fibrato, lo spazio delle sezioni può essere pensato come un modulo destro sull'algebra  $C^\infty(M)$  delle funzioni regolari su  $M$ . Il teorema di Serre-Swan stabilisce che i fibrati vettoriali complessi su uno spazio compatto di Hausdorff  $M$  corrispondono a moduli proiettivi finiti sull'algebra  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ . Al fibrato vettoriale  $E$  si associa il  $C^\infty(M)$ -modulo  $\mathcal{E} = \Gamma(M, E)$  delle sezioni regolari di  $E$ . Viceversa se  $\mathcal{E}$  è un modulo proiettivo finito sull'algebra  $C^\infty(M)$  la fibra  $E_m$  del fibrato associato  $E$  sul punto  $m \in M$  è  $E_m = \mathcal{E}/\mathcal{E}\mathcal{I}_m$  dove l'ideale  $\mathcal{I}_m \subset C(M)$  è dato da  $\mathcal{I}_m = \{f \in C^\infty(M) \mid f(m) = 0\}$ .

### 2.4.1 Fibrati vettoriali

Un fibrato vettoriale [25] è una costruzione che associa ad ogni punto di una varietà topologica (o differenziabile) uno spazio vettoriale (generalmente reale o complesso). Si tratta quindi di un particolare fibrato, la cui fibra ha una struttura di spazio vettoriale. Ad ogni punto  $m$  di uno spazio  $M$  associamo uno spazio vettoriale  $V(m)$  in modo tale che questi due spazi vettoriali messi insieme formano un altro spazio vettoriale della stessa struttura di  $M$  (può essere uno spazio topologico, una varietà, etc.) che sarà chiamato fibrato vettoriale su  $M$ .

**Definizione 10.** Un *fibrato vettoriale reale* consiste di:

1. Uno spazio topologico  $M$  (spazio di base) e uno spazio topologico  $E$  (spazio totale).
2. Una funzione continua suriettiva  $\pi$  detta proiezione:

$$\pi : E \rightarrow M \tag{2.4.1}$$

3. La controimmagine  $\pi^{-1}(m)$  detta anche *fibra* di un punto  $m \in M$  è dotata di una struttura di spazio vettoriale reale
4. Si chiede inoltre che questa struttura vari in modo continuo al variare di  $m$ . Questa richiesta è formalizzata chiedendo che la proiezione risulti almeno localmente un prodotto. Più precisamente, per ogni punto  $m$  di  $M$  esiste un intorno aperto  $U_m \equiv U(m) \subset M$ , un numero naturale  $k$  e un omeomorfismo  $\phi_m$ ,

$$\phi_m : U_m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U_m) \tag{2.4.2}$$

tale che per ogni  $x \in U_m$  e per ogni  $v \in \mathbb{R}^k$ :

$$\pi \circ \phi_m(x, v) = x$$

la trasformazione  $v \rightarrow \phi_m(x, v)$  risulti un isomorfismo tra gli spazi vettoriali  $\mathbb{R}^k$  e  $\pi^{-1}(x)$ .

L'intorno aperto  $U$  insieme all'omeomorfismo  $\phi$  è detto *trivializzazione locale* del fibrato vettoriale. La trivializzazione locale mostra che localmente la trasformazione  $\pi$  si comporta come la proiezione di  $U \times \mathbb{R}^k$  su  $U$ .

Dato un fibrato vettoriale  $\pi : E \rightarrow M$  si definisce *sezione* una trasformazione regolare  $s : M \rightarrow E$  che soddisfa  $\pi \circ s = \text{identità}_M$ . Essenzialmente una sezione assegna in

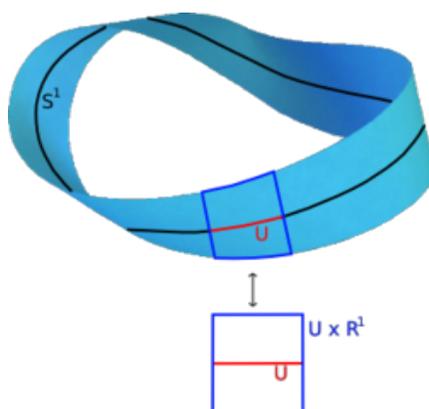


Figura 2.4.1: Esempio di fibrato vettoriale non banale su una circonferenza: il nastro di Möbius

maniera continua a ciascun punto della varietà  $M$  un vettore dello spazio vettoriale che è stato “attaccato” a quel punto. L’insieme di tutte le sezioni su  $M$  è denotato con  $\Gamma(M, E)$ .

**Esempio 11.** L’esempio più semplice è la famiglia degli spazi vettoriali costanti quando si ha per ogni punto  $m$  in  $M$  un vettore  $V(m) = V = cost$ . In questo caso c’è una copia di  $V$  per ogni punto  $m$  di  $M$  e queste copie insieme allo spazio di partenza formano lo spazio vettoriale  $M \times V$  su  $M$ . Un esempio più complicato di fibrato vettoriale è il fibrato tangente di una varietà differenziabile: a ogni punto della varietà si associa lo spazio tangente alla varietà in quel punto. Un altro esempio è il nastro di Mobius in cui lo spazio di base è la circonferenza  $M = S^1$ , la fibra è  $U \times \mathbb{R}$  quindi localmente, nell’intorno  $U$  di ciascun punto di  $S^1$ , il nastro assomiglia allo spazio  $U \times \mathbb{R}$  ma globalmente il fibrato è totalmente diverso da  $S^1 \times \mathbb{R}$  ( che è un cilindro ).

### 2.4.2 Moduli

Diamo una breve introduzione sulla teoria dei moduli descrivendo cosa sono i moduli proiettivi finiti (destri e sinistri) su un’algebra  $\mathcal{A}$  e vedendone le principali proprietà [18].

**Definizione 12.** Sia  $\mathcal{A}$  un’algebra su  $\mathbb{C}$ . Uno spazio vettoriale  $\mathcal{E}$  su  $\mathbb{C}$  si definisce modulo sinistro su  $\mathcal{A}$  se,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{E} \ni (a, \eta) &\rightarrow a\eta \in \mathcal{E} \\ ab(\eta) = a(b\eta), \quad (a + b)\eta &= a\eta + b\eta, \quad a(\eta + \xi) = a\eta + a\xi \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

per ogni  $\eta, \xi \in \mathcal{E}$  e  $a, b \in \mathcal{A}$ .

Quindi di fatto un modulo è uno spazio sul quale l'algebra agisce. Siccome l'azione di un operatore può avvenire anche da destra si può definire equivalentemente un modulo destro su  $\mathcal{A}$  definito dalle proprietà

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{A} \ni (\eta, a) &\rightarrow \eta a \in \mathcal{E} \\ (\eta)ab &= (\eta a)b, \quad \eta(a+b) = \eta a + \eta b, \quad (\eta + \xi)a = \eta a + \xi a \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

per ogni  $\eta, \xi \in \mathcal{E}$ ;  $a, b \in \mathcal{A}$ .

Un *bimodulo* sull'algebra  $\mathcal{A}$  è uno spazio vettoriale  $\mathcal{E}$  che contiene entrambe le rappresentazioni, destra e sinistra, e che risultino compatibili,

$$(a\eta)b = a(\eta b), \quad \forall \eta \in \mathcal{E}, \quad a, b \in \mathcal{A} \quad (2.4.5)$$

Una collezione  $\{e_n\}$  è una *famiglia generatrice* per il modulo destro  $\mathcal{E}$  se ogni elemento di  $\mathcal{E}$  può essere scritto come una combinazione finita del tipo:

$$\sum_n e_n a_n \quad (2.4.6)$$

con  $a_n \in \mathcal{A}$ . La famiglia  $\{e_n\}$  si dice *libera* se costituita da elementi linearmente indipendenti. Una base per il modulo  $\mathcal{E}$  è una *famiglia generatrice libera* tale che ogni elemento  $\eta \in \mathcal{E}$  può essere scritto unicamente come combinazione  $\sum_n e_n a_n$ . Un modulo è detto *libero* se contiene una base e *finito* se contiene una famiglia generatrice di cardinalità finita.

**Definizione 13.** Un modulo destro  $\mathcal{E}$  di  $\mathcal{A}$  è proiettivo se soddisfa una delle seguenti equivalenti proprietà:

1.  $\mathcal{E}$  è un addendo di un modulo libero, vale a dire esiste un modulo libero  $\mathcal{F}$  e un modulo  $\mathcal{E}'$  (che risulterà anche esso proiettivo) tale che:

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \quad (2.4.7)$$

2. Dati  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  moduli destri su  $\mathcal{A}$  e un omomorfismo suriettivo tra di essi  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , esiste un omomorfismo  $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}$  che può essere liftato ad un omomorfismo  $\tilde{\lambda} :$

$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  tale che  $\rho \circ \tilde{\lambda} = \lambda$ .

$$\begin{array}{ccc}
 id : \mathcal{M} & \longleftrightarrow & \mathcal{M} \\
 \tilde{\lambda} \uparrow & & \downarrow \rho \\
 \lambda : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\
 & & \rho \circ \tilde{\lambda} = \lambda
 \end{array} \tag{2.4.8}$$

Sebbene la definizione di modulo proiettivo finito può sembrare un qualcosa di abbastanza oscuro, da essa discende una caratterizzazione molto semplice. Per certi versi i moduli proiettivi finiti possono essere visti come matrici con elementi nell'algebra  $\mathcal{A}$ . Supponiamo infatti che  $\mathcal{E}$  risulti un bimodulo proiettivo finito con una funzione suriettiva  $\rho : \mathcal{A}^N \rightarrow \mathcal{E}$  dove  $\mathcal{A}^N$  è lo spazio dei vettori  $N$ -dimensionali con elementi in  $\mathcal{A}$ , anche esso modulo su  $\mathcal{A}$ . Dalla definizione (2.4.8) possiamo costruire un lift  $\tilde{\lambda} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}^N$  tale che:

$$\begin{array}{ccc}
 id : \mathcal{A}^N & \longleftrightarrow & \mathcal{A}^N \\
 \tilde{\lambda} \uparrow & & \downarrow \rho \\
 id : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\
 & & \rho \circ \tilde{\lambda} = id_{\mathcal{E}}
 \end{array} \tag{2.4.9}$$

Possiamo poi costruire un operatore idempotente  $p \in \text{End}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^N \simeq \mathbb{M}_N(\mathcal{A})$  (algebra delle matrici  $N \times N$  con elementi in  $\mathcal{A}$ ) dato da

$$p = \tilde{\lambda} \circ \rho. \tag{2.4.10}$$

Infatti da (2.4.9)  $p^2 = \tilde{\lambda} \circ \rho \circ \tilde{\lambda} \circ \rho = \tilde{\lambda} \circ \rho = p$ . L'operatore idempotente  $p$  consente di decomporre il modulo libero  $\mathcal{A}^N$  in una somma diretta di sottomoduli,

$$\mathcal{A}^N = p\mathcal{A}^N \oplus (\mathbb{I} - p)\mathcal{A}^N \tag{2.4.11}$$

e in questo modo  $\rho$  e  $\tilde{\lambda}$  sono isomorfismi, uno l'inverso dell'altro, tra  $\mathcal{E}$  e  $p\mathcal{A}^N$ . Il modulo  $\mathcal{E}$  risulta perciò proiettivo e di tipo finito se e solo se esiste un operatore idempotente  $p \in \mathbb{M}_N(\mathcal{A})$ ,  $p^2 = p$ , tale che  $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^N$ . La definizione data di modulo proiettivo finito consente cioè di costruire un isomorfismo, e quindi identificare  $\mathcal{E}$  e  $p\mathcal{A}^N$ . Possiamo quindi

pensare agli elementi di  $\mathcal{E}$  come vettori colonna con elementi in  $\mathcal{A}$ , invarianti sotto l'azione di  $p$ ,

$$\mathcal{E} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N); \xi \in \mathcal{A}, p\xi = \xi\}. \quad (2.4.12)$$

Il collegamento cruciale tra moduli proiettivi finiti e fibrati vettoriali è stabilito dal teorema di Serre-Swan [20, 19] come già accennato all'inizio:

**Teorema 14.** (*Serre-Swan*)

*Data una varietà compatta finito dimensionale  $M$ . Un modulo  $\mathcal{E}$  sull'algebra  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  è isomorfo al modulo  $\Gamma(E, M)$  delle sezioni regolari di un fibrato  $E \rightarrow M$ , se e solo se  $\mathcal{E}$  è un modulo proiettivo finito.*

Questo teorema venne prima provato per la categoria delle funzioni e sezioni continue e successivamente esteso al caso di funzioni e sezioni regolari [21]. Esso afferma che se  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  allora esiste un numero intero  $N$  ed un operatore idempotente  $p \in \mathbb{M}_N(\mathcal{A})$  tale che il modulo  $\Gamma(E, M)$  si scrive come  $\Gamma(E, M) = p\mathcal{A}^N$ .

### 2.4.3 Moduli di Hilbert

La teoria dei moduli di Hilbert è una generalizzazione della teoria degli spazi di Hilbert e costituisce il riferimento naturale per lo studio dei moduli su una  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  dotata di un prodotto interno hermitiano.

**Definizione 15.** Un modulo destro pre-Hilbertiano sull'algebra  $\mathcal{A}$  è un modulo destro  $\mathcal{E}$  dotato di una struttura hermitiana a valori in  $\mathcal{A}$ , vale a dire una forma sesquilineare  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$  antilineare nella prima variabile e tale che,

$$\begin{aligned} \langle \eta_1, \eta_2 a \rangle_{\mathcal{A}} &= \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\mathcal{A}} a \\ \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\mathcal{A}}^* &= \langle \eta_2, \eta_1 \rangle_{\mathcal{A}} \\ \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{A}} &\geq 0, \quad \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow \eta = 0, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

per ogni  $\eta_1, \eta_2, \eta \in \mathcal{E}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Il pedice  $\cdot_{\mathcal{A}}$  serve a ricordare che il prodotto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un elemento di  $\mathcal{A}$ .

Si definisce la norma di un elemento  $\eta \in \mathcal{E}$  come:

$$\|\eta\|_{\mathcal{A}} \equiv \sqrt{\|\langle \eta, \eta \rangle\|} \quad (2.4.14)$$

che si può verificare rispetta tutte le proprietà di una norma (2.2.4).

**Definizione 16.** Un modulo destro di Hilbert su  $\mathcal{A}$  è un modulo destro pre-Hilbertiano  $\mathcal{E}$  che risulti completo nella norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ . Dato un modulo di Hilbert  $\mathcal{E}$  su  $\mathcal{A}$ , con  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}$ , la chiusura dello span lineare  $\{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\mathcal{A}}\}$  vale a dire la chiusura dell'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi  $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\mathcal{A}}$ , risulta essere un ideale in  $\mathcal{A}$ . Se questo ideale coincide con l'intero  $\mathcal{A}$  il modulo  $\mathcal{E}$  si dice *completo*.

**Esempio 17.** *Modulo di Hilbert  $\mathcal{A}$ .* La  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  può essere resa essa stessa un modulo di Hilbert considerandola come modulo destro su se stessa e prendendo la seguente struttura Hermitiana,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad \langle a, b \rangle_{\mathcal{A}} \equiv a^*b, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}. \quad (2.4.15)$$

La norma corrispondente coincide con la norma di  $\mathcal{A}$  siccome dalla proprietà della norma (2.2.7),  $\|a\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{\|\langle a, a \rangle_{\mathcal{A}}\|} = \sqrt{\|a\|^2} = \|a\|$ .

Consideriamo ad esempio il caso di algebra di funzioni continue  $\mathcal{A} = C(M)$ . Se dotata di un prodotto interno del tipo,

$$\langle a, b \rangle(x) = a^*(x)b(x) \quad (2.4.16)$$

essa risulterà essere un modulo di Hilbert.

**Esempio 18.** *Modulo di Hilbert  $\mathcal{A}^N$ .* Considerando  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}^N$  con il seguente prodotto interno e la seguente azione da destra:

$$\begin{aligned} \langle (a_1, \dots, a_n), (b, \dots, b_n) \rangle_{\mathcal{A}} &\equiv \sum_k a_k^* b_k \\ (a_1, \dots, a_n)a &\equiv (a_1 a, \dots, a_n a) \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

per ogni  $a, a_k, b_k \in \mathcal{A}$ . La norma corrispondente è

$$\|(a_1, \dots, a_n)\|_{\mathcal{A}} \equiv \left\| \sum_k a_k^* a_k \right\| \quad (2.4.18)$$

La completezza di  $\mathcal{A}^N$  nella norma è conseguenza della completezza di  $\mathcal{A}$  rispetto alla sua norma.

**Esempio 19.**  $\Gamma(E, M)$  sezioni di un fibrato vettoriale complesso. Prendiamo  $\mathcal{A} = C(M)$  algebra delle funzioni continue a valori complessi sullo spazio compatto di Hausdorff  $M$ . La norma è la norma del sup come nell'esempio 5. Dato un fibrato vettoriale complesso  $E \rightarrow M$ , la collezione  $\Gamma(E, M)$  delle sue sezioni continue è un modulo su  $C(M)$ . Questo

modulo è reso un modulo di Hilbert se il fibrato è dotato di una struttura Hermitiana, vale a dire un prodotto scalare Hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_p} : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{C}$  su ciascuna fibra  $E_p$ . La struttura Hermitiana, a valori in  $C(M)$ , su  $\Gamma(E, M)$  è data da:

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle(p) = \langle \eta_1(p), \eta_2(p) \rangle_{E_p}, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in \Gamma(E, M), \quad p \in M \quad (2.4.19)$$

Diamo ora la definizione di equivalenza di Morita [26] tra due  $C^*$ -algebre.

**Definizione 20.** (*Equivalenza di Morita*)

Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  due  $C^*$ -algebra. Diremo che le due algebre sono Morita equivalenti se esiste un modulo di Hilbert  $\mathcal{E}$  che è allo stesso tempo un modulo di Hilbert destro su  $\mathcal{A}$  con una struttura Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ , e un modulo di Hilbert sinistro su  $\mathcal{B}$  con struttura Hermitiana a valori in  $\mathcal{B}$   $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$  tale che:

1. Il modulo di Hilbert  $\mathcal{E}$  è completo sia come modulo destro che sinistro;
2. Le strutture Hermitiane sinistra e destra sono compatibili tra loro:

$$\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{B}} \chi = \eta \langle \xi, \chi \rangle_{\mathcal{A}}, \quad \forall \eta, \xi, \chi \in \mathcal{E}; \quad (2.4.20)$$

3. La rappresentazione sinistra di  $\mathcal{B}$  su  $\mathcal{E}$  è una rappresentazione continua di operatori limitati rispetto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$  cioè  $\langle b\eta, b\eta \rangle_{\mathcal{A}} \leq \|b\|^2 \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{A}}$ . Analogamente la rappresentazione destra di  $\mathcal{A}$  su  $\mathcal{E}$  è una rappresentazione continua di operatori limitati per  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$  cioè  $\langle \eta a, \eta a \rangle_{\mathcal{B}} \leq \|a\|^2 \langle \eta, \eta \rangle_{\mathcal{B}}$ .

**Esempio 21.** Un esempio che si può dare di algebre Morita equivalenti sono  $\mathcal{A} = \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$  e  $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ . Il bimodulo  $\mathbb{M}_N(\mathbb{C}) - \mathbb{C}$  è dato da  $\mathcal{E} = \mathbb{C}^N$ . L'azione sinistra di  $\mathbb{M}_N(\mathbb{C})$  su  $\mathcal{E}$  è l'usuale azione matriciale su un vettore, mentre  $\mathbb{C}$  agisce da destra per ogni componente del vettore.:

$$\begin{aligned} ub &= (\bar{u}_1 b, \dots, \bar{u}_N b) \\ au &= a_{ij} u_j \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

con  $u \in \mathbb{C}^N$ ,  $a \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$ ,  $b \in \mathbb{C}$ . I prodotti Hermitiani tra due vettori qualsiasi  $u, v \in \mathcal{E} = \mathbb{C}^N$  sono

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} &\equiv \sum_i \bar{u}_i v_i \\ \langle u, v \rangle_{\mathbb{M}_N(\mathbb{C})} &\equiv |u\rangle \langle v| = \bar{u}_i v_j \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

da cui è facile verificare la relazione (2.4.20):

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{M}_N(\mathbb{C})} w = u \langle v, w \rangle_{\mathbb{C}} \quad (2.4.23)$$

in termini di componenti infatti le due espressioni si scrivono ugualmente  $\sum_j \bar{u}_i v_j w_j$ .

In conclusione gli spazi sono descritti dai campi, e i fibrati vettoriali sono descritti da algebre di matrici che agiscono su vettori, che nel linguaggio della fisica sono i campi non abeliani.

## Capitolo 3

# NCG: geometria spettrale di Connes

In questo capitolo introdurremo le tecniche principali della geometria spettrale di Connes che è la generalizzazione al caso non commutativo dell'usuale geometria di spin su una varietà Riemanniana, in particolare introducendo il concetto di Tripla Spettrale, cuore della geometria non commutativa. Dopo aver mostrato l'analogia esistente tra operatori compatti e infinitesimi introdurremo la traccia di Dixmier come generalizzazione algebrica della usuale integrazione e studieremo le proprietà di un operatore, detto operatore di Dirac, che consente di implementare le strutture metriche. Daremo la definizione di tripla spettrale e con essa costruiremo il calcolo differenziale. Con il calcolo differenziale implementeremo infine le teorie di gauge che permettono la formulazione algebrica del Modello Standard. Sottolineiamo che ci concentreremo in particolare sul modello di Connes-Lott in cui l'azione bosonica è costruita con il quadrato della curvatura, tralasciando per ora la nuova teoria dell'azione spettrale di Connes-Chamseddine cui accenneremo alla fine del prossimo capitolo. Benchè meno potente da un punto di vista predittivo il modello di Connes-Lott consente di cogliere svariati aspetti delle teorie di gauge legati alle simmetrie dei sistemi fisici e rivela quindi un notevole interesse.

### 3.1 Operatori compatti e Infinitesimi

Vediamo alcune proprietà fondamentali degli operatori compatti. Indichiamo con  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  e  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  rispettivamente le  $C^*$ -algebre degli operatori compatti e limitati su  $\mathcal{H}$ . Ricordiamo [1] che un operatore è di *rango finito* se il complemento ortogonale del kernel è finito dimensionale. Essenzialmente possiamo pensare a un tale operatore come

una matrice finito dimensionale anche se lo spazio di Hilbert è di dimensione infinita. Un operatore  $T$  su  $\mathcal{H}$  è *compatto* se può essere approssimato nella norma da operatori di rango finito. Una possibile caratterizzazione di un operatore compatto  $T$  è la seguente:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \text{ un sottospazio finito dimensionale } E \subset \mathcal{H} \text{ con } \|T_{E^\perp}\| < \epsilon. \quad (3.1.1)$$

L'algebra  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  degli operatori compatti è l'ideale massimale dell'algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Non è un'algebra unitale siccome l'operatore  $\mathbb{I}$  su uno spazio di Hilbert infinito dimensionale non è compatto. E' inoltre possibile dimostrare le seguenti proposizioni:

**Proposizione 22.** *Sia  $T$  un operatore compatto e autoaggiunto su  $\mathcal{H}$ . Allora esiste in  $\mathcal{H}$  una base completa ortonormale  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che*

$$T\phi_n = \lambda_n \phi_n \text{ con } \lambda_n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.1.2)$$

**Proposizione 23.** *Sia  $T$  un operatore compatto su  $\mathcal{H}$  e  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  insiemi ortonormali in  $\mathcal{H}$ . Allora  $T$  ammetterà un'espansione uniformemente convergente (nella norma),*

$$T = \sum_{n \geq 0} \mu_n(T) |\psi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (3.1.3)$$

con  $0 \leq \mu_{j+1} \leq \mu_j$ .

Da qui allora possiamo scrivere la decomposizione polare di  $T = U|T|$  con  $|T| = \sqrt{T^*T}$ . Allora il set  $\{\mu_n(T)\}$  è costituito da gli autovalori non nulli dell'operatore (compatto e autoaggiunto)  $|T|$ ;  $\{\phi_n\}$  sono i corrispondenti autovettori e  $\psi_n = U\phi_n$ . Gli autovalori  $\{\mu_n(T)\}$  sono i *valori caratteristici di  $T$* , con  $\mu_0(T) = \|T\|$ .

Dalla condizione (3.1.1) gli operatori compatti in un certo senso sono “piccoli” e giocheranno quindi il ruolo degli infinitesimi della teoria. La dimensione di un infinitesimo  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  è determinata dalla velocità con cui va a zero la successione dei suoi autovalori  $\mu_n(T)$  per  $n \rightarrow \infty$ .

**Definizione 24.** Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  un *infinitesimo di ordine  $\alpha$*  è un operatore  $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

tale che

$$\begin{aligned} \mu_n(T) &= O(n^{-\alpha}), \text{ per } n \rightarrow \infty, \\ \text{cioè} \quad \exists C < \infty : \frac{\mu_n(T)}{n^\alpha} &\leq C, \forall n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

### 3.2 Traccia di Diximer

Come nel calcolo differenziale ordinario è necessario definire un “integrale” che tenga conto degli infinitesimi di ordine maggiore di uno. In geometria non commutativa questo avviene con la traccia di Diximer che è costruita in modo tale che gli infinitesimi di ordine uno risultino appartenenti al dominio della traccia mentre gli infinitesimi di ordine maggiore risultino nulli. La traccia usuale non è appropriata. Indicando con  $\mathcal{L}^1$  l’ideale doppio degli operatori a traccia ben definita, risulta che per ogni  $T \in \mathcal{L}^1$ ,

$$\text{tr}(T) \equiv \sum_n \langle T\xi_n, \xi_n \rangle, \quad (3.2.1)$$

è indipendente dalla particolare base ortonormale  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , coincidendo infatti la somma degli autovalori di  $T$ . Quando l’operatore è positivo e compatto si ha che  $\text{tr}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)$ . In generale un infinitesimo di ordine 1 non appartiene a  $\mathcal{L}^1$  siccome l’unico controllo sugli autovalori è che esiste una costante  $C$   $|\mu_n(T) \leq C k^{-1}$ . Inoltre  $\mathcal{L}^1$  contiene anche gli infinitesimi di ordine maggiore di 1. Tuttavia per gli infinitesimi di ordine maggiore di 1 la traccia (3.2.1) è al più logaritmicamente convergente,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) \leq C \ln N \quad (3.2.2)$$

La traccia di Diximer permetterà semplicemente di estrarre il coefficiente della divergenza logaritmica [2].

Indichiamo con  $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$  l’ideale degli infinitesimi di ordine 1. Se  $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$  è positivo si può provare a definire un funzionale positivo prendendo il limite

$$\text{tr}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln N} \sum_0^{N-1} \mu_n(T). \quad (3.2.3)$$

La formula (3.2.3) presenta però due problemi: la non linearità e la non convergenza. Per superare questi ostacoli si definisce allora la traccia di Dixmer:

$$\mathrm{tr}_\omega(T) = \lim_\omega \frac{1}{\ln N} \sum_0^{N-1} \mu_n(T) \quad (3.2.4)$$

$\forall T \geq 0, T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ . L'argomento del limite (3.2.4) viene di solito indicato con  $\gamma_N(T) \equiv \frac{1}{\ln N} \sum_0^{N-1} \mu_n(T)$ .

Dixmer [3, 2] ha dimostrato infatti che esiste una *forma lineare invariante di scala*  $\lim_\omega$  definita sullo spazio delle successioni limitate  $l^\infty(\mathbb{N})$ , ossia:

1.  $\lim_\omega \{\gamma_N\} \geq 0$ , se  $\gamma_N \geq 0$ .
2.  $\lim_\omega \{\gamma_N\} = \lim \{\gamma_N\}$ , se  $\{\gamma_N\}$  è una successione convergente con limlimite usuale.
3.  $\lim_\omega \{\gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3, \dots\} = \lim_\omega \{\gamma_N\}$ .
4.  $\lim_\omega \{\gamma_{2N}\} = \lim_\omega \{\gamma_N\}$  (Invarianza di Scala).

le cui proprietà assicurano la linearità e la convergenza della (3.2.4).

In molti esempi di interesse fisico come le teorie di Yang-Mills e la Gravitazione la sequenza  $\{\gamma_N\}$  è convergente. In questi casi, e più in generale ogni qual volta si ha a che fare con spazi  $\mathcal{H}$  finito dimensionale, il limite della (3.2.4) è il limite usuale e non dipende da  $\omega$ , quindi resta definita la traccia ordinaria.

### 3.3 Triple spettrali

Illustriamo l'ingrediente fondamentale introdotto da Connes per sviluppare l'analogo del calcolo differenziale per le algebre non commutative. Cominciamo con il dare la definizione di tripla spettrale [3].

**Definizione 25.** Una *tripla spettrale*  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  è costituita da un'algebra involutiva  $\mathcal{A}$  di operatori limitati su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  e da un operatore autoaggiunto  $D = D^*$  su  $\mathcal{H}$  aventi le seguenti proprietà:

1. Il risolvente  $(D - \lambda)^{-1}$ ,  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , è un operatore compatto su  $\mathcal{H}$ ;
2.  $[D, a] \equiv Da - aD \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall a \in \mathcal{A}$ .

La tripla spettrale è detta *pari* se  $\mathcal{H}$  è dotato di una gradazione- $\mathbb{Z}_2$  cioè se esiste un operatore *chiralità*  $\gamma$  su  $\mathcal{H}$ ,  $\gamma = \gamma^*$ ,  $\gamma^2 = 1$ , tale che

$$\begin{aligned}\gamma D + D\gamma &= 0, \\ \gamma a - a\gamma &= 0, \forall a \in \mathcal{A}\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Se  $\mathcal{H}$  è pari allora è possibile decomporre

$$\mathcal{H} = \frac{(1 + \gamma)}{2} \mathcal{H} \oplus \frac{(1 - \gamma)}{2} \mathcal{H} = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R\tag{3.3.2}$$

Per semplicità assumeremo che  $D$  sia invertibile: dalla prima condizione si ha che lo spettro dell'operatore autoaggiunto  $D$  è discreto e reale con ciascun autovalore di molteplicità finita. Inoltre  $|\lambda_k| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Infatti siccome  $(D - \lambda)^{-1}$  è compatto allora avrà autovalori  $\mu_k((D - \lambda)^{-1}) \rightarrow 0$  da cui  $|\lambda_k| = \mu_k(|D|) \rightarrow \infty$ . Come vedremo l'operatore  $D$  è una generalizzazione dell'operatore di Dirac su un'ordinaria varietà di spin, perciò lo chiameremo operatore di Dirac.

### 3.3.1 Integrazione e Metrica

L'operatore di Dirac  $D$  consente di implementare sull'algebra sia una struttura metrica che un'integrazione.

Una tripla spettrale  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  ha *dimensione*  $n$  se  $|D|^{-1}$  è un infinitesimo di ordine  $1/n$  e quindi l'operatore  $|D|^{-n}$  è un operatore di ordine 1. Data allora una tripla spettrale  $n$ -dimensionale l'integrale su  $\mathcal{A}$  è definito tramite traccia di Dixmier:

$$\int a \equiv \text{tr}_\omega(a|D|^{-n}).\tag{3.3.3}$$

Il ruolo dell'operatore  $|D|^{-n}$  è quello di portare l'operatore limitato  $a$  nello spazio  $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$  in modo che la traccia di Dixmier abbia senso.

L'operatore  $|D|^{-n}$  può essere visto come una sorta di forma volume dello spazio, utile a definire la misura su  $\mathcal{A}$ . Infatti dal comportamento degli autovalori di  $|D|^{-n}$  tali che  $\mu_j \leq C j^{-1}$  per  $j \rightarrow \infty$  si ha che l'integrale dell'identità è uguale alla costante  $C$ ,

$$\int \mathbb{I} = \text{tr}_\omega |D|^{-n} = \lim_N \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j(|D|^{-n}) = \lim_N \sum_{j=1}^{N-1} C \frac{1}{j} = C\tag{3.3.4}$$

e quindi interpretando  $C$  come volume dello spazio si capisce perché  $|D|^{-n}$  può essere visto come forma volume. Si può dimostrare che l'integrale (3.3.3) è una traccia normalizzata e

non negativa su  $\mathcal{A}$  [28].

Ricordiamo dalla sezione 2.3 che a partire da un'algebra è possibile costruire uno spazio topologico, identificato con lo spazio di struttura di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ . La metrica su tale spazio sarà definita come [9],

$$d(\phi, \chi) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \{|a(\phi) - a(\chi)| : \|[D, a]\| \leq 1\}, \quad \forall \phi, \chi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}). \quad (3.3.5)$$

Vediamo quindi che l'operatore di Dirac influenza la metrica e la misura dello spazio in esame. Vediamo, nel seguito, un'applicazione che ne chiarisca il significato.

**Esempio 26.** (*Spazio a due punti*)

Consideriamo  $\mathcal{A} = \mathbb{C}^2 \ni a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . L'operatore di Dirac sarà  $D = \begin{pmatrix} 0 & m \\ \bar{m} & 0 \end{pmatrix}$  con  $\bar{m}$  complesso coniugato di  $m \in \mathbb{C}$ . E' facile calcolare il commutatore  $[D, a]$ ,

$$[D, a] = (\lambda_2 - \lambda_1) \begin{pmatrix} 0 & m \\ \bar{m} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

La norma  $\|[D, a]\| \leq 1$  definita come la radice quadrata dell'autovalore più grande della matrice  $[D, a]^\dagger [D, a]$

$$\|[D, a]\| = [D, a]^\dagger [D, a] = |m|^2 |\lambda_2 - \lambda_1|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.7)$$

è data quindi da  $\|[D, a]\| = |m| |\lambda_2 - \lambda_1| \leq 1 \Rightarrow |\lambda_2 - \lambda_1| \leq |\frac{1}{m}|$ .

Lo spazio topologico  $Y$  è costituito da due soli stati,  $Y = 1, 2$  definiti come: e

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= \lambda_1 \\ 2 \cdot a &= \lambda_2 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

e avranno distanza

$$\begin{aligned} d(1, 2) &= \sup\{|1(a) - 2(a)| : \|[D, a]\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\lambda_1 - \lambda_2| : |\lambda_1 - \lambda_2| \leq |\frac{1}{m}|\} \\ &= |\frac{1}{m}|. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Da cui è immediato osservare in che modo la metrica dello spazio  $Y$  è influenzata dall'operatore  $D$ . Infatti se  $m \rightarrow \infty \Rightarrow d(1, 2) \rightarrow 0$  e cioè i punti coincidono; se  $m \rightarrow 0 \Rightarrow d(1, 2) \rightarrow \infty$  cioè i punti sono infinitamente distanti.

Per l'integrazione abbiamo:

$$\int a = \text{tr}(a|D|^{-n}) \quad (3.3.10)$$

con  $|D| = \sqrt{D^\dagger D} = \begin{pmatrix} |m| & 0 \\ 0 & |m| \end{pmatrix}$ , quindi

$$\int a = \text{tr}(a|D|^{-n}) = \text{tr} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{|m|^n} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{|m|^n} \end{pmatrix} = \frac{1}{|m|^n} \text{tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|m|^n} (\lambda_1 + \lambda_2) \quad (3.3.11)$$

Quindi anche la misura su  $Y$  è influenzata dalla scelta dell'operatore  $D$ .

### 3.3.2 Tripla Canonica su una varietà

Un esempio importante di tripla spettrale è la *tripla canonica* su una varietà di spin Riemanniana  $(M, g)$  dove  $g$  rappresenta la metrica. Ricordiamo che una varietà di spin è una varietà su cui è possibile costruire fibrati principali aventi come gruppi di struttura i gruppi  $Spin(n)$ . Per capire meglio cosa si intende per *varietà di spin* rimandiamo al paragrafo 1.7.1.

**Definizione 27.** La tripla canonica  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  sulla varietà di spin  $n$ -dimensionale  $M$  è definita come:

1.  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  è l'algebra delle funzioni differenziabili su  $M$  con valori in  $\mathbb{C}$ .
2.  $\mathcal{H} = L^2(M, S)$  è lo spazio di Hilbert degli spinori  $\psi$  quadrato integrabili su  $M$ . Il prodotto scalare in  $L^2(M, S)$  è quello usuale della misura associata alla metrica  $g$ ,

$$(\psi, \phi) = \int d\mu(g) \bar{\psi}(x) \phi(x) = \int dx \sqrt{-g} \bar{\psi}(x) \phi(x) \quad (3.3.12)$$

dove la barra indica la complessa coniugazione.

3.  $D$  è l'operatore di Dirac associato alla connessione di Levi-Civita  $\omega = dx^\mu \omega_\mu$  della metrica  $g$ .

Gli operatori  $f$  dell'algebra  $\mathcal{A}$  agiscono come moltiplicazione su  $\mathcal{H}$ ,

$$(f\psi)(x) \equiv f(x)\psi(x), \quad \forall f \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{H} \quad (3.3.13)$$

Siano  $(e_a^\mu, a = 1, 2, \dots, n)$  le  $n$  componenti degli  $n$ -beins definiti in ogni punto di  $M$  e  $(\partial_\mu, \mu = 1, 2, \dots, n)$  la base naturale definita sulla varietà  $M$  in modo tale che le componenti delle metrica curva  $\{g^{\mu\nu}\}$  e piatta  $\{\eta^{ab}\}$  siano legate dalle relazioni

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab}, \quad \eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}. \quad (3.3.14)$$

Sia  $Cl(M)$  il fibrato di Clifford su  $M$  la cui fibra in  $x \in M$  non è altro che l'algebra complessificata di Clifford  $Cl_{\mathbb{C}}(T_x^*M)$  e indichiamo con  $\Gamma(M, Cl(M))$  il modulo delle corrispondenti sezioni. Esiste uno \*-morfismo tra algebre

$$\begin{aligned} \gamma : \Gamma(M, Cl(M)) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \\ \gamma(dx^\mu) &\equiv \gamma^\mu(x) = \gamma^a e_a^\mu, \quad \mu = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Le matrici gamma curve e piatte  $\{\gamma^\mu(x)\}$  e  $\{\gamma^a\}$  obbediscono le relazioni

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} &= 2g^{\mu\nu}(x) \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n \\ \{\gamma^a, \gamma^b\} &= 2\eta^{ab} \quad a, b = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

L'operatore di Dirac definito come

$$D \equiv -i\gamma \circ \nabla^s \quad (3.3.17)$$

può essere scritto localmente come:

$$D = \gamma^\mu(x) (\partial_\mu + \omega_\mu^S) = \gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu^S) \quad (3.3.18)$$

dove il lift  $\nabla^s$  della connessione di Levi-Civita sul fibrato degli spinori è dato da:

$$\nabla_\mu^s = \partial_\mu + \omega_\mu^s = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma^a \gamma^b \quad (3.3.19)$$

Menzioniamo infine la formula di Lichnèrowicz per il quadrato dell'operatore di Dirac  $D$ , [4]

$$D^2 = \nabla^s + \frac{1}{4} R \Gamma_{\mu\nu}^\rho \quad (3.3.20)$$

dove  $R$  è lo scalare di Ricci della metrica  $g^{\mu\nu}$  e  $\nabla^s$  è l'operatore laplaciano liftato al fibrato degli spinori,

$$\nabla^s = -g^{\mu\nu} (\nabla_\mu^s \nabla_\nu^s - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho^s) \quad (3.3.21)$$

con  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  simboli di Christoffel della connessione.

Se la dimensione  $n$  della varietà  $M$  è pari, la tripla spettrale considerata è anche essa pari visto che si può prendere come operatore chiralità il prodotto delle matrici gamma,

$$\Gamma = i^{-n/2} \gamma^1 \dots \gamma^n \quad (3.3.22)$$

che con  $n$  pari anticommuta con l'operatore  $D$ ,  $\Gamma D + D\Gamma = 0$  ed è tale che  $\Gamma^2 = 1$  e  $\Gamma^* = \Gamma$  grazie al fattore  $i^{-n/2}$ .

La proposizione e gli esempi seguenti mostrano in che modo è possibile costruire uno spazio metrico partendo da una tripla canonica.

**Proposizione 28.** *Data la tripla canonica  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  sulla varietà  $M$  definita come sopra, allora*

1. Lo spazio  $M$  è lo spazio di struttura dell'algebra  $\overline{\mathcal{A}}$  (chiusura di  $\mathcal{A}$ ) delle funzioni continue su  $M$ . (E' il teorema di Gel'fand-Naimark illustrato in sezione 2.3.
2. La distanza geodetica tra due punti qualsiasi su  $M$  è data da

$$d(p, q) = \sup_{f \in \mathcal{A}} \{|f(p) - f(q)| : \|[D, f]\| \leq 1\}, \quad \forall p, q \in M. \quad (3.3.23)$$

3. La misura Riemanniana su  $M$  è data da

$$\int_M f \equiv c(n) \operatorname{tr}_\omega(f |D|^{-n}), \quad \forall f \in \mathcal{A} \quad (3.3.24)$$

$$c(n) \equiv 2^{(n-[n/2]-1)} \pi^{n/2} n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

**Esempio 29.** *Data la tripla canonica  $(\mathcal{C}(M), L^2(S, M), i\gamma^\mu \partial_\mu)$  con  $\mathcal{C}(M)$  algebra delle funzioni continue sulla varietà  $M$ ;  $L^2(S, M)$  spazio di Hilbert degli spinori quadrato integrabili su  $M$  e  $i\gamma^\mu \partial_\mu$  operatore di Dirac usuale. In particolare prendiamo  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ,  $D = \frac{d}{dx}$ .*

I punti  $x \in \mathbb{R}$  oltre ad essere i punti di una varietà 1-dimensionale sono anche gli stati dell'algebra delle funzioni costituenti lo spazio  $S(\overline{\mathcal{A}})$  :

$$x(f) = f(x), \quad \forall x \in S(\overline{\mathcal{A}}), \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}). \quad (3.3.25)$$

La distanza tra due stati  $x$  e  $y$  in  $\mathcal{S}(\overline{\mathcal{A}})$  è data da:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sup\{|f(x) - f(y)| : \|\left[\frac{d}{dx}, f\right]\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x) - f(y)| : |f'(x)| \leq 1\} \\ &= |x - y| \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

che coincide con la definizione classica di distanza su  $\mathbb{R}$ .

### 3.4 Varietà non commutative

Abbiamo visto in che modo una volta assegnata una tripla canonica è possibile costruire uno spazio metrico, che può essere visto come una varietà commutativa. Nel seguito arriviamo ad enunciare il teorema di ricostruzione di Connes, che consente di associare una varietà commutativa (e non) ad una qualunque tripla spettrale con algebra commutativa (e non) e che rispetta certe condizioni.

#### 3.4.1 Strutture Reali

Una *struttura reale* è data da un'isometria antilineare  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  che rispetta una serie di proprietà [27]. Una struttura reale è fondamentale per introdurre la dualità di Poincaré e gioca un ruolo cruciale nella derivazione del Modello Standard. Questo operatore può essere pensato come la generalizzazione dell'operatore CPT.

**Definizione 30.** Sia  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  una tripla spettrale pari di dimensione  $n$ . Una struttura reale è un'isometria antilineare  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  avente le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} 1a. \quad & J^2 = \varepsilon(n)\mathbb{I} \\ 1b. \quad & JD = \varepsilon'(n)DJ \\ 1c. \quad & J\gamma = (-)^{n/2}\gamma J \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

con  $\varepsilon(n)$  ed  $\varepsilon'(n)$  funzioni mod 8 date da:

$$\varepsilon(n) = (1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1), \tag{3.4.2}$$

$$\varepsilon'(n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1), \quad n = 0, 1, \dots, 7 \tag{3.4.3}$$

Inoltre  $\forall a, b \in \mathcal{A} \exists b^0 : b^0 = Jb^*J^{-1}$  tale che:

$$[a, b^0] = 0 \quad 2.a \quad (3.4.4)$$

$$[[D, a], b^0] = 0 \quad 2.b \quad (3.4.5)$$

Un'analisi completa delle condizioni date va al di là dello scopo di questa tesi. Diciamo solo che la condizione 2a viene usata da Connes per formulare la dualità di Poincarè e per definire le varietà non commutative.

L'esistenza della struttura reale  $J$  consente di vedere lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  come un bimodulo su  $\mathcal{A}$  con struttura data da,

$$a\xi b \equiv aJb^*J^{-1}\xi, \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \quad (3.4.6)$$

Se  $a \in \mathcal{A}$  agisce su  $\mathcal{H}$  come operatore di moltiplicazione sinistra, allora  $Ja^*J^{-1}$  sarà il corrispondente operatore di moltiplicazione destra.

La tripla canonica associata ad una qualsiasi varietà Riemanniana di spin ha una struttura reale implementata dall'isometria antilineare  $J$  data dalla coniugazione di carica  $\mathcal{C}$  definita come:

$$J\psi = \mathcal{C}\psi \equiv \gamma^0\gamma^2\bar{\psi}, \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \quad (3.4.7)$$

dove la barra indica l'operazione di complessa coniugazione. Si può verificare che le proprietà 1 – 2 sono verificate.

### 3.4.2 Assiomi di Connes

E' utile richiamare tutte le proprietà che caratterizzano una geometria commutativa e non. Una geometria non commutativa di dimensione  $n$  è descritta da una tripla spettrale  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  come definita in sezione (3.3) e da una struttura reale  $J$  come definita in (3.4.1). Esse soddisfano una serie di condizioni [8], che Connes promuove ad assiomi per una tripla spettrale reale pari:

1. **(Dimensione)**. Esiste un numero intero non negativo  $n$  tale che l'operatore di Dirac è un infinitesimo di ordine  $1/n$ .
2. **(Regolarità)**. Per ogni  $a \in \mathcal{A}$  sia  $a$  che il commutatore  $[D, a]$  appartengono al dominio di  $\delta^k$  per ogni intero  $k$ , dove  $\delta$  è un operatore di derivazione su  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , dato da  $\delta(T) = [|D|, T]$ .

3. **(Finitezza)**. Lo spazio  $\mathcal{H}^\infty \equiv \cap_k \text{Dom}(D^k)$  è un modulo proiettivo sinistro finito su  $\mathcal{A}$ .
4. **(Realtà)**. Esiste una struttura reale  $J$  su  $\mathcal{A}$ . Le due fondamentali proprietà in (3.4.5) sono dette rispettivamente *proprietà di commutazione* e *primo ordine*.
5. **(Orientazione)**. L'operatore chirale  $\gamma$  si può scrivere come immagine di una  $n$ -forma  $c$  detta ciclo di Hochschild [5]

$$\gamma = \pi_D(c) \tag{3.4.8}$$

6. **(Dualità di Poincarè)** Equivalenza tra le  $p$ -forme e le  $(n-p)$ -forme. (Queste ultime due proprietà sono state espresse in modo da coglierne essenzialmente il significato dato che una loro trattazione completa richiederebbe ulteriori approfondimenti)

Le proprietà elencate sono le condizioni che una tripla spettrale deve rispettare per poter descrivere una varietà. Se l'algebra  $\mathcal{A}$  è commutativa allora avremo una corretta descrizione di una varietà di spin Riemanniana e compatta,  $M$ . Il teorema di ricostruzione di Connes infatti stabilisce che:

**Teorema 31.** *Data una tripla spettrale reale pari  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, J, \gamma)$  la cui algebra  $\mathcal{A}$  è commutativa, che soddisfa gli assiomi di Connes 1-6 allora esiste una varietà di spin Riemanniana e compatta,  $M$  (di dimensione pari), la cui tripla spettrale  $(C^\infty(M), L^2(M, S), \gamma, C, \gamma^5)$  coincide con  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, J, \gamma)$ .*

Se l'algebra non è commutativa essa fornirà una definizione di una varietà non commutativa.

### 3.5 Forme differenziali

In questa sezione descriviamo in che modo costruire, in un contesto non commutativo, un'algebra di forme differenziali su una tripla spettrale  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ . A questo scopo è utile innanzitutto introdurre l'algebra delle forme differenziali universali su un'algebra qualsiasi  $\mathcal{A}$ .

#### 3.5.1 Forme differenziali universali

Sia  $\mathcal{A}$  un'algebra associativa unitale definita sul campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ . L'algebra delle forme differenziali universali  $\Omega\mathcal{A} = \bigoplus_p \Omega^p \mathcal{A}$  è un'algebra graduata definita come nel seguito. Per il grado 0 coincide con  $\mathcal{A}$  stessa,  $\Omega^0 \mathcal{A} = \mathcal{A}$ . Per il grado 1 lo spazio  $\Omega^1 \mathcal{A}$

delle 1-forme è costruito come un *modulo destro* di  $\mathcal{A}$  i cui elementi  $\delta a$ , con  $a \in \mathcal{A}$  rispettano le relazioni

$$\begin{aligned}\delta(ab) &= (\delta a)b + a\delta b, \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \\ \delta(\alpha a + \beta b) &= \alpha\delta a + \beta\delta b, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

Dalla prima di queste relazioni segue immediatamente che  $\delta(a) = \delta(\mathbb{I}a) = (\delta\mathbb{I})a + \mathbb{I}\delta a \Rightarrow \delta\mathbb{I} = 0$ .

Un elemento generico  $\omega \in \Omega^1\mathcal{A}$  è una somma finita del tipo

$$\omega = \sum_i a_i \delta b_i, \quad a_i, b_i \in \mathcal{A}.\tag{3.5.2}$$

Osserviamo che la prima delle (3.5.1) altro non è che la regola di Leibniz per la trasformazione

$$\delta : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1\mathcal{A},\tag{3.5.3}$$

che quindi può essere considerata come una *derivazione* su  $\mathcal{A}$  con valori nel modulo  $\Omega^1\mathcal{A}$ .

Consideriamo ora il generico grado  $p$ . Lo spazio  $\Omega^p\mathcal{A}$  delle  $p$ -forme è definito come

$$\Omega^p\mathcal{A} = \underbrace{\Omega^1\mathcal{A}\Omega^1\mathcal{A}\cdots\Omega^1\mathcal{A}}_{p\text{-volte}}\tag{3.5.4}$$

con il prodotto di due 1-forme definite tramite

$$\begin{aligned}(a_0\delta a_1)(b_0\delta b_1) &\equiv a_0(\delta a_1)b_0(\delta b_1) \\ &= a_0\delta(a_1b_0)\delta b_1 - a_0a_1\delta b_0\delta b_1\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

perciò gli elementi di  $\Omega^p\mathcal{A}$  sono combinazioni lineari finite di monomi del tipo

$$\omega = a_0\delta a_1\delta a_2\cdots\delta a_p, \quad a_i \in \mathcal{A}.\tag{3.5.6}$$

Il passo successivo è rendere l'algebra  $\Omega\mathcal{A}$  un'algebra differenziale promuovendo il *differenziale*  $\delta$  ad operatore lineare  $\delta : \Omega^p\mathcal{A} \rightarrow \Omega^{p+1}\mathcal{A}$ ; senza alcuna ambiguità,

$$\delta(a_0\delta a_1\delta a_2\cdots\delta a_p) \equiv \delta a_0\delta a_1\delta a_2\cdots\delta a_p.\tag{3.5.7}$$

e soddisfacente le relazioni di base

$$\begin{aligned}\delta^2 &= 0, \\ \delta(\omega_1\omega_2) &= \delta(\omega_1)\omega_2 + (-)^p\omega_1\delta\omega_2, \quad \omega_1 \in \Omega^p\mathcal{A}, \omega_2 \in \Omega\mathcal{A}.\end{aligned}\tag{3.5.8}$$

L'algebra universale  $\Omega\mathcal{A}$  non è molto interessante da un punto di vista coomologico. Dalla definizione di  $\delta$  in (3.5.7) segue che tutti gli spazi coomologici, per ogni grado  $p$ ,  $H^p(\Omega\mathcal{A}) \equiv \text{Ker}(\delta : \Omega^p\mathcal{A} \rightarrow \Omega^{p+1}\mathcal{A})/\text{Im}(\delta : \Omega^{p-1}\mathcal{A} \rightarrow \Omega^p\mathcal{A})$  sono nulli tranne che nel grado zero per cui si ha  $H^0(\Omega\mathcal{A}) = \mathbb{C}$ .

Costruiamo ora esplicitamente l'algebra  $\Omega\mathcal{A}$  in termini di prodotti tensori. Come primo passo consideriamo il sottomodulo di  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  dato da

$$\ker(m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}), \quad m(a \otimes b) \equiv ab. \quad (3.5.9)$$

Questo sottomodulo è generato da elementi del tipo  $1 \otimes a - a \otimes 1$  con  $a \in \mathcal{A}$ . Infatti se  $\sum a_i b_i = m(\sum a_i \otimes b_i) = 0$ , allora  $\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$ . Inoltre la trasformazione  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \ker(m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  definita da  $\delta a \equiv 1 \otimes a - a \otimes 1$  soddisfa la regola di Leibniz  $\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b)$ . Esiste un isomorfismo tra i bimoduli  $\Omega^1\mathcal{A}$  e  $\ker(m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ :

$$\begin{aligned} \Omega^1\mathcal{A} &\simeq \ker(m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) & (3.5.10) \\ \delta a &\leftrightarrow 1 \otimes a - a \otimes 1 \\ \sum a_i \delta b_i &\leftrightarrow \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) \end{aligned}$$

Identificando allora  $\Omega^1\mathcal{A}$  con lo spazio  $\ker(m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  il differenziale  $\delta$  sarà dato da

$$\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \Omega^1\mathcal{A}, \quad \delta a = 1 \otimes a - a \otimes 1. \quad (3.5.11)$$

**Esempio 32.** *Algebra Universale delle ordinarie funzioni.*

Prendiamo  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(M)$  l'algebra delle funzioni continue su uno spazio topologico  $M$  con valori in  $\mathbb{C}$ . Identifichiamo poi il modulo  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  con  $\mathcal{S}(M \times M)$  spazio di struttura dell'algebra  $\mathcal{A}$ .

Se  $f \in \mathcal{A}$  ed  $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}(M \times M)$  allora

$$\delta f \cdot (x_1, x_2) \equiv (1 \otimes f - f \otimes 1)(x_1, x_2) = f(x_2) - f(x_1). \quad (3.5.12)$$

Perciò  $\Omega^1\mathcal{A}$  può essere identificato con lo spazio delle funzioni a due variabili nulle sulla diagonale;  $\Omega^p\mathcal{A}$  è identificato con l'insieme delle funzioni  $f$  di  $p+1$  variabili nulle sulle diagonali contigue:  $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{p+1}) = 0$ . Il differenziale è dato da

$$\delta f(x_1, \dots, x_p) \equiv \sum_{k=1}^{p+1} (-)^{k-1} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{p+1}). \quad (3.5.13)$$

### 3.5.2 Forme differenziali di Connes

Data una tripla spettrale  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  vediamo come costruire su di essa un'algebra di forme differenziali. Consideriamo la trasformazione:

$$\begin{aligned} \pi_D : \Omega\mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \text{ con } \Omega\mathcal{A} = \bigoplus_p \Omega^p \mathcal{A} \\ \pi_D(a_0 \delta a_1 \cdots \delta a_p) &\equiv a_0 [D, a_1] \cdots [D, a_p], \quad a_j \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

che è chiaramente un omomorfismo siccome sia  $\delta$  che  $[D, \cdot]$  sono derivazioni su  $\mathcal{A}$ . Inoltre siccome  $(\delta a)^* \equiv -\delta a^*$  e  $[D, a]^* \equiv -[D, a^*]$  si ha  $\pi_D(\omega)^* = \pi_D(\omega^*)$  per ogni forma  $\omega \in \Omega\mathcal{A}$ ;  $\pi$  risulta pertanto uno \*-omomorfismo.

Si potrebbe pensare di definire le forme differenziali come l'immagine  $\pi_D(\Omega\mathcal{A})$ . Questo però non è possibile siccome in generale,  $\pi_D(\omega) = 0$  non implica che  $\pi_D(\delta\omega) = 0$ . Le forme di questo tipo per cui si ha  $\pi_D(\omega) = 0$  e  $\pi_D(\delta\omega) \neq 0$  sono dette *junk-forme*. Queste possono essere usate per costruire un'algebra differenziale e rendere  $\pi_D$  un omomorfismo tra algebre differenziali. Se consideriamo l'ideale doppio graduato di  $\Omega\mathcal{A}$ ,  $J_0 \equiv \bigoplus_p J_0^p$  con

$$J_0^p \equiv \{\omega \in \Omega^p \mathcal{A}, \pi(\omega) = 0\} \quad (3.5.15)$$

Si può dimostrare [29] che  $J = J_0 + \delta J_0$  è l'ideale doppio differenziale graduato di  $\Omega\mathcal{A}$ . Perciò è possibile dare la seguente definizione:

**Definizione 33.** *L'algebra differenziale graduata delle forme di Connes sull'algebra  $\mathcal{A}$  è data da*

$$\Omega_D \mathcal{A} \equiv \Omega\mathcal{A}/J \simeq \pi_D(\Omega\mathcal{A})/\pi_D(\delta J_0). \quad (3.5.16)$$

I gradi dell'algebra  $\Omega_D(\mathcal{A})$  sono naturalmente definiti a partire da quelli di  $\Omega\mathcal{A}$  e  $J$  e quindi lo spazio delle  $p$ -forme è dato da:

$$\Omega_D^p \mathcal{A} = \Omega^p \mathcal{A}/J^p. \quad (3.5.17)$$

Siccome  $J$  è un ideale differenziale, il differenziale esterno  $\delta$  definisce un differenziale su  $\Omega_D \mathcal{A}$ ,

$$d : \Omega_D^p \mathcal{A} \longrightarrow \Omega_D^{p+1} \mathcal{A}, \quad d[\omega] \equiv [\delta\omega] \simeq [\pi_D(\delta\omega)] \quad (3.5.18)$$

con  $\omega \in \Omega^p \mathcal{A}$  e  $[\omega]$  la classe corrispondente in  $\Omega_D^p \mathcal{A}$ . Il bimodulo  $\Omega_D^p \mathcal{A}$  delle  $p$ -forme è dato esplicitamente da

$$\Omega_D^p \simeq \pi_D(\Omega^p \mathcal{A})/\pi_D \delta((J_0 \cap \Omega^{p-1} \mathcal{A})) \quad (3.5.19)$$

i cui elementi sono operatori nella forma

$$\omega_p = \sum_j a_0^j [D, a_1^j] [D, a_2^j] \cdots [D, a_p^j], \quad a_i^j \in \mathcal{A}. \quad (3.5.20)$$

modulo il sottomodulo degli operatori

$$\left\{ \sum_j [D, b_0^j] [D, b_1^j] \cdots [D, b_{p-1}^j], : b_i^j \in \mathcal{A} \text{ e } \sum_j b_{0j}^j [D, b_1^j] [D, b_2^j] \cdots [D, b_{p-1}^j] = 0 \right\} \quad (3.5.21)$$

come per il differenziale esterno (3.5.18), questo sarà:

$$d \left[ \sum_j a_0^j [D, a_1^j] [D, a_2^j] \cdots [D, a_p^j] \right] = \left[ \sum_j [D, a_0^j] [D, a_1^j] \cdots [D, a_p^j] \right] \quad (3.5.22)$$

**Esempio 34.** *Spazio a due punti*

Ripartiamo dall'esempio (26) dello spazio a due punti e costruiamo l'algebra esterna delle forme differenziali su di esso. La tripla spettrale vista nell'esempio (26) si può facilmente estendere ad un caso più generico:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \ni a = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{I}_{\dim \mathcal{H}_L} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{I}_{\dim \mathcal{H}_R} \end{pmatrix} \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \ni \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ \gamma &= \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_{\dim \mathcal{H}_L} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{\dim \mathcal{H}_R} \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^* & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

La distanza tra i due punti dello spazio  $Y = \{1, 2\}$  è data da  $d(1, 2) = \frac{1}{\Lambda}$  con  $\Lambda$  autovalore più grande della matrice  $M^*M$ .

Lo spazio  $\Omega^1 \mathcal{A}$  delle 1-forme può essere identificato con lo spazio delle funzioni su  $Y \times Y$  con valori nulli sulla diagonale come visto nell'esempio (32). Siccome il complemento della diagonale su  $Y \times Y$  è costituito da due punti, vale a dire le coppie  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$  lo spazio  $\Omega^1 \mathcal{A}$  è 2-dimensionale e una base si può costruire nel seguente modo. Consideriamo la funzione  $e$  definita come  $e(1) = 1$  e  $e(2) = 0$ . Chiaramente  $(1 - e)(1) = 0$ ,  $(1 - e)(2) = 1$ .

Una possibile base per le 1-forme è quindi data da

$$e\delta e, (1-e)\delta(1-e). \quad (3.5.24)$$

i cui valori sono dati da (seguendo la definizione 3.5.12),

$$\begin{aligned} e\delta e(1,2) &= -1 & (1-e)\delta(1-e)(1,2) &= 0 \\ e\delta e(2,1) &= 0 & (1-e)\delta(1-e)(2,1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

ad esempio  $e\delta e(2,1) = e[(1 \times e)(2,1) - (e \times 1)(2,1)] = e[2e(1) - e(2)1] = e(2) = 0$ . Una 1-forma universale qualsiasi  $\alpha \in \Omega^1 \mathcal{A}$  si scriverà allora come  $\alpha = \lambda e\delta e + \mu(1-e)\delta(1-e)$  con  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Come il differenziale  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{A}$  esso è essenzialmente un operatore differenziale. Per ogni  $a \in \mathcal{A}$  si ha che

$$\delta a = (\lambda_1 - \lambda_2)e\delta e - (\lambda_1 - \lambda_2)(1-e)\delta(1-e) = (\lambda_1 - \lambda_2)\delta e. \quad (3.5.26)$$

E' immediato trovare

$$\begin{aligned} \pi(e\delta e) &\equiv e[D, e] = \begin{pmatrix} e(1)\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & e(2)\mathbb{I}_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & [e(2) - e(1)]M \\ -[e(2) - e(1)]M^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi((1-e)\delta(1-e)) &\equiv (1-e)[D, 1-e] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M^* & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

e quindi una generica 1-forma  $\alpha = \lambda e\delta e + \mu(1-e)\delta(1-e)$  è rappresentata da

$$\pi(\alpha) = \lambda \pi(e\delta e) + \mu \pi((1-e)\delta(1-e)) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda M \\ -\mu M^* & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.28)$$

spesso i parametri  $\lambda$  e  $\mu$  vengono riscritti nella forma  $\lambda \equiv 1 - \varphi$  e  $\mu \equiv 1 - \varphi^*$ .

La rappresentazione di una 2-forma sarà:

$$\begin{aligned} \pi(e\delta e\delta e) &\equiv e[D, e][D, e] = \begin{pmatrix} -MM^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi((1-e)\delta(1-e)\delta(1-e)) &\equiv (1-e)[D, 1-e][D, 1-e] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M^*M \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

In particolare l'operatore  $\pi(\delta\alpha)$  si scriverà

$$\pi(\delta\alpha) = \lambda\pi(e\delta e\delta e) + \mu\pi((1-e)\delta(1-e)\delta(1-e)) = -(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} MM^* & 0 \\ 0 & M^*M \end{pmatrix} \quad (3.5.30)$$

da cui deduciamo che non esistono junk-forme 1-dimensionali.

### 3.5.3 Algebra esterna di de Rham

I metodi descritti nella sezione precedente, quando applicati alla tripla canonica su un'ordinaria varietà, riproducono l'usuale algebra esterna sulla varietà. Consideriamo la tripla canonica  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  su una varietà Riemanniana di spin  $n$ -dimensionale descritta nella sezione 3.3.2. Si vede immediatamente che per ogni  $f \in \mathcal{A}$ ,

$$\pi(\delta f) \equiv [D, f] = \gamma^\mu(x)\partial_\mu f = \gamma(d_M f), \quad (3.5.31)$$

dove  $\gamma : \Gamma(M, C(M)) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è lo \*-morfismo tra algebre definito in (3.3.15) e  $d_M$  denota l'usuale derivazione esterna su  $M$ . In generale per  $f_j \in \mathcal{A}$ ,

$$\pi(f_0\delta f_1\dots\delta f_p) \equiv f_0[D, f_1]\dots[D, f_p] = \gamma(f_0d_M f_1 \cdot \dots \cdot d_M f_p), \quad (3.5.32)$$

dove i differenziali  $d_M f_j$  ora sono considerati come sezioni del fibrato di Clifford  $Cl_1(M)$ , mentre le funzioni  $f_j$  possono essere pensate come sezioni del fibrato  $Cl_0(M)$  e il puntino  $\cdot$  denota il prodotto di Clifford tra le fibre di  $C(M) = \oplus_k C_k(M)$ .

Siccome una generica 1-forma su  $M$  può scriversi come  $\sum_j f_0^j d_M f_1^j$  con  $f_0^j, f_1^j \in \mathcal{A}$ , usando (3.5.31) possiamo identificare le 1-forme di Connes  $\Omega_D^1 \mathcal{A}$  con le usuali 1-forme differenziali  $\Lambda^1(M)$ ,

$$\Omega_D^1 \mathcal{A} \simeq \Lambda^1(M). \quad (3.5.33)$$

Per essere più precisi stiamo identificando lo spazio  $\Omega_D^1 \mathcal{A}$  con l'immagine in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , attraverso il morfismo  $\gamma$ , dello spazio  $\Lambda^1(M)$ .

Consideriamo ora le junk 2-forme. Per  $f \in \mathcal{A}$ , consideriamo la 1-forma universale

$$\alpha = \frac{1}{2}(f\delta f - (\delta f)f) \neq 0, \quad (3.5.34)$$

$$\delta\alpha = \delta f\delta f. \quad (3.5.35)$$

Si trova facilmente che

$$\pi_D(\alpha) = \frac{1}{2}\gamma^\mu(f\partial_\mu f - (\partial_\mu f)f) = 0, \quad (3.5.36)$$

$$\pi_D(\delta\alpha) = \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu f\partial_\nu f = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)(\partial_\mu f\partial_\nu f) = -g^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu f \mathbb{I}_{2^{n/2}} \neq 0 \quad (3.5.37)$$

Quindi l'espressione  $\delta\alpha$  di sopra è una junk-2 forma. Una generica junk-2 forma sarà una combinazione (con coefficienti in  $\mathcal{A}$ ) di forme del tipo  $\delta\alpha$ .

### 3.6 Teorie di gauge su Triple spettrali

Descriviamo brevemente gli ingredienti principali che consentono di generalizzare al caso algebrico la teoria delle connessioni.

L'ingrediente iniziale di cui abbiamo bisogno è una tripla spettrale  $n$ -dimensionale  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  da cui costruiamo l'algebra delle forme differenziali  $\Omega_D\mathcal{A} = \bigoplus_p \Omega_D^p\mathcal{A}$  come descritto nella sezione 3.5.3.

**Definizione 35.** *Un potenziale vettore (o connessione)  $A$  è un elemento autoaggiunto di  $\Omega_D^1\mathcal{A}$ . Il corrispondente campo di gauge (o curvatura) è la 2-forma  $\theta \in \Omega_D^2\mathcal{A}$  definita come*

$$\theta = dA + A^2. \quad (3.6.1)$$

Così il potenziale  $A$  si può scrivere nella forma  $A = \sum_j a_j[D, b_j]$ ,  $a_j, b_j \in \mathcal{A}$ , con  $A$  aggiunto  $A^* = A$ . Osserviamo che sebbene  $A$  può essere scritto in molti modi come sommatoria, la sua derivata esterna  $dA \in \Omega_D^2\mathcal{A}$  è definita in maniera non ambigua tramite  $dA = \sum_j [D, a_j][D, b_j]$ , modulo le junk forme. La curvatura  $\theta$  risulta così auto-aggiunta: infatti se  $A$  è autoaggiunto allora lo sarà anche  $A^2$  stesso. Per  $dA$  invece abbiamo:

$$dA - (dA)^* = \sum_j [D, a_j][D, b_j] - \sum_j [D, a_j^*][D, b_j^*]. \quad (3.6.2)$$

Siccome  $A^* = -\sum_j [D, b_j^*]a_j^* = -\sum_j [D, b_j^*a_j^*] + \sum_j b_j^*[D, a_j^*]$  e  $A^* - A = 0$ , allora la quantità  $j_2 \equiv dA - (dA)^* \neq 0$  è una junk-2 forma. Quindi, la richiesta modulo junk comporta  $dA - (dA)^* = 0$  e quindi l'autoaggiuntezza di  $\theta$ .

Il gruppo  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  degli elementi unitari di  $\mathcal{A}$  definirà il gruppo delle trasformazioni di gauge.

**Definizione 36.** *Il gruppo unitario  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  agisce sul potenziale vettore  $A$  con l'usuale azione vista in (1.1.7):*

$$A \longrightarrow A^u \equiv uAu^* + u[D, u^*], \quad u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}). \quad (3.6.3)$$

Il campo di forza  $F$  si trasformerà con l'azione aggiunta:

$$\begin{aligned}
 \theta^u &= dA^u + (A^u)^2 \\
 &= duAu^* + uAu^* - uAdu^* + du[D, u^*] + uA^2u^* + \\
 &\quad + uA[D, u^*] + u[D, u^*]uAu^* + u[D, u^*]u[D, u^*] \\
 &= \dots \\
 &= u(dA + A^2)u^*,
 \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

dove abbiamo usato  $du = [D, u]$  e  $udu^* + (du)u^* = 0$  che segue da  $d(u^*u) = 0$ . Quindi come già visto in (1.1.25):

$$(\theta, u) \longrightarrow \theta^u = u\theta u^*, \tag{3.6.5}$$

Ora possiamo introdurre l'analogo dell'azione di gauge di Yang-Mills (1.1.27):

$$S_B(A) = \langle \theta, \theta \rangle_2 = \text{tr}_\omega(\theta^2 |D|^{-n}). \tag{3.6.6}$$

Per costruzione essa risulta positiva, quadratica, e invariante per trasformazioni di gauge (3.6.3).

Per quanto riguarda la parte fermionica, siccome il potenziale di gauge è un elemento auto-aggiunto  $A \in \Omega_D^1 \mathcal{A}$  che trasforma sotto il gruppo unitario  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  come in (3.6.3), allora possiamo scrivere la seguente espressione di gauge invariante,

$$S_F(A, \psi) \equiv \langle \psi, (D + A)\psi \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(D) \subset \mathcal{H}, \quad A \in \Omega_D^1 \mathcal{A}, \tag{3.6.7}$$

infatti si ha,

$$\begin{aligned}
 (D + A^u)u &= ((D + u[D, u^*] + uAu^*)u \\
 &= Du + u(Du^* - u^*D)u + uA \\
 &= uDu^*u + uA \\
 &= u(D + A)
 \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

e quindi:

$$\langle \psi^u, (D + A^u)\psi^u \rangle = \langle \psi u^*, (D + A^u)u\psi \rangle = \langle \psi u^*, u(D + A)\psi \rangle = \langle \psi, (D + A)\psi \rangle \tag{3.6.9}$$

che dimostra l'invarianza di  $S_F$  per trasformazioni del gruppo  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ .

Quando siamo in presenza di triple spettrali reali per definire la parte fermionica della Lagrangiana bisogna apportare una modifica all'operatore perturbato  $D + A$ . Ricordiamo da (3.4.6) che l'operatore  $\mathcal{J}$  fornisce un'azione aggiunta del gruppo di gauge, identificato con gli elementi unitari dell'algebra,

$${}^u\psi = u\psi u^\dagger = u\mathcal{J}u\mathcal{J}\psi = U\psi. \quad (3.6.10)$$

dove si è definito  $U \equiv u\mathcal{J}u\mathcal{J}$ . La presenza della struttura reale cambia la definizione della derivata covariante: dalla la regola di trasformazione standard per le connessioni,

$${}^uA = uAu^\dagger + u[D, u^\dagger], \quad (3.6.11)$$

l'operatore che trasforma correttamente sotto una tale trasformazione di gauge è una modifica dell'usuale derivata covariante  $D + A = \gamma^\mu(\partial_\mu + g_i A_{i\mu})$  in  $D_A$ :

$$D + A \implies D_A \equiv D + A + JAJ. \quad (3.6.12)$$

che si può verificare [32] si trasforma nel seguente modo,

$$D_A \longrightarrow UD_AU^* = UDU^* + UAU^* + UJAJU^* \quad (3.6.13)$$

lasciando quindi invariata la forma bilineare  $\bar{\psi}D_A\psi$

### 3.6.1 Teoria di Gauge su uno spazio a due punti

Applichiamo il procedimento appena visto per la costruzione di una teoria di gauge al caso di algebra a due punti presentata nell'esempio 34. Ricordiamo che:

$$\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \ni \psi$$

$$\gamma = \text{diag}(-\mathbb{1}_{\dim\mathcal{H}_1}, \mathbb{1}_{\dim\mathcal{H}_2})$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^* & 0 \end{pmatrix}$$

Un potenziale vettore  $A$  è rappresentato da un elemento autoaggiunto  $A \in \Omega_D^1\mathcal{A}$  che come si è visto nell'esempio 34, può essere scritta come

$$A = \pi_D(\alpha) = \lambda\pi_D(e\delta e) + \mu\pi_D((1-e)\delta(1-e)) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda M \\ -\mu M^* & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6.14)$$

per convenzione si pone  $\lambda = (\phi - 1)$  e  $\mu = (\phi^* - 1)$ .

Il campo di forza  $\theta$  sarà quindi  $(\delta\alpha + \alpha^2)$  con :

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda M \\ -\mu M^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda M \\ -\mu M^* & 0 \end{pmatrix} = -\lambda\mu \begin{pmatrix} MM^* & 0 \\ 0 & M^*M \end{pmatrix} \quad (3.6.15)$$

e sempre dall'esempio 34:

$$\delta\alpha = -(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} MM^* & 0 \\ 0 & M^*M \end{pmatrix} \quad (3.6.16)$$

Quindi la curvatura  $\theta$  sarà:

$$\theta = -(\lambda + \mu + \lambda\mu) \begin{pmatrix} MM^* & 0 \\ 0 & M^*M \end{pmatrix} \quad (3.6.17)$$

Possiamo scrivere quindi l'azione bosonica di Yang-Mills:

$$S_B(A) = \text{tr}(\theta^2) = 2(|\phi|^2 - 1)^2 \text{tr}(M^*M)^2. \quad (3.6.18)$$

Il gruppo di gauge  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = U(1) \times U(1)$  è il gruppo degli elementi unitari di  $\mathcal{A}$  che sono rappresentati da matrici diagonali:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}, \quad |u_1|^2 = 1, \quad |u_2|^2 = 1 \quad (3.6.19)$$

la cui azione sul potenziale  $A$  è data da  $A^u = uAu^* + udu^*$  che porta ad una moltiplicazione per  $u_1^*u_2$  della variabile  $\phi$ :

$$A^u = \begin{pmatrix} 0 & (\phi u_1^* u_2 - 1)M \\ (u_2^* u_1 \phi - 1)M^* & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6.20)$$

e l'azione  $S_B(A)$  risulta invariante.

Osserviamo che in questo esempio l'azione  $S_B(A)$  riproduce l'usale situazione di una rottura spontanea di simmetria per un campo di Higgs  $\phi$ . Il campo di Higgs trova in questo contesto algebrico una nuova interpretazione geometrica: è la componente del potenziale di gauge lungo una direzione discreta interna costituita da due punti.

Come passo successivo costruiamo l'azione fermionica (3.6.7),

$$S_F(A, \psi) = \langle \psi, (D + A)\psi \rangle \quad \forall \psi \in \text{Dom}(D) \subset \mathcal{H}, \quad A \in \Omega_D^1 \mathcal{A}. \quad (3.6.21)$$

L'operatore di Dirac modificato dalla connessione  $A$  si scriverà:

$$D + A = \begin{pmatrix} 0 & \phi M \\ \phi^* M^* & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6.22)$$

Scrivendo  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$  otteniamo per l'azione fermionica i due termini:

$$S_F(A, \psi) = \psi_L^* \phi M \psi_R + \psi_R^* \phi^* M^* \psi_L. \quad (3.6.23)$$

Questa azione è ancora invariante per trasformazioni del gruppo  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ .

Vediamo dunque che la teoria di gauge non commutativa su uno spazio a due punti mostra una grande somiglianza con il meccanismo di rottura spontanea di simmetria di Higgs.

## Capitolo 4

# NCG: il Modello Standard e oltre

Il Modello Standard presentato nella parte iniziale di questa tesi è descritto in modo chiaro da una geometria non commutativa, consistente della più semplice algebra di matrici a dimensioni finite. I fermioni costituiscono lo spazio di Hilbert della tripla spettrale mentre i bosoni vettori e il campo di Higgs sono unificati in un'unica connessione non commutativa.

Già nel paragrafo 3.6.1 si è mostrato come una teoria di gauge non commutativa su uno spazio a due punti rivela un'incredibile somiglianza con il meccanismo di Higgs. Facendo uso del modello di Connes-Lott sull'azione bosonica cercheremo di costruire in maniera completa il meccanismo di Higgs di rottura di simmetria come una particolare geometria non commutativa su una varietà a due superfici. Modificando opportunamente gli elementi della tripla cercheremo di ricavare il modello dell'interazione forte tra quark e il modello elettrodebole per i leptoni in un quadro originale in cui i neutrini vengano considerati massivi e in cui si renda possibile l'implementazione di un meccanismo dell'altalena compatibile con le invarianze di gauge e la rinormalizzazione della teoria.

Infine daremo un accenno alla nuova teoria di Connes sull'azione spettrale mostrando come questa contenga tutti gli elementi necessari per una descrizione del Modello Standard accoppiato alla Gravità.

### 4.1 Varietà a due superfici e Meccanismo di Higgs

Descriviamo il meccanismo di rottura di simmetria  $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow U(1) \times U(1)$ . I calcoli che svilupperemo si riveleranno di grande utilità per il seguito.<sup>‡1</sup>

---

<sup>1</sup>Uno dei background principali della teoria di Connes consiste nel fatto di operare in ambiente euclideo, considerando cioè uno spazio-tempo in cui il tensore metrico  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ . Ciò comporta naturalmente un cambiamento nella definizione degli spinori di Dirac e Majorana. In particolare per i fermioni di Dirac nei termini di massa del tipo  $m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$  bisogna sostituire  $\bar{\psi}$  con  $\psi^\dagger$  che va pensato come un

La tripla spettrale è costituita dai seguenti elementi:

1.  $\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) = (C^\infty(M) \otimes \mathbb{H}) \oplus (C^\infty(M) \otimes \mathbb{H})$ ,  
cioè l'algebra è costituita da funzioni infinitamente differenziabili su una varietà  $M$  valutati nell'algebra  $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ . Un elemento generico  $a \in \mathcal{A}$  ha una parte left,  $q_L$  e una parte right  $q_R$ , funzioni con valori in  $\mathbb{H}$ . Possiamo pensare quindi ad  $\mathcal{A}$  come all'algebra delle funzioni su una varietà a due superfici.

$$\rho(q_L, q_R) = \begin{pmatrix} q_L & 0 \\ 0 & q_R \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

2.  $\mathcal{H} = (L^2(M, S) \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (L^2(M, S) \otimes \mathbb{C}^2) \equiv \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R$ ,

La parte destra e sinistra degli spinori hanno un indice interno (lo spazio  $\mathbb{C}^2$  che potremmo associare alla simmetria di isospin debole) e sotto l'azione del gruppo di gauge trasformano allo stesso modo, al contrario di un modello realistico in cui la parte sinistra trasforma nella rappresentazione fondamentale di  $SU(2)$  mentre la parte destra è un singoletto per  $SU(2)$ .

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_L \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \\ \xi_R \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

con  $\psi_{L,R} = \chi \otimes \xi_{L,R}$ ,  $\chi \in L^2(M, S)$  e  $\xi_{L,R} \in \mathbb{C}^2$  il quaternionione left  $q_L$  agisce su  $\psi_L$  e  $q_R$  agisce su  $\psi_R$ .

3. L'operatore  $D$  può essere costruito con qualche aggiunta rispetto allo spazio a due punti:

$$D = \not{\partial} \otimes \mathbb{I} + \gamma^5 \otimes D_F, \text{ con:} \quad (4.1.3)$$

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.4)$$

L'operatore di Dirac si scriverà quindi:

$$D = \begin{pmatrix} \not{\partial} \otimes \mathbb{I}_2 & \gamma^5 \mathcal{M} \\ \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger & \not{\partial} \otimes \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

---

campo indipendente da  $\psi$ . Per maggiori approfondimenti vedi appendice C.

con

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & m\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

L'inserimento di  $\gamma^5$  negli elementi di matrice fuori diagonale è dovuto ad alcune motivazioni geometriche [6] che porta alla semplificazione di molte equazioni. Notiamo che nel caso più generale si dovrebbe considerare anche, come elementi dello spazio di Hilbert, gli stati coniugati di carica  $c_{L,R}$  legati a  $L,R$  attraverso la struttura reale  $J$ . Questo è necessario solo quando più di un fattore dell'algebra agisce su ciascun multipletto dello spazio di Hilbert come nel caso del Modello Standard elettrodebole e forte, in cui ad esempio il doppietto di quark sinistri che trasformano sia sotto l'algebra  $\mathbb{H}$  che contiene il gruppo  $SU(2)$  sia sotto  $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$  che contiene  $SU(3)$ , sia sotto  $\mathbb{C}$  che contiene  $U(1)$ . In questo semplice esempio sarebbe ridondante siccome abbiamo a che fare con un solo potenziale. Quando considereremo il caso del Modello Standard ci soffermeremo anche su questo aspetto.

Lo spazio delle 1-forme è:

$$\Omega_D^1 = (\Omega_D^1(M) \otimes \Omega_D^0(\mathbb{Z}_2)) \oplus (\Omega_D^0(M) \otimes \Omega_D^1(\mathbb{Z}_2))$$

Per costruire l'azione bisogna seguire la procedura esposta nella sezione 3.6 e quindi costruire la connessione  $A$  come elemento generico dell'algebra differenziale  $\Omega_D^1$  e con questa poi scrivere il campo di forza  $\theta$  definita in (3.6.1),  $\theta = dA + A^2$ .

La forma esplicita della connessione  $A \in \Omega_D^1$ , espressa in termini degli elementi dell'algebra  $\mathcal{A}$ , è data da

$$\begin{aligned} A &= \sum_i a_i [D, b_i] \\ &= \begin{pmatrix} a_i^L & 0 \\ 0 & a_i^R \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \not{\partial} \otimes \mathbb{I}_2 & \gamma^5 \mathcal{M} \\ \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger & \not{\partial} \otimes \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_i^L & 0 \\ 0 & b_i^R \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} a_i^L & 0 \\ 0 & a_i^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\not{\partial} b_i^L) & \gamma^5 (\mathcal{M} b_i^R - b_i^L \mathcal{M}) \\ \gamma^5 (\mathcal{M}^\dagger b_i^L - b_i^R \mathcal{M}^\dagger) & (\not{\partial} b_i^R) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_i^L (\not{\partial} b_i^L) & \gamma^5 a_i^L (\mathcal{M} b_i^R - b_i^L \mathcal{M}) \\ \gamma^5 a_i^R (\mathcal{M}^\dagger b_i^L - b_i^R \mathcal{M}^\dagger) & a_i^R (\not{\partial} b_i^R) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

dove abbiamo usato la proprietà di commutazione tra l'operatore chirale  $\gamma^5$  e i quaternioni

$a^{L(R)}, b^{L(R)}$  come richiesto dalla definizione (3.3.1) e il fatto che

$$[\not{\partial}, b_i^L] = \not{\partial} b_i^L$$

data la natura operatoriale dei  $b_i^L$ . La connessione  $A$ , tenendo conto della condizione di autoaggiuntezza  $A = A^\dagger$ , può sinteticamente risciversi

$$A = \begin{pmatrix} \not{A}_L & \gamma^5(\phi - \phi_0) \\ \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{A}_R \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

dove le connessioni  $\not{A}^{L(R)} \equiv \gamma^\mu A_\mu^{L(R)}$  e il campo di Higgs  $\phi$  che compaiono rispettivamente sulla diagonale e fuori diagonale sono definiti in termini degli elementi dell'algebra:

$$A_\mu^{L(R)} \equiv \sum_i a_i^{L(R)} \partial_\mu b_i^{L(R)}, \quad \phi - \phi_0 \equiv a_i^L (\mathcal{M} b_i^R - b_i^L \mathcal{M}) \quad (4.1.9)$$

$\phi_0$  è un semplice scalare. Le parti left e right della connessione descrivono una teoria di gauge  $SU(2)$ .

Il calcolo dell'azione sarebbe un esercizio di routine se non fosse per la presenza delle junk-forme: come visto in sezione 3.6, le junk-forme relative all'algebra interna si eliminano semplicemente imponendo,

$$dA = dA^\dagger \quad (4.1.10)$$

e quelle relative all'algebra esterna ricordando la loro espressione vista in (3.5.37).

$$dA = [D, A] = \begin{pmatrix} \not{\partial} \not{A}_L + \gamma^5 \mathcal{M} \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) - \gamma^5 (\phi - \phi_0) \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger & -\gamma^5 \not{\partial} (\phi - \phi_0) + \gamma^5 \mathcal{M} \not{A}_R - \not{A}_L \gamma^5 \mathcal{M} \\ \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger \not{A}_L - \not{A}_R \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger - \gamma^5 \not{\partial} (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{\partial} \not{A}_R + \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger \gamma (\phi - \phi_0) - \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \gamma^5 \mathcal{M} \end{pmatrix}$$

dalla condizione (4.1.10) e dal fatto che  $\gamma^5 \mathcal{M} = -\mathcal{M} \gamma^5$  e  $\gamma^5 \phi = -\phi \gamma^5$ , conseguenze della definizione 3.3.1, si ha:

$$dA = \begin{pmatrix} \not{\partial} \not{A}_L & -\gamma^5 \not{\partial} (\phi - \phi_0) \\ -\gamma^5 \not{\partial} (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{\partial} \not{A}_R \end{pmatrix} \quad (4.1.11)$$

Per quanto riguarda  $A^2$  si ha semplicemente:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \not{A}_L \not{A}_L + \gamma^5 (\phi - \phi_0) \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{A}_L \gamma^5 (\phi - \phi_0) + \gamma^5 (\phi - \phi_0) \not{A}_R \\ \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \not{A}_L + \not{A}_R \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{A}_R \not{A}_R + \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \gamma^5 (\phi - \phi_0) \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

da cui:

$$\theta = \begin{pmatrix} \not{\partial}\mathbb{A}_L + \mathbb{A}_L\mathbb{A}_L + \gamma^5(\phi - \phi_0)\gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & -\gamma^5\not{\partial}(\phi - \phi_0) + \mathbb{A}_L\gamma^5(\phi - \phi_0) + \gamma^5(\phi - \phi_0)\mathbb{A}_R \\ -\gamma^5\not{\partial}(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) + \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)\mathbb{A}_L + \mathbb{A}_R\gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{\partial}\mathbb{A}_R + \mathbb{A}_R\mathbb{A}_R + \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)\gamma^5(\phi - \phi_0) \end{pmatrix}$$

Usando le usuali definizioni per il tensore di gauge  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + [A^\mu, A^\nu]$  e indicando con  $\gamma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  e  $\mathcal{D}\phi \equiv (\not{\partial} + \mathbb{A}_L)\phi - \phi\mathbb{A}_R$  possiamo semplificare l'espressione di  $\theta$ :

$$\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}F_L^{\mu\nu} + (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger) & -\gamma^5\mathcal{D}\phi \\ \gamma^5(\mathcal{D}\phi)^\dagger & \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}F_R^{\mu\nu} + (\phi^\dagger\phi - \phi_0^\dagger\phi_0) \end{pmatrix} \quad (4.1.13)$$

Nel calcolo abbiamo tenuto conto della sottrazione delle junk-2 forme dell'algebra di de Rham. Ad esempio in  $\theta_{11}$ :

$$\begin{aligned} \not{\partial}\mathbb{A}_L + \mathbb{A}_L\mathbb{A}_L &= \gamma_\mu\gamma_\nu(\partial^\mu A^\nu + A^\mu A^\nu) \\ &= (\gamma_{\mu\nu} + g_{\mu\nu})(\partial^\mu A^\nu + A^\mu A^\nu) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\nu\mu})(\partial^\mu A^\nu + A^\mu A^\nu) + g_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu + A^\mu A^\nu) \\ &= \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu) + g_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu + A^\mu A^\nu) \\ &= \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu + A^\mu A^\nu) \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

il termine in  $g_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu + A^\mu A^\nu)$  è propria una junk-2 forma del tipo (3.5.37) e quindi viene trascurato.

La parte bosonica dell'azione sarà quindi:

$$S_B = \frac{1}{\mathcal{N}}\text{tr}\theta^2 = \int d^4x \left[ \frac{1}{4}\text{tr}F_L^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{4}\text{tr}F_R^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^R + (\mathcal{D}\phi)^\dagger\mathcal{D}\phi + (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger)^2 \right]. \quad (4.1.15)$$

Il minimo del potenziale  $V(\phi, \phi^\dagger) = (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger)^2$  si ha per  $|\phi_{min}|^2 = \phi_0^2$ . Sotto una trasformazione di gauge la connessione  $A$  si trasforma in  $u^{-1}Au + u^{-1}[D, u]$  dove  $u$  è un elemento del gruppo  $SU(2)$ . Inoltre a partire dal quaternion  $\phi$  è possibile definire un campo

scalare complesso  $H$  che cambia anche esso per una trasformazione del gruppo  $SU(2)$ ,

$$\begin{aligned}
\phi &= a_i^L (\mathcal{M} b_i^R - b_i^L \mathcal{M}) \\
&= \begin{pmatrix} x & -y^* \\ y & x^* \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y'^* \\ y' & x'^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'' & -y''^* \\ y'' & x''^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} m(xx' - xx'' + y^*y'' - y^*y') & -m(xy'^* - xy''^* + y^*x'^* - y^*x''^*) \\ m(yx' - yx'' - x^*y'' + x^*y') & m(yy''^* - yy'^* + x^*x'^* - x^*x''^*) \end{pmatrix} \\
&\equiv m \begin{pmatrix} h_1 & -h_2^* \\ h_2 & h_1^* \end{pmatrix} \equiv \hat{h}\mathcal{M}. \tag{4.1.16}
\end{aligned}$$

Nella Lagrangiana fermionica il campo  $\phi$  si accoppia alle componenti destrorse e sinistrorse delle particelle con il termine

$$\bar{\psi}_L(\mathcal{M} + \phi)\psi_R \tag{4.1.17}$$

che esplicitato diventa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} + \phi &= m \begin{pmatrix} h_1 + 1 & -h_2^* \\ h_2 & h_1^* + 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} H_1 & -H_2^* \\ H_2 & H_1^* \end{pmatrix} \tag{4.1.18}
\end{aligned}$$

Definendo allora,

$$\mathcal{M} + \phi \equiv H \tag{4.1.19}$$

si ha  $\bar{\psi}_L(\mathcal{M} + \phi)\psi_R = \bar{\psi}_L H \psi_R$ .

Nella Lagrangiana bosonica il potenziale  $V(\phi, \phi^\dagger) = [(\phi + \phi_0)(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)]^2$  si riscriverà in termini di  $H$ ,

$$\begin{aligned}
V(H) &= [(H - \mathcal{M} + \phi_0)(H^\dagger + \mathcal{M}^\dagger - \phi_0^\dagger)]^2 \\
&= [(H - \mathcal{M} + \phi_0)(H^\dagger + \mathcal{M}^\dagger - \phi_0^\dagger)]^2 \\
&= (HH^\dagger - H_0H_0^\dagger)^2 \tag{4.1.20}
\end{aligned}$$

Il quaternionione  $H$  è riparametrizzato dalla coppia  $\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$  che posso vedere come doppietto

del gruppo  $SU(2)$ . Quindi tutta la Lagrangiana in termini di  $H$ ,

$$\mathcal{L}_H = (\mathcal{D}\phi)^\dagger \mathcal{D}\phi + (HH^\dagger - H_0 H_0^\dagger)^2 + (\bar{\psi}_L H \psi_R + \bar{\psi}_R H^\dagger \psi_L) \quad (4.1.21)$$

ha esattamente la forma vista in (1.3.8) per cui si può ripetere il meccanismo della rottura di simmetria.

La corrispondente azione fermionica come definita in (3.6.7),

$$\begin{aligned} S_F &= \langle \bar{\psi} | D + A | \psi \rangle \\ &= \bar{\psi}_L (\not{\partial} + A_L) \psi_L + \bar{\psi}_R (\not{\partial} + A_R) \psi_R + (\bar{\psi}_L H \psi_R + \bar{\psi}_R H^\dagger \psi_L). \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

L'ultimo termine fornisce gli accoppiamenti tra il campo di Higgs e i fermioni, conferendo loro massa dopo la rottura di simmetria.

## 4.2 Tripla spettrale del Modello Standard

Mostriamo in che modo il Modello Standard può essere derivato da una particolare geometria non commutativa. La costruzione della tripla spettrale è fatta prendendo il prodotto di una varietà 4-dimensionale ordinaria e uno spazio interno matriciale non commutativo.

L'algebra  $\mathcal{A}$  è il prodotto tensoriale di due algebre,

$$\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F, \quad (4.2.1)$$

dove  $C^\infty(M)$  è l'algebra commutativa delle funzioni regolari su  $M$  e  $\mathcal{A}_F$ ,

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{M}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{C} \quad (4.2.2)$$

è la più piccola algebra contenente il gruppo  $G = U(3) \times SU(2) \times U(1)$  come suo insieme di elementi unitari. Infatti  $U(1)$  è l'elemento unitario dell'algebra dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ ,  $SU(2)$  è l'elemento unitario dell'algebra dei quaternioni  $\mathbb{H} \equiv \text{span}(\mathbb{I}_2, i\sigma_{\text{pauli}})$ , e  $U(3)$  è l'elemento unitario dell'algebra delle matrici  $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ .

Osserviamo che il gruppo unitario dell'algebra interna  $\mathcal{A}_F$  non coincide con il gruppo di gauge del Modello Standard. Esso contiene un fattore in più  $U(1)$  che sarà necessario rimuovere.

Lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  anche qui è un prodotto tensore tra uno spazio di spinori 4-

dimensionali e uno spazio vettoriale finito,

$$\mathcal{H} = L^2(M; S) \otimes \mathcal{H}_F, \quad (4.2.3)$$

dove  $\mathcal{H}_F$  contiene tutti i 96 gradi di libertà fermionici e coincide con la somma diretta  $\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_R^c \oplus \mathcal{H}_L^c$  definiti nell'equazione (1.5.1) della sezione 1.5.

Specifichiamo le rappresentazioni dell'algebra interna  $\mathcal{A}_F$  su  $\mathcal{H}_F$ . Consideriamo un elemento  $(c, q, b) \in \mathcal{A}_F$  dove rispettivamente  $q, b, c \in \mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ . Una rappresentazione fedele  $\rho$  di  $\mathcal{A}_F$  sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_F$  è data da:

$$\rho(c, q, B) \equiv \left( \begin{array}{c|c} \rho_w(q, B) & 0 \\ \hline 0 & \rho_s(c) \end{array} \right) \quad (4.2.4)$$

con  $B = \text{diag}(b, b^*)$  e

$$\rho_w(q, B) = \left( \begin{array}{cc} q \otimes \mathbb{I}_N \otimes \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & B \otimes \mathbb{I}_N \otimes \mathbb{I}_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{agente su}} \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} u_L^i \\ d_L^i \end{array} \right) \\ (u_R^i) \\ (d_R^i) \end{array} \right) \times N \quad (4.2.5)$$

$$\rho_s(c) = \left( \begin{array}{cc} \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_N \otimes c & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_N \otimes c \end{array} \right) \xrightarrow{\text{agente su}} \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} u_L^i \\ d_L^i \end{array} \right)^c \\ (u_R^i)^c \\ (d_R^i)^c \end{array} \right) \times N \quad (4.2.6)$$

Consideriamo il caso di una sola generazione, quindi  $N = 1$ . Le formule scritte si riducono a

$$\rho(c, q, B) \equiv \left( \begin{array}{cc|cc} q \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & & \\ 0 & B \otimes \mathbb{I}_3 & & \\ \hline & & 0 & \\ 0 & & \mathbb{I}_2 \otimes c & 0 \\ & & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes c \end{array} \right) \xrightarrow{\text{agente su}} \left( \begin{array}{c} Q_L \\ Q_R \\ Q_R^c \\ Q_L^c \end{array} \right) \quad (4.2.7)$$

dove  $Q$  indica brevemente la coppia  $u, d$ . Inoltre  $Q_R^c \equiv (Q_R)^c = (Q^c)_L$  è un isospinore sinistrorso descrivente un'antiparticella. Per avere una tripla spettrale reale abbiamo bisogno anche di una struttura chirale  $\Gamma = \gamma^5 \oplus \gamma_F$  e di una struttura reale  $\mathcal{J} = J \oplus J_F$ , dove  $\gamma^5$  e  $J$  sono le strutture canoniche su  $M$ , costruite nella sezione 3.3.2. Le parti finite  $\gamma_F$  e  $J_F$

sono date da:

$$\gamma_F = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_{6N} & & & \\ & \mathbb{I}_{6N} & & \\ & & -\mathbb{I}_{6N} & \\ & & & +\mathbb{I}_{6N} \end{pmatrix}, \quad J_F = J_F^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{12N} \\ \mathbb{I}_{12N} & 0 \end{pmatrix} C \quad (4.2.8)$$

dove  $C$  è l'operazione di complessa coniugazione. Il ruolo di  $J_F$  è di scambiare particelle con antiparticelle e allo stesso tempo le chiralità. Essa agisce perciò come la coniugazione di carica di Dirac  $\mathcal{C}$  vista in (1.5.4).

L'ultimo elemento della tripla è l'operatore di Dirac:

$$D = \not{\partial} \otimes \mathbb{I} + \gamma^5 \otimes D_F \quad (4.2.9)$$

con  $D_F$  dato da,

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} & 0 & 0 \\ \mathcal{M}^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}^* \\ 0 & 0 & \mathcal{M}^T & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \not{\partial} & \gamma^5 \mathcal{M} & 0 & 0 \\ \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger & \not{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \not{\partial} & \gamma^5 \mathcal{M}^* \\ 0 & 0 & \gamma^5 \mathcal{M}^T & \not{\partial} \end{pmatrix} \quad (4.2.10)$$

La matrice di massa  $\mathcal{M}$  è data da:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_u \otimes \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & M_d \otimes \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

dove  $M_u, M_d$  sono matrici di massa che possono essere espresse in termini di matrici diagonali e della matrice di mixing di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa,

$$\begin{aligned} M_u &= \text{diag}(m_u, m_c, m_t) \\ M_d &= C_{KM} \text{diag}(m_d, m_s, m_b) \end{aligned}$$

Nel caso di singola generazione  $M_u$  ed  $M_d$  si riducono a semplici scalari  $m_u, m_d$  e quindi la matrice di massa  $\mathcal{M}$  è una matrice  $6 \times 6$ .

Si può verificare che l'operatore di Dirac, la rappresentazione dell'algebra, e la struttura reale considerate soddisfano per intero gli assiomi di Connes visti in sezione 3.4.2.

Per costruire l'azione bisogna seguire la procedura esposta nella sezione 3.6. La forma esplicita della connessione  $A$ , che è una matrice a blocchi  $24 \times 24$  di 1-forme come in (4.2.9),

è simile a quella che abbiamo introdotto nella sezione 4.1,

$$A = \sum_i \alpha_i d\beta_i = \sum_i \alpha_i [D, \beta_i] \quad (4.2.12)$$

dove  $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{A}$  una cui rappresentazione è data da,

$$\alpha_i \equiv \left( \begin{array}{cc|cc} q'_i \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & & \\ 0 & B'_i \otimes \mathbb{I}_3 & & \\ \hline & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes c'_i & 0 \\ & & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes c'_i \end{array} \right); \beta_i \equiv \left( \begin{array}{cc|cc} q_i \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & & \\ 0 & B_i \otimes \mathbb{I}_3 & & \\ \hline & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes c_i & 0 \\ & & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes c_i \end{array} \right)$$

Svolgendo il commutatore in (4.2.12) si ricava:

$$A(A_L, B, \phi, G) = \left( \begin{array}{cccc} A_L \otimes \mathbb{I}_3 & \gamma^5(\phi - \phi_0) \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ \gamma^5(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_0) \otimes \mathbb{I}_3 & B \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes G \end{array} \right) \quad (4.2.13)$$

Dove,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} - \tilde{\phi}_0 &\equiv \sum_i B'_i (\mathcal{M}^\dagger q_i - B_i \mathcal{M}^\dagger); & B^\mu &\equiv B'_i \partial^\mu B_i; & G^\mu &\equiv \sum_i c'_i \partial^\mu c_i \\ \phi - \phi_0 &\equiv \sum_i q'_i (\mathcal{M} B_i - q_i \mathcal{M}); & A_L^\mu &\equiv \sum_i q'_i \partial^\mu q_i \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

e ricordiamo che siccome la connessione  $A$  deve risultare Hermitiana allora avremo le condizioni,

$$(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_0) = (\phi - \phi_0)^\dagger \quad (4.2.15)$$

$$A_L, B, G = A_L^\dagger, B^\dagger, G^\dagger \quad (4.2.16)$$

Il campo  $A_L^\mu$  è relativo al gruppo di gauge  $SU(2)$ , il campo  $B^\mu$  è relativo al gruppo  $U(1)$  e il campo  $G^\mu$  al gruppo  $U(3)$ , pertanto avremo

$$A_L^\mu = \sum_{i=1}^3 A_L^{\mu i} \frac{\sigma^i}{2} \quad (4.2.17)$$

$$B^\mu = B^\mu \mathbb{I}_2 \quad (4.2.18)$$

$$G_\mu = \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + G_\mu^0 \mathbb{I}_3 \quad (4.2.19)$$

dove  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli, generatori di  $SU(2)$ ,  $\mathbb{I}_3$  e  $\mathbb{I}_2$  sono generatori del gruppo  $U(1)$  e  $\lambda^a$  sono le otto matrici di Gell-Mann generatori del gruppo  $SU(3)$ . Ricordiamo che l'algebra delle matrici  $3 \times 3$  ha come elemento unitario il gruppo  $U(3)$  che si decompone in  $SU(3) \otimes U(1)$  e quindi la connessione associata  $G^\mu$  si scinde in una sommatoria che rappresenta il gruppo  $SU(3)$  e in un campo  $G_\mu^0$  che riproduce il gruppo  $U(1)$ .

Osserviamo che sulla diagonale principale ci sono i campi di gauge corrispondenti ai bosoni vettori mentre fuori diagonale ci sono i campi corrispondenti al bosone di Higgs. Inoltre siccome  $D_F$  in (4.2.10) commuta con la parte  $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$  dell'algebra  $\mathcal{A}$  allora il campo di Higgs non si accoppierà con il colore.

Come visto, la curvatura  $\theta$  è definita da  $\theta \equiv dA + A^2$ . La Lagrangiana del Modello Standard è la somma di una parte bosonica e di una parte fermionica come in sezione 3.6,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_F = \frac{1}{\mathcal{N}} \text{Tr} \theta^2 + \bar{\psi} D_A \psi \quad (4.2.20)$$

che è invariante per le trasformazioni combinate dei campi  $\psi$  e  $A$  viste in (3.6.10) e (3.6.11).

Cominciamo con il calcolare  $\theta$ . Le espressioni per  $dA$  e  $A^2$  si ottengono con un ordinario calcolo matriciale, tenendo conto però della sottrazione delle junk-forme.

$$dA = \begin{pmatrix} [dA]_1 & 0 \\ 0 & [dA]_2 \end{pmatrix} \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} [dA]_1 &= \begin{pmatrix} (\not{\partial} A_L + \mathcal{M} \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) - \gamma^5 (\phi - \phi_0) \mathcal{M}^\dagger) \otimes \mathbb{I}_3 & (-\gamma^5 \not{\partial} (\phi - \phi_0) + \mathcal{M} \not{B} - A_L \mathcal{M}) \otimes \mathbb{I}_3 \\ (\mathcal{M}^\dagger A_L - \not{B} \mathcal{M}^\dagger - \gamma^5 \not{\partial} (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)) \otimes \mathbb{I}_3 & (\not{\partial} \not{B} + \mathcal{M}^\dagger \gamma^5 (\phi - \phi_0) - \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \mathcal{M}) \otimes \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \not{\partial} A_L & (-\gamma^5 \not{\partial} (\phi - \phi_0)) \otimes \mathbb{I}_3 \\ (\gamma^5 \not{\partial} (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)) \otimes \mathbb{I}_3 & \not{\partial} \not{B} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} [dA]_2 &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 \otimes \not{\partial} \mathcal{G} & \mathbb{I}_2 \otimes (\mathcal{M}^* \mathcal{G} - \mathcal{G} \mathcal{M}^*) \\ \mathbb{I}_2 \otimes (\mathcal{M}^T \mathcal{G} - \mathcal{G} \mathcal{M}^T) & \mathbb{I}_2 \otimes (\not{\partial} \mathcal{G}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 \otimes \not{\partial} \mathcal{G} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \otimes \not{\partial} \mathcal{G} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}_L \mathcal{A}_L + \gamma^5(\phi - \phi_0)\gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)) \otimes \mathbb{I}_3 & (\mathcal{A}_L \gamma^5(\phi - \phi_0) + \gamma^5(\phi - \phi_0)\mathcal{B}) \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ (\gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)\mathcal{A}_L + \mathcal{B}\gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)) \otimes \mathbb{I}_3 & (\mathcal{B}\mathcal{B} + \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger)\gamma^5(\phi - \phi_0)) \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}\mathcal{G} & \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}\mathcal{G} \end{pmatrix}$$

Quindi l'espressione di  $\theta$  sarà,

$$\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}F_L^{\mu\nu} + (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger) & -\gamma^5\mathcal{D}\phi & 0 \\ \gamma^5(\mathcal{D}\phi)^\dagger & \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (\phi^\dagger\phi - \phi_0^\dagger\phi_0) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}G^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

con  $\mathcal{D}\phi \equiv (\mathcal{D} + \mathcal{A}_L)\phi - \phi\mathcal{B}$ .

Affrontiamo ora il problema del gruppo di gauge che risulta troppo grande [30]. Il gruppo unitario di  $\mathcal{A}_F$  è  $U(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Siccome si può decomporre  $U(3) = SU(3) \times U(1)$  allora dovremmo eliminare il gruppo extra  $U(1)$ . Questo avviene imponendo la condizione di *unimodularità*, che consiste nella richiesta di traccia nulla per la connessione  $A$ ,  $\text{tr}(A + JAJ) = 0$ ,

$$A + JAJ = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_L \otimes \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_2 \otimes \mathcal{G} & \gamma^5(\phi - \phi_0) \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \otimes \mathbb{I}_3 & \mathcal{B} \otimes \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_2 \otimes \mathcal{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_2 \otimes \mathcal{G} + \mathcal{B} \otimes \mathbb{I}_3 & \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \otimes \mathbb{I}_3 \\ 0 & 0 & \gamma^5(\phi - \phi_0) \otimes \mathbb{I}_3 & \mathbb{I}_2 \otimes \mathcal{G} + \mathcal{A}_L \otimes \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.24)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(A + JAJ) &= \text{tr}(2\mathcal{A}_L \otimes \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_2 \otimes 4\mathcal{G} + 2\mathcal{B} \otimes \mathbb{I}_3) \\ &= \text{tr}(4\mathcal{G}^0 \mathcal{G}^0 \otimes \mathbb{I}_3 + 2\mathcal{B} \otimes \mathbb{I}_2) \\ &= 12\mathcal{G}^0 + 4\mathcal{B} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

in questo modo il fattore  $U(1)$  corrispondente a  $G_\mu^0$  viene automaticamente eliminato. Osserviamo che quella appena esposta non si tratta di una rottura di simmetria, ma soltanto di una richiesta aggiuntiva sulla connessione.

Rimosso il fattore aggiuntivo  $U(1)$  l'azione bosonica si ottiene operando la traccia di  $F^2$  sull'intero spazio di Hilbert,

$$S_B = \frac{1}{\mathcal{N}} \text{tr}\theta^2 = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} \text{tr}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \text{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + (\mathcal{D}\phi)^\dagger \mathcal{D}\phi + (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger)^2 \right].$$

In particolare il campo di Higgs  $\phi$  contiene un doppietto del gruppo  $SU(2)_L$ , che emerge in modo naturale dal termine quadratico di energia cinetica e quartico di energia potenziale,

$$V(\phi) = (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger)^2 . \quad (4.2.26)$$

Per evidenziare la presenza del doppietto di  $SU(2)$  e capire quali sono i parametri associati alla particella di Higgs sviluppiamo esplicitamente l'espressione di  $\phi$  e valutiamo il termine del potenziale (4.2.26):

$$\begin{aligned} \phi &= q'_i(\mathcal{M}B_i - q_i\mathcal{M}) \\ &= \begin{pmatrix} x' & -y'^* \\ y' & x'^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u\mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & m_d\mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & -y'^* \\ y' & x'^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y^* \\ y & x^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u\mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & m_d\mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_u(bx' + x'x - y'y) & -m_d(y'^*b^* + x'y^* + y'x^*) \\ m_u(y'b + y'x + x'^*y) & m_d(x'^*b^* - y'y^* + x'^*x^*) \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_3 \\ &\equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 m_u & -\varphi_2^* m_d \\ \varphi_2 m_u & \varphi_1^* m_d \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_3 \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2^* \\ \varphi_2 & \varphi_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_3 \quad (4.2.28)$$

dove sono stati definiti due campi scalari complessi  $(\varphi_1, \varphi_2)$  in termini dei c-numeri  $x, x', y, y', b$ , che compongono le matrici dell'algebra  $\mathcal{A}_F$ . Questo costituisce il doppietto di isospin debole  $SU(2)$  per il campo di Higgs. Con un semplice calcolo matriciale otterremo anche l'espressione dei parametri:

$$V(\varphi) = 3(m_u^4 + m_d^4)|\varphi|^4 - 2(\phi_0\phi_0^\dagger)3(m_u^2 + m_d^2)|\varphi|^2 + (\phi_0\phi_0^\dagger)^2 \quad (4.2.29)$$

mandando  $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi/\phi_0$  e sopprimendo l'apice:

$$V(\varphi) = (\phi_0\phi_0^\dagger)^2 [3(m_u^4 + m_d^4)|\varphi|^4 - 6(m_u^2 + m_d^2)|\varphi|^2 + 1] \quad (4.2.30)$$

$$\equiv K \left[ \frac{|\varphi|^4}{16L^2} - \frac{|\varphi|^2}{2L} + 1 \right] \quad (4.2.31)$$

con  $K$  ed  $L$  funzioni delle sole masse fermioniche. Quindi in questa teoria non commutativa la massa del bosone di Higgs viene espressa in termini di sole masse fermioniche a differenza del Modello Standard, in cui dipende anche da un ulteriore parametro,  $\lambda$  (1.3.12). Se si sviluppano i conti tenendo conto anche delle altre tre generazioni, si ottengono le espressioni di  $K$  ed  $L$  come in [7].

La parte fermionica dell'azione  $S_F$  è definita in termini dell'operatore di Dirac oscillato visto in (3.6.12)

$$\begin{aligned}
 S_F &= \langle \psi | D + A + JAJ | \psi \rangle = \langle \psi | D | \psi \rangle + \langle \psi | A + JAJ | \psi \rangle \\
 &= \bar{\psi} \begin{pmatrix} \not{\partial} & \gamma^5 \mathcal{M} & 0 & 0 \\ \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger & \not{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \not{\partial} & \gamma^5 \mathcal{M}^* \\ 0 & 0 & \gamma^5 \mathcal{M}^T & \not{\partial} \end{pmatrix} \psi \\
 &\quad + \bar{\psi} \begin{pmatrix} \not{A}_L + \not{G} & \gamma^5(\phi - \phi_0) \otimes \mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \otimes \mathbb{I}_3 & \not{B} + \not{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \not{G} + \not{B} & \gamma^5(\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \\ 0 & 0 & \gamma^5(\phi - \phi_0) & \not{G} + \not{A}_L \end{pmatrix} \psi
 \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

con  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  dati da:

$$\bar{\psi} = (\bar{Q}_L \quad \bar{Q}_R \quad \bar{Q}_R^c \quad \bar{Q}_L^c), \quad \psi = \begin{pmatrix} Q_L \\ Q_R \\ Q_R^c \\ Q_L^c \end{pmatrix}. \tag{4.2.33}$$

Dal calcolo matriciale si ricava,

$$\begin{aligned}
 S_F &= \bar{Q}_L(\not{\partial} + \not{A}_L + \not{G})Q_L + \bar{Q}_L^c(\not{\partial} + \not{A}_L + \not{G})Q_L^c + \\
 &\quad + \bar{Q}_R(\not{\partial} + \not{B} + \not{G})Q_R + \bar{Q}_R^c(\not{\partial} + \not{B} + \not{G})Q_R^c + \\
 &\quad + [\bar{Q}_L(\mathcal{M} + \phi)Q_R + \bar{Q}_L^c(\mathcal{M}^* + \phi)Q_R^c + h.c.].
 \end{aligned} \tag{4.2.34}$$

Gli ultimi due termini forniscono l'accoppiamento tra il campo di Higgs e i fermioni, conferendo loro massa.

L'espressione ricavata per l'azione fermionica presenta un problema, il cosiddetto "Fermion doubling": lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è composto da una parte interna e da una parte spazio-temporale. Nella parte interna  $\mathcal{H}_F$  sono inclusi tutti i gradi di libertà fermionici, quindi si avranno un grado per la particella sinistrorsa e uno per la particella destrorsa, più i due speculari dell'antiparticella. Tuttavia i gradi di elicità destra e sinistra sono contenuti a loro volta anche nella parte spazio-temporale degli spinori  $L^2(M; S)$ . Lo spazio di Hilbert che stiamo usando risulta quindi ridondante. In pratica, un elemento  $h_F \in \mathcal{H}_F$  può essere decomposto nel seguente modo:

$$h_F = h_L + h_R + h_R^c + h_L^c \tag{4.2.35}$$

dove i quattro vettori a secondo membro appartengono rispettivamente agli spazi  $\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, \mathcal{H}_R^c, \mathcal{H}_L^c$ . Inoltre per ogni  $x \in M$  uno spinore generico  $\psi$  può essere similmente decomposto:

$$\psi(x) = \psi_L + \psi_R + \psi_R^c + \psi_L^c. \quad (4.2.36)$$

Perciò tensorizzando (4.2.35) e (4.2.36) si hanno 16 combinazioni che raggruppiamo in tre gruppi,

$$-a- \quad (\psi_L \otimes h_L + \psi_R \otimes h_R + \psi_L \otimes h_R^c + \psi_R \otimes h_L^c) \quad (4.2.37)$$

$$-b- \quad (\psi_L^c \otimes h_L^c + \psi_R^c \otimes h_R^c + \psi_L^c \otimes h_R + \psi_R^c \otimes h_L) \quad (4.2.38)$$

$$-c- \quad (\psi_L + \psi_R^c) \otimes (h_R + h_L^c) + (\psi_R + \psi_L^c) \otimes (h_L + h_R^c) \quad (4.2.39)$$

Consideriamo un termine del gruppo (c), ad esempio  $\psi_L \otimes h_R$  esso corrisponde ad una particella sinistrorsa (come specificato da  $\psi_L$ ) che sotto il gruppo di gauge si comporta come una particella destrorsa (come specificato da  $h_R$ ). Al contrario le combinazioni (a) e (b) presentano gli accoppiamenti giusti ma basta uno solo dei due gruppi per descrivere le particelle fisiche. Quest'ultima ridondanza viene solitamente eliminata identificando i gradi di libertà di (a) con quelli di (b), quindi nel nostro caso  $Q_{L,R} \equiv Q_{L,R}^c$ , [33, 34] e cioè considerando il gruppo quoziente rispetto alla relazione di equivalenza fornita dalla struttura reale  $J$ . Quanto concerne i gradi di libertà non fisici del gruppo (c), si procede con l'introduzione di un operatore di proiezione  $P$ ,

$$P = \frac{1 - \gamma^5}{2} \otimes \mathcal{P}_L + \frac{1 + \gamma^5}{2} \otimes \mathcal{P}_R, \quad (4.2.40)$$

dove  $\mathcal{P}_L$  e  $\mathcal{P}_R$  sono i proiettori sulle componenti dello spazio di Hilbert interno,  $\mathcal{P}_L = \text{diag}(1, 0, 1, 0)$  e  $\mathcal{P}_R = (0, 1, 0, 1)$ . In termini matriciali abbiamo

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \gamma^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \gamma^5 \end{pmatrix}. \quad (4.2.41)$$

La parte fermionica dell'azione diventerà

$$S_F = \langle \psi | P D_A P | \psi \rangle, \quad (4.2.42)$$

e semplificando le notazioni, indicando cioè con  $q_{L,R}$  gli stati fisici  $\chi_{L,R} \otimes q_{L,R}^\alpha$ , si ha:

$$S_F = \bar{q}_L(\not{\partial} + \not{A}_L + \not{G})q_L + \bar{q}_R(\not{\partial} + \not{B} + \not{G})q_R + \quad (4.2.43)$$

$$+ [\bar{q}_L(\mathcal{M} + \phi)q_R + \bar{q}_R^c(\mathcal{M}^* + \phi)q_L^c + h.c.] . \quad (4.2.44)$$

### 4.2.1 Modello elettrodebole e Meccanismo Seesaw

Dopo aver analizzato in dettaglio la geometria non commutativa che descrive l'interazione tra quark concentriamoci sulle interazioni leptoniche. Il procedimento seguito nella sezione precedente può semplicemente essere reiterato con qualche modifica alla tripla spettrale. L'algebra sarà sempre espressa come il prodotto tensoriale di due algebre:

$$\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F, \quad (4.2.45)$$

dove come prima  $C^\infty(M)$  è l'algebra commutativa delle funzioni regolari su  $M$  mentre  $\mathcal{A}_F$  si riduce a

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{H} \oplus \mathbb{C} \quad (4.2.46)$$

è la più piccola algebra contenente il gruppo  $G = SU(2) \times U(1)$  come suo insieme di elementi unitari.

Lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è dato da:

$$\mathcal{H} = L^2(M; S) \otimes \mathcal{H}_F, \quad (4.2.47)$$

dove  $\mathcal{H}_F$  contiene i 48 gradi di libertà leptonici e coincide con la somma diretta  $\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_R^c \oplus \mathcal{H}_L^c$ .

Specifichiamo le rappresentazioni dell'algebra interna  $\mathcal{A}_F$  su  $\mathcal{H}_F$ . Consideriamo un elemento  $(q, b) \in \mathcal{A}_F$  dove rispettivamente  $q, b, \in \mathbb{H}, \mathbb{C}$ . Una rappresentazione fedele  $\rho$  di  $\mathcal{A}_F$  sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_F$  è data da,

$$\rho(q, B) \equiv \left( \begin{array}{c|c} \rho_2(q, B) & 0 \\ \hline 0 & \rho_1(b) \end{array} \right) \quad (4.2.48)$$

con  $B = \text{diag}(b, b^*)$  e

$$\rho_2(q, B) = \left( \begin{array}{cc} q \otimes \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & B \otimes \mathbb{I}_N \end{array} \right) \xrightarrow{\text{agente su}} \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \nu_L \\ e_L \end{array} \right) \times N \\ \left( \begin{array}{c} \nu_R \\ e_R \end{array} \right) \times N \end{array} \right) \quad (4.2.49)$$

$$\rho_1(b) = \left( \begin{array}{cc} b^* \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & b^* \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_N \end{array} \right) \xrightarrow{\text{agente su}} \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \nu_L \\ e_L \end{array} \right)^c \times N \\ (\nu_R)^c \times N \\ (e_R)^c \times N \end{array} \right) \quad (4.2.50)$$

Consideriamo il caso di una sola generazione, quindi  $N = 1$ . Le formule scritte si riducono a

$$\rho(q, B) \equiv \left( \begin{array}{cc|cc} q & 0 & & \\ 0 & B & & \\ \hline & & b^* \mathbb{I}_2 & 0 \\ & & 0 & b^* \mathbb{I}_2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{agente su}} \left( \begin{array}{c} \psi_L \\ \psi_R \\ \psi_R^c \\ \psi_L^c \end{array} \right) \quad (4.2.51)$$

dove  $\psi$  indica brevemente la coppia  $(\nu, e)$ , mentre  $\psi_R^c \equiv (\psi_R)^c = (\psi^c)_L$  rappresenta l'isospinore sinistrorso di un'antiparticella. La struttura chirale e la struttura reale sono date da  $\Gamma = \gamma^5 \oplus \gamma_F$   $\mathcal{J} = J \oplus J_F$ , dove le parti finite  $\gamma_F$  e  $J_F$  hanno le seguenti espressioni

$$\gamma_F = \left( \begin{array}{ccc} -\mathbb{I}_{2N} & & \\ & \mathbb{I}_{2N} & \\ & & -\mathbb{I}_{2N} \\ & & & \mathbb{I}_{2N} \end{array} \right), \quad J_F = J_F^\dagger = \left( \begin{array}{cc} 0 & \mathbb{I}_{4N} \\ \mathbb{I}_{4N} & 0 \end{array} \right) C \quad (4.2.52)$$

dove  $C$  è l'operazione di complessa coniugazione.

L'operatore di Dirac sarà:

$$D = \not{\partial} \otimes \mathbb{I} + \gamma^5 \otimes D_F \quad (4.2.53)$$

con  $D_F$  dato da,

$$D_F = \left( \begin{array}{cccc} 0 & \mathcal{M} & 0 & 0 \\ \mathcal{M}^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}^* \\ 0 & 0 & \mathcal{M}^T & 0 \end{array} \right) \Rightarrow D = \left( \begin{array}{cccc} \not{\partial} & \gamma^5 \mathcal{M} & 0 & 0 \\ \gamma^5 \mathcal{M}^\dagger & \not{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \not{\partial} & \gamma^5 \mathcal{M}^* \\ 0 & 0 & \gamma^5 \mathcal{M}^T & \not{\partial} \end{array} \right) \quad (4.2.54)$$

La matrice di massa  $\mathcal{M}$  è data da:

$$\mathcal{M} = \left( \begin{array}{cc} M_\nu & 0 \\ 0 & M_l \end{array} \right) \quad (4.2.55)$$

dove  $M_\nu, M_e$  sono matrici di massa che possono essere espresse in termini di matrici dia-

gonali e della matrice di mixing di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa,

$$\begin{aligned} M_\nu &= \text{diag}(m_{\nu e}, m_{\nu \mu}, m_{\nu \tau}) \\ M_l &= C_{KM} \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \end{aligned}$$

Nel caso di singola generazione  $M_\nu$  ed  $M_l$  si riducono a semplici scalari  $m_\nu$ ,  $m_e$  e quindi la matrice di massa  $\mathcal{M}$  è una matrice  $6 \times 6$ .

Il procedimento che porta alla scrittura dell'azione segue esattamente le stesse linee viste in sezione 4.2. Il risultato finale è:

$$S_B = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + (\mathcal{D}\phi)^\dagger \mathcal{D}\phi + (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger)^2 \right]. \quad (4.2.56)$$

$$\begin{aligned} S_F &= \bar{\psi}_L(\not{\partial} + \not{A}_L)\psi_L + \bar{\psi}_L^c(\not{\partial} + \not{A}_L)\psi_L^c + \\ &+ \bar{\psi}_R(\not{\partial} + \not{B})\psi_R + \bar{\psi}_R^c(\not{\partial} + \not{B})\psi_R^c + \\ &+ [\bar{\psi}_L(\mathcal{M} + \phi)\psi_R + \bar{\psi}_L^c(\mathcal{M}^* + \phi)\psi_R^c + h.c.]. \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Anche qui per eliminare i gradi di libertà ridondanti e male accoppiati basta identificare  $\psi_{L,R} \equiv \psi_{L,R}^c$  e agire con l'operatore di proiezione  $P$  definito in (4.2.41). In questo modo l'azione finale risulterà:

$$\begin{aligned} S_F &= \bar{\psi}_L(\not{\partial} + \not{A}_L)\psi_L + \bar{\psi}_L^c(\not{\partial} + \not{B})\psi_L^c + \\ &+ [\bar{\psi}_L(\mathcal{M} + \phi)\psi_R + h.c.]. \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

In questo approccio geometrico al Modello Standard è possibile anche implementare un meccanismo dell'altalena che spieghi la grande differenza tra le masse dei fermioni e i rispettivi neutrini. L'operatore di Dirac infatti che tiene conto anche delle masse di Majorana è

$$\bar{\psi} D_F \psi = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_L & \bar{\psi}_R & \bar{\psi}_R^c & \bar{\psi}_L^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} & 0 & M_L \\ \mathcal{M}^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}^* \\ M_L^\dagger & 0 & \mathcal{M}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \\ \psi_R^c \\ \psi_L^c \end{pmatrix} \quad (4.2.59)$$

in questo modo infatti nella Lagrangiana si hanno i nuovi termini di massa:

$$\mathcal{L}_M = (\bar{\psi}_L M_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c M_L \psi_L). \quad (4.2.60)$$

Le matrici  $M_R$  devono accoppiare solo le componenti dei neutrini e quindi avranno la forma (per una singola generazione):

$$M_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.61)$$

dove  $\mathbf{m}_L$  è un termine di massa di Majorana. In questo modo la Lagrangiana di massa riferita ai termini di Majorana si riscrive,

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \mathbf{m}_L (\bar{\nu}_L \nu_L^c + \bar{\nu}_L^c \nu_L). \quad (4.2.62)$$

A questo punto è possibile implementare il meccanismo “seesaw” esattamente come esposto a partire dalla relazione (1.6.12).

#### 4.2.2 Invarianza di Gauge e Rinormalizzazione

Nella sezione 1.6.4 sono stati presentati i principali problemi legati alla descrizione degli spinori di Majorana nella struttura del Modello Standard. In particolare la rottura dell’invarianza di gauge causata dai termini di massa di Majorana viene riscontrata anche nell’ambito della geometria non commutativa. Nel linguaggio delle triple spettrali di Connes la perdita di invarianza di gauge avviene tramite violazione di uno degli assiomi principali delle triple spettrali: la condizione al primo ordine (3.4.5),

$$[[D, a], b^0] = 0, \quad (4.2.63)$$

dove  $b^0 = Jb^*J$ . E’ facile verificare infatti che l’introduzione della matrice di Majorana  $M_L$  nell’operatore di Dirac porta alla violazione di tale uguaglianza:

$$[D, a] = \begin{pmatrix} \not{q} & \gamma^5(\mathcal{M}B - q\mathcal{M}) & 0 & (M_L b^* - qM_L) \\ \gamma^5(\mathcal{M}^\dagger q - B\mathcal{M}^\dagger) & \not{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \not{b}^* \mathbb{I}_2 & 0 \\ (M_L^\dagger q - b^* M_L^\dagger) & 0 & 0 & \not{b}^* \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$b^0 = \begin{pmatrix} b' \mathbb{I}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b' \mathbb{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B'^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q'^* \end{pmatrix}$$

Si ha quindi,

$$[[D, a], b^0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (M_L b^* - q M_L) q'^* - b' \mathbb{I}_2 (M_L b^* - q M_L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (M_L^\dagger q - b^* M_L^\dagger) b' \mathbb{I}_2 - q'^* (M_L^\dagger q - b^* M_L^\dagger) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ad esempio una di queste due componenti è chiaramente diversa da zero.

Tale problema però può essere superato: in [14] vengono classificati gli operatori di Dirac compatibili con la condizione al primo ordine e quindi con l'invarianza di gauge; in particolare viene dimostrato che la matrice di massa  $D_F$ ,

$$D_F = \begin{pmatrix} \mathbb{M} & \mathbb{T} \\ \mathbb{T}^\dagger & \mathbb{M}^* \end{pmatrix} \quad (4.2.64)$$

con  $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$  deve presentare una matrice  $\mathbb{T}$  simmetrica. Nel nostro caso si ha

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & M_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.65)$$

che quindi non è compatibile con la condizione al primo ordine. La matrice  $\mathbb{T}$  giusta avrà la forma,

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} M_L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.66)$$

Per riprodurre ancora i termini di Majorana e di Dirac bisogna scambiare  $\psi_R^c \longleftrightarrow \psi_L^c$  cioè operare un cambio di base, mandando l'isospinore  $\psi \longrightarrow \tilde{\psi}$ ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \\ \psi_R^c \\ \psi_L^c \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \\ \psi_L^c \\ \psi_R^c \end{pmatrix} \quad (4.2.67)$$

In tal modo infatti i termini in  $D_F$  restituiranno gli accoppiamenti giusti per le masse di

Majorana e di Dirac:

$$\langle \tilde{\psi} | D_F \tilde{\psi} \rangle = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_L & \bar{\psi}_R & \bar{\psi}^c_L & \bar{\psi}^c_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} & M_L & 0 \\ \mathcal{M}^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ M_L^\dagger & 0 & 0 & \mathcal{M}^* \\ 0 & 0 & \mathcal{M}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \\ \psi_L^c \\ \psi_R^c \end{pmatrix} \quad (4.2.68)$$

$$= \bar{\psi}_L \mathcal{M} \psi_R + \bar{\psi}_R \mathcal{M}^\dagger \psi_L + \bar{\psi}^c_L \mathcal{M}^* \psi_R^c + \bar{\psi}^c_R \mathcal{M}^T \psi_L^c + \\ + \bar{\psi}_L M_L \psi_L^c + \bar{\psi}^c_L M_L^\dagger \psi_L. \quad (4.2.69)$$

Abbiamo quindi:

$$\langle \tilde{\psi} | D_F \tilde{\psi} \rangle = (\bar{\psi}_L \mathcal{M} \psi_R + \bar{\psi}^c_L \mathcal{M}^* \psi_R^c + h.c.) + (\bar{\psi}_L M_L \psi_L^c + h.c.). \quad (4.2.70)$$

Vediamo adesso in che modo il nuovo operatore di Dirac definisce un ulteriore campo scalare attraverso la connessione  $A \equiv \sum_i a_i [D, b_i]$ ,

$$A = \begin{pmatrix} q_i \not{\partial} q'_i & \gamma^5 q_i (\mathcal{M} B'_i - q'_i \mathcal{M}) & \gamma^5 q_i (M_L b'^*_i - q'_i M_L) & 0 \\ \gamma^5 (\mathcal{M}^\dagger q'_i - B'_i \mathcal{M}^\dagger) & B_i \not{\partial} B' & 0 & 0 \\ \gamma^5 b^*_i (M_L^\dagger q'_i - b'^*_i M_L^\dagger) & 0 & b^*_i \not{\partial} b'^*_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^*_i \not{\partial} b'^*_i \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} A_L & \gamma^5 (\phi - \phi_0) & \gamma^5 (\chi - \chi_0) & 0 \\ \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{B} & 0 & 0 \\ \gamma^5 (\chi^\dagger - \chi_0^\dagger) & 0 & \not{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \not{b} \end{pmatrix}, \quad (4.2.71)$$

dove la forma esplicita della matrice  $\chi$  è data da,

$$(\chi - \chi_0) = q_i (M_L b'^*_i - q'_i M_L) \\ = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ \chi_2 & 0 \end{pmatrix} M_L \quad (4.2.72)$$

con  $\chi_1, \chi_2$  scalari espressi in termini dei c-numeri  $b, x, y, x', y'$  che formano gli elementi dell'algebra  $q_i$  e  $b_i \mathbb{I}_2$ .

Nell'azione fermionica l'accoppiamento dei campi sarà espresso dalla matrice,

$$A + JAJ = \begin{pmatrix} \not{A}_L + \not{b} & \gamma^5 (\phi - \phi_0) & \gamma^5 (\chi - \chi_0) & 0 \\ \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) & \not{B} + \not{b} & 0 & \gamma^5 (\chi^\dagger - \chi_0^\dagger) \\ \gamma^5 (\chi^\dagger - \chi_0^\dagger) & 0 & \not{b} + \not{B} & \gamma^5 (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) \\ 0 & \gamma^5 (\chi - \chi_0) & \gamma^5 [(\phi - \phi_0)] & \not{b} + \not{A}_L \end{pmatrix} \quad (4.2.73)$$

Rispetto ad un modello privo di masse di Majorana in cui l'azione  $S_F^0$  ha la forma vista in (4.2.57) l'azione fermionica fornirà i seguenti accoppiamenti aggiuntivi:

$$S_F = S_F^0 + \bar{\psi}_L [M_L + \gamma^5 (\chi - \chi_0)] \psi_L^c + h.c. , \quad (4.2.74)$$

Commutando  $\gamma^5$  e  $\chi$  e facendo agire  $\gamma^5$  su  $\psi_L^c$  si ottiene,

$$S_F = S_F^0 + \bar{\psi}_L [M_L + (\chi - \chi_0)] \psi_L^c + h.c. , \quad (4.2.75)$$

Osserviamo che il nuovo campo  $\chi$  è un tripletto del gruppo  $SU(2)$  a differenza del campo  $\phi$  che è un doppietto. Basta infatti verificare la trasformazione del nuovo campo  $\chi$  definita dalle equazioni (3.6.13) e (3.6.10),

$$D_A \longrightarrow D_A^u = U D U^* + U A U^* + U (JAJ) U^* \quad (4.2.76)$$

$$\psi \longrightarrow \psi^u = U \psi \quad (4.2.77)$$

con  $U = u J u J^*$ . La forma di  $U$  è espressa dalla matrice,

$$U = \begin{pmatrix} q^u \otimes \mathbb{I}_2 b^{*u} & & & \\ & B^u \otimes \mathbb{I}_2 b^{*u} & & \\ & & \mathbb{I}_2 b^{*u} \otimes q^u & \\ & & & \mathbb{I}_2 b^{*u} \otimes B^u \end{pmatrix} \quad (4.2.78)$$

il campo  $\tilde{\psi}$  trasformerà quindi:

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \\ \psi_L^c \\ \psi_R^c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} q^u \otimes \mathbb{I}_2 b^{*u} \psi_L \\ B^u \otimes \mathbb{I}_2 b^{*u} \psi_R \\ \mathbb{I}_2 b^{*u} \otimes q^u \psi_L^c \\ \mathbb{I}_2 b^{*u} \otimes B^u \psi_R^c \end{pmatrix} \quad (4.2.79)$$

in accordo con il fatto che gli isospinori  $\psi_L$  e  $\psi_L^c$  trasformano nella fondamentale di  $SU(2)$  e  $U(1)$  mentre  $\psi_R$  e  $\psi_R^c$  sono dei singoletti di  $SU(2)$ . La connessione  $A$  si trasformerà in

$UAU^*$ ,

$$A^u = \begin{pmatrix} q^u b^{*u} A_L q^{*u} b^u & q^u b^{*u} (\phi - \phi_0) B^{*u} b^u & q^u b^{*u} (\chi - \chi_0) q^{*u} b^u \\ B^u b^{*u} (\phi^\dagger - \phi_0^\dagger) q^{*u} b^u & B^u b^{*u} \not{B} B^{*u} b^u & \\ q^{*u} b^u (\chi^\dagger - \chi_0^\dagger) q^u b^{*u} & & b^{*u} q^u \not{b} b^u q^{*u} \\ & & & b^{*u} B^u \not{b} b^u B^{*u} \end{pmatrix},$$

da cui si vede che il campo di Higgs  $\phi$  trasforma nella fondamentale di  $SU(2)$  e di  $U(1)$  in accordo con l'interpretazione standard del campo di Higgs, mentre il campo  $\chi$  trasforma come un tripletto di  $SU(2)$ , in modo che il bilineare  $\bar{\psi}_L \chi \psi_L^c$  risulti uno scalare invariante. Possiamo definire allora un secondo campo di Higgs  $\hat{\chi}$  in questa nostra teoria, tale che  $M_L + (\chi - \chi_0) \equiv \hat{\chi} M_L$

$$\begin{aligned} [M_L + \chi - \chi_0] &= M_L + \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ \chi_2 & 0 \end{pmatrix} M_L = \left[ \mathbb{I} + \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ \chi_2 & 0 \end{pmatrix} \right] M_L = \begin{pmatrix} 1 + \chi_1 & 0 \\ \chi_2 & 1 \end{pmatrix} M_L = \\ &= m_L \begin{pmatrix} 1 + \chi_1 & 0 \\ \chi_2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m_L \hat{\chi}_1 & 0 \\ m_L \hat{\chi}_2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \hat{\chi} M_L. \end{aligned} \quad (4.2.80)$$

L'azione fermionica si riscrive:

$$S_F = S_F^0 + \bar{\psi}_L \hat{\chi} M_L \psi_L^c + h.c. , \quad (4.2.81)$$

Una rottura di simmetria sul campo  $(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2)$  conferisce le masse di Majorana ai neutrini. Infatti scegliendo una gauge in cui  $\hat{\chi}_2 = 0$  si ha

$$\bar{\psi}_L \hat{\chi} M_L \psi_L^c = m_L \bar{\nu}_L \hat{\chi}_1 \nu_L^c \quad (4.2.82)$$

Una rottura di simmetria  $\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \hat{\chi}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \tilde{H} \\ 0 \end{pmatrix}$  genererà i termini desiderati,

$$\mathcal{L}_{mass}^M = \frac{m_L v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \nu_L^c + h.c. . \quad (4.2.83)$$

Tale formulazione non comporta alcun problema di rinormalizzabilità, visto che il campo  $\chi$  compare in forma lineare nella Lagrangiana di massa. Inoltre viene superato anche il problema dell'invarianza di gauge legata alla violazione della condizione al primo ordine.

**Lagrangiana Bosonica.** Vediamo in che modo si modifica la parte bosonica dell'azione con l'aggiunta del nuovo campo. Come già visto nelle applicazioni precedenti basta scrivere

il tensore di curvatura  $\theta = dA + A^2$ , quadrarlo e prenderne la traccia. Il risultato finale è

$$\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}F_L^{\mu\nu} + (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger) + (\chi\chi^\dagger - \chi_0\chi_0^\dagger) & -\gamma^5\mathcal{D}\phi & -\gamma^5(\mathcal{D}\chi) & \gamma^5\chi\mathcal{M}^\dagger \\ \gamma^5(\mathcal{D}\phi)^\dagger & \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (\phi^\dagger\phi - \phi_0^\dagger\phi_0) & -\phi^\dagger\chi & 0 \\ \gamma^5(\mathcal{D}\chi)^\dagger & -\chi^\dagger\phi & \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}b^{\mu\nu} + (\chi\chi^\dagger - \chi_0\chi_0^\dagger) & 0 \\ \mathcal{M}^*\gamma^5\chi^\dagger & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}b^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

Con  $\mathcal{D}\chi \equiv -(\not{\partial} + A)\chi + \chi\not{b}$ . Da cui,

$$\begin{aligned} S_B &= \frac{1}{\mathcal{N}}\text{tr}\theta^2 \\ &= \int d^4x \left[ \frac{1}{4}\text{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + (\mathcal{D}\phi)^\dagger\mathcal{D}\phi + (\phi\phi^\dagger - \phi_0\phi_0^\dagger)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{D}\chi)^\dagger\mathcal{D}\chi + (\chi\chi^\dagger - \chi_0\chi_0^\dagger)^2 + \phi^\dagger\chi\chi^\dagger\phi + \chi\mathcal{M}^T\mathcal{M}^*\chi^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (4.2.84)$$

In analogia al campo di Higgs compaiono dei termini quadratici cinetici e quartici di potenziale. In aggiunta abbiamo un termine di accoppiamento tra i due bosoni.

### 4.3 L'azione bosonica spettrale

Recentemente, in [8] Connes ha proposto una nuova interpretazione dei gradi di libertà di gauge visti come “fluttuazioni interne” di una geometria non commutativa. Queste fluttuazioni sostituiscono l'operatore  $D$ , che definisce la “geometria esterna”, con l'operatore  $D_A = D + A + JAJ^*$ , dove  $A$  è il potenziale di gauge e  $J$  è la struttura reale. Di fatto esiste un'azione puramente geometrica (spettrale) che dipende solo dallo spettro dell'operatore  $D_A$  che per un'opportuna algebra (la geometria non commutativa del Modello Standard vista in sezione 4.2) restituisce il Modello Standard accoppiato alla Gravità.

Per arrivare a descrivere i gradi di libertà interni accoppiati a quelli gravitazionali è necessario sostituire l'operatore  $D$  con  $D_A$ ,

$$D \rightarrow D_A = D + A + JAJ^* \quad (4.3.1)$$

dove  $A$  è un potenziale di gauge arbitrario, vale a dire un operatore Hermitiano qualsiasi,  $A^* = A$ , della forma

$$A = \sum_j a_j [D, b_j], \quad a_j, b_j \in \mathcal{A}. \quad (4.3.2)$$

La dinamica dei gradi di libertà gravitazionali accoppiati con i gradi di libertà interni è governata da un principio di azione spettrale: la parte fermionica dell'azione rimane invariata mentre la parte bosonica è “puramente geometrica” e dipende solo dallo spettro

dell'operatore autoaggiunto  $D_A$ , [9, 10]

$$S_B(D, A) = \text{tr}_{\mathcal{H}}\left(\chi \frac{D_A^2}{\Lambda^2}\right) \quad (4.3.3)$$

dove  $\text{tr}_{\mathcal{H}}$  è l'usuale traccia definita nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\Lambda$  è un "parametro di taglio" e  $\chi$  è una funzione a gradino opportuna che taglia tutti gli autovalori di  $D_A^2$  maggiori di  $\Lambda^2$ .

Il calcolo dell'azione (4.3.3) concettualmente è semplice ma tecnicamente richiede la conoscenza di svariati strumenti: il quadrato dell'operatore di Dirac si calcola con la formula di Lichnèrowicz vista in (3.3.20) e la traccia con opportune espansioni in potenze del parametro  $\Lambda$  che fanno uso del "nucleo di calore" [11]. I punti principali sono identità generali valide per operatori differenziali ellittici di grado  $d$  su una varietà  $m$ -dimensionale  $M$  con metrica  $g$ , (indicando con  $O \equiv D_A^2/\Lambda^2$ )

$$\text{tr}(O^{-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \text{tr} e^{-tO} t^{-s}, \quad \text{Re}(s) \geq 0, \quad (4.3.4)$$

e la traccia  $\text{tr} e^{-tO}$  è definita dall'espansione del "nucleo di calore",

$$\text{tr} e^{-tO} = \sum_{n \geq 0} t^{\frac{n-m}{d}} \int_M \sqrt{g} dx a_n(x; O). \quad (4.3.5)$$

Le funzioni  $a_n(x; O)$  sono dette coefficienti di Seeley-de Witt e la loro espressione, così come il metodo di calcolo si trovano in [11]. La traccia (4.3.3) dipenderà quindi dai coefficienti  $a_n(x; D^2/\Lambda^2)$  e dai "momenti" della funzione  $\chi$ :

$$\text{tr}(\chi O) = \sum_{n \geq 0} f_n a_n(x; O), \quad (4.3.6)$$

dove i coefficienti  $f_n$  sono dati da

$$f_0 = \int_0^{\infty} du \chi(u) u \quad (4.3.7)$$

$$f_2 = \int_0^{\infty} du \chi(u) \quad (4.3.8)$$

$$f_{2(n+2)} = (-1)^n \chi^{(n)}(0), \quad n \geq 0, \quad (4.3.9)$$

$\chi^{(n)}$  denota le derivate  $n$ -esime della funzione  $\chi$  rispetto al suo argomento. Se  $\chi$  è prossima alla funzione caratteristica dell'intervallo  $[0, 1]$  possiamo assumere  $f_2 = f_4 = 2f_0 = 1$  e in questo caso l'azione spettrale contiene solo gli autovalori di  $D_A^2$  minori del cut-off  $\Lambda^2$ . La formula di Lichnèrowicz (3.3.20) fornisce il quadrato dell'operatore di Dirac

$$D^2 = \nabla^S + \frac{1}{4}R, \quad (4.3.10)$$

con  $R$  scalare di Ricci della metrica  $g^{\mu\nu}$  e  $\nabla^S$  operatore Laplaciano liftato al fibrato degli spinori,

$$\nabla^s = -g^{\mu\nu}(\nabla_\mu^s \nabla_\nu^s - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho^s). \quad (4.3.11)$$

Quindi l'operatore  $O$  in 4.3.3 contiene il Laplaciano e implicitamente informazioni sulla metrica. Dovrebbe sembrare quindi poco sorprendente il fatto che l'azione contenga la curvatura Riemanniana, i simboli di Christoffel, etc. La cosa più interessante però è il fatto che considerando l'algebra e l'operatore di Dirac della sezione 4.2, si ottengono tutti gli ingredienti del Modello Standard più la Gravità. Il calcolo è piuttosto lungo [13, 12, 6] e il risultato finale è:

$$S_B = \int_M \sqrt{g} dx \left( I_1 \Lambda^2 + I_2 + I_3 \Lambda^{-2} + o\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \right) \quad (4.3.12)$$

Il primo termine è una costante:

$$I_1 = \frac{45}{8\pi^2}, \quad (4.3.13)$$

e fornisce la costante cosmologica. Il secondo termine è

$$I_2 = \frac{1}{16\pi^2}(-15R - 8K_1|\phi|^2), \quad (4.3.14)$$

con  $R$  scalare di Ricci e  $K_1 = \text{tr}(3M_u^\dagger M_u + 3M_d^\dagger M_d + M_e^\dagger M_e)$ . Le  $M$  sono le matrici di massa per i quark di tipo up e down e per i leptoni. Questo termine contiene la Lagrangiana di Einstein-Hilbert e il termine quadratico del potenziale di Higgs. I termini rimanenti del potenziale e dell'energia cinetica per i campi di gauge sono racchiusi nell'ultimo addendo dell'ordine  $\Lambda^{-2}$ :

$$I_3 = \frac{1}{16\pi^2} \left( 240F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 12G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + 4K_1 |D_A^\mu \phi|^2 - \frac{2}{3}K_1 R |\phi|^2 + K_2 |\phi|^4 - \frac{9}{4}C^2 \right) \quad (4.3.15)$$

+termini di superficie .

dove  $F$  e  $G$  sono i campi di gauge del gruppo abeliano e non abeliano,  $K_2 = \text{tr}(3(M_u^\dagger M_u)^2 +$

$3(M_d^\dagger M_d)^2 + 3(MM_e)^2$  e  $C^2$  è il quadrato del tensore di Weyl definito come,

$$C_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\mu\nu\sigma\rho} - g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho} + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R. \quad (4.3.16)$$

Quindi l'azione finale riproduce tutti i termini del Modello Standard accoppiato alla Gravità, più alcuni termini inevitabili quadratici nella curvatura.

# Conclusioni

Da questa tesi emerge in modo spero abbastanza convincente il fatto che la geometria non commutativa fornisce un potente formalismo matematico utile alla descrizione del Modello Standard. Da essa si è potuto ricavare infatti, con un approccio totalmente algebrico, una descrizione soddisfacente del Modello Standard, sia nella sua parte riguardante il modello elettrodebole che spiega l'interazione tra leptoni, sia il modello dell'interazione forte che descrive l'interazione tra quark. In particolare viene predetta in maniera del tutto naturale la presenza del campo di Higgs che permea lo spazio-tempo e che consente la rottura di simmetria che conferisce massa alle particelle elementari. In geometria non commutativa esiste una sola possibile variabile, l'operatore di Dirac, che nel caso commutativo coincide con la metrica. Le sue fluttuazioni contengono le variabili relative alle forze, bosoni di gauge e Higgs compresi. Tale campo di Higgs viene derivato in maniera automatica come grado di libertà interno della teoria, al contrario dell'approccio standard in cui viene aggiunto a mano per ottenere il meccanismo desiderato.

Inoltre tale formalismo consente di spiegare coerentemente al Modello Standard la presenza delle masse di Majorana per i neutrini che possono subire poi il meccanismo dell'altalena, senza violare alcuna simmetria di gauge e senza portare problemi di rinormalizzabilità come si ha invece in un approccio standard. Inoltre la presenza delle masse di Majorana nell'operatore di Dirac porta alla predizione di un nuovo bosone di Higgs, diverso rispetto a quello del modello di Weinberg-Salam, che esisterebbe ad una scala di energia maggiore rispetto a quella elettrodebole e che conferirebbe massa di Majorana sinistrorsa o destrorsa rispettivamente ai neutrini attivi o sterili.

Infine la geometria non commutativa, con la nuova teoria di Connes sull'azione spettrale che in questo lavoro di tesi è stato solo accennato nella parte finale, consente una descrizione accoppiata del Modello Standard e della Gravitazione in uno schema che può essere sintetizzato come in fig 4.3.1.

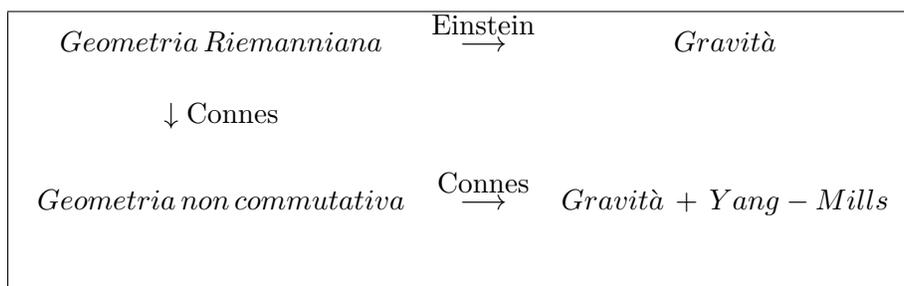


Figura 4.3.1: Derivazione del Modello Standard e della Gravitazione

La geometria non commutativa contiene quindi soluzioni eleganti a problemi di vecchia data della fisica fondamentale e propone strategie concrete per affrontare quelli rimanenti. Tra i suoi limiti vi è l'impossibilità di costruire teorie di grande unificazione con gruppi più grandi contenenti quello del Modello Standard: sebbene siano state classificate le triple spettrali non commutative non è possibile trovare una teoria di grande unificazione che soddisfi contemporaneamente i vincoli sulle rappresentazioni dovuti a considerazioni fisiche e matematiche e mantenere lo stesso spazio di Hilbert fermionico senza l'aggiunta di particelle extra. Tuttavia questa può essere vista anche come potenzialità indicando il fatto che il modello standard potrebbe emergere in maniera naturale da richieste matematiche.

# Appendice A

## Elementi di teoria dei gruppi

La teoria dei gruppi è un formalismo estremamente utile per spiegare le simmetrie in fisica. Nel seguito ne diamo alcuni concetti di base.

Un *gruppo* è un insieme  $G$  munito di una legge di composizione che ad ogni coppia di elementi  $g_1, g_2 \in G$  associa un terzo elemento, appartenente a  $G$ , e che rispetta le seguenti proprietà:

1. se  $g_1, g_2 \in G$  allora  $g_3 = g_1 g_2 \in G$ ; *legge di composizione del gruppo*
2. se  $g_1, g_2, g_3 \in G$  allora  $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3 \in G$ ; *associatività*
3.  $\exists \mathbb{I} : \forall g \in G \mathbb{I}g = g\mathbb{I} = g$ ; *elemento neutro*
4.  $\forall g \in G \exists g^{-1} | gg^{-1} = g^{-1}g = \mathbb{I}$  *inverso*.

Un gruppo si dice **finito** se possiede un numero finito di elementi, altrimenti si dice infinito; **compatto** se la varietà dei parametri che esso contiene è compatta. Il numero di elementi di un gruppo finito  $G$  si chiama **ordine** di  $G$ . Un gruppo si dice **abeliano** se la legge di composizione è commutativa, ovvero se dati  $g_1, g_2 \in G$ , risulta  $g_1 g_2 = g_2 g_1$ .

Si definiscono **gruppi di Lie** quei gruppi continui generati da un'algebra di Lie, uno spazio la cui base consiste di  $N$  generatori  $L_a$  ( $a = 1, \dots, N$ ) chiusi rispetto alla regola di commutazione:

$$[L_a, L_b] = iC_{ab}^c L_c. \quad (\text{A.0.1})$$

Le costanti  $C_{ab}^c$  sono numeri reali, dette *costanti di struttura*, che caratterizzano completamente l'algebra di Lie. Un elemento di  $G$  si può scrivere nella forma:

$$g = e^{i\omega_a L_a}, \forall g \in G \quad (\text{A.0.2})$$

dove  $\omega_a$  sono numeri reali arbitrari. Le costanti di struttura  $C_{ab}^c$  del gruppo sono determinate a seconda della scelta dei generatori del gruppo stesso. Ci sono però delle proprietà universali:

$$\begin{cases} C_{ab}^c = -C_{ba}^c & \text{dalla (A.0.1)} \\ C_{ab}^n C_{nc}^d + C_{bc}^n C_{na}^d + C_{ca}^n C_{nb}^d = 0 & \text{dalle identità di Jacobi per i generatori} \end{cases} \quad (\text{A.0.3})$$

Se tutte le costanti di struttura sono nulle allora il gruppo  $G$  è abeliano e sarà esprimibile come prodotto diretto di  $N$  gruppi  $U(1)$  o alternativamente come spazio euclideo  $\mathbb{R}^N$ . Se non tutte le costanti di struttura sono nulle il gruppo è non abeliano. Il gruppo di Lie non abeliano di dimensione minore è  $SU(2)$ .

Una **rappresentazione** di  $G$  su uno spazio vettoriale  $V$  è una mappa  $\pi$  che agisce sugli elementi di  $G$  attraverso operatori lineari. Essa agisce su  $G$  e termina in  $GL(V)$ , che è il gruppo generale lineare di  $V$ , ovvero l'insieme di tutte le *matrici invertibili* con elementi in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{C}$ . Il gruppo è detto **speciale** se il determinante di tali matrici è pari a  $+1$ . Una rappresentazione  $\pi$  di  $G$  su  $V$ ,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\pi(\mathbb{I}) = 1$ , dove  $1$  è l'operatore identità nello spazio  $GL(V)$ .
2.  $\forall g_1, g_2 \in G$ ,  $\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1g_2)$ , ovvero la legge di composizione del gruppo è applicata alla legge di moltiplicazione naturale nello spazio lineare sul quale gli operatori agiscono.
3.  $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}$  cioè la rappresentazione dell'inverso di un elemento  $g$  coincide con l'inverso della rappresentazione di  $g$ .

Se la trasformazione  $\pi$  è anche *iniettiva* allora la rappresentazione sarà detta *fedele*. La *dimensione* di una rappresentazione è la dimensione dello spazio vettoriale sul quale essa agisce. La rappresentazione fedele con dimensione minore è detta **rappresentazione fondamentale** del gruppo.

Due rappresentazioni  $N$ -dimensionali  $\pi$  e  $\pi'$  si dicono **equivalenti** se esiste una matrice  $C$  invertibile  $N \times N$  tale che  $\pi(g) \rightarrow \pi'(g) = C\pi(g)C^{-1}$  per ogni  $g \in G$ . E' immediato verificare che i due operatori hanno stessa legge di composizione, infatti:

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1g_2) \Rightarrow \pi'(g_1)\pi'(g_2) = C\pi(g_1)C^{-1}C\pi(g_2)C = C\pi(g_1g_2)C^{-1} = \pi'(g_1g_2).$$

Una rappresentazione è **riducibile** se esiste un sottospazio  $W \subset V$  che risulta invariante sotto l'applicazione degli operatori della rappresentazione di  $G$ , ovvero se l'azione di ogni  $\pi(g)$  su qualsiasi vettore del sottospazio  $W$  è ancora nel sottospazio  $W$ , in formule  $\pi(g)W \subset$

$W, \forall g \in G$ . Una rappresentazione è irriducibile se non è riducibile. Una rappresentazione è **completamente riducibile** se è equivalente ad una rappresentazione i cui elementi di matrice hanno una forma diagonale a blocchi:

$$\begin{pmatrix} \pi_1(g) & \cdots & & \\ \vdots & \pi_2(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pi_n(g) \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.4})$$

in cui  $\pi_i(g)$  è irriducibile per ogni  $i$ .

Una rappresentazione completamente riducibile  $\pi_{c.r.}(g)$  può essere riscritta come la somma diretta delle sottorappresentazioni  $D_i(g)$  ovvero riscrivendo la rappresentazione originaria in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili, dette **multipletti** (le rappresentazioni dei gruppi vengono invece chiamate super-multipletti):

$$\pi_{c.r.}(g) = \oplus_{i=1}^n \pi_i(g) \quad (\text{A.0.5})$$

Da ciò consegue un'ulteriore definizione di rappresentazione completamente riducibile: essa è una rappresentazione che può essere scritta come somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Vediamo qualche esempio di quanto introdotto fino ad ora.

**Esempio 37.** *Gruppo ciclico*

Si denota con  $\mathbb{Z}_n$  il gruppo ciclico di  $n$  elementi. Si può pensare  $\mathbb{Z}_n$  come l'insieme  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  con legge di moltiplicazione l'addizione modulo  $n$  ed elemento neutro 0. Oppure equivalentemente l'insieme  $\{1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \dots, e^{2\pi(n-1)/n}\} = \{e^{2\pi i k/n}\}_{k=0,1,\dots,n-1}$  con elemento neutro 1. Il gruppo ciclico appena definito dipende da un solo parametro  $k$  che può assumere solo valori discreti. Gruppi di questo tipo si dicono *discreti*.

**Esempio 38.** *Gruppi matriciali*

Di grande risalto in fisica sono i gruppi matriciali. Questi sono un esempio di gruppi di Lie. Partiamo dal *gruppo generale lineare*  $GL(n, \mathbb{C})$  costituito dalle matrici  $n \times n$  invertibili a valori complessi. La legge di moltiplicazione è l'ordinaria moltiplicazione tra matrici e l'elemento neutro è la matrice identità  $\mathbb{I}_n$ . Questo gruppo avrà  $2n^2$  parametri reali. Ci sono molti importanti sottogruppi di  $GL(n, \mathbb{C})$ . In particolare il *gruppo speciale*  $SL(n, \mathbb{C})$  costituito dalle sole matrici a determinante unitario ( $2n^2 - 1$  parametri reali). Il *gruppo ortogonale*  $O(n)$  costituito dalle matrici reali  $n \times n$  tali che  $gg^T = \mathbb{I}, \forall g \in O(n)$ . Il gruppo

ortogonale speciale  $SO(n)$  che contiene i soli elementi di  $O(n)$  con determinante unitario, e che descrive le rotazioni nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^n$  ( $n(n-1)/2$  parametri reali). Il *gruppo di Lorentz*  $O(1,3)$  costituito da matrici  $g$ ,  $4 \times 4$  tali che  $g\eta g^T = \eta$  con  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Il *gruppo unitario*  $U(n)$  i cui elementi sono matrici  $n \times n$  tali che  $gg^\dagger = g^\dagger g = \mathbb{I}$  ( $n^2$  parametri) e il corrispondente gruppo speciale unitario  $SU(n)$  con determinante unitario ( $n^2 - 1$  parametri).

Osserviamo che i gruppi matriciali sono sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^{2n^2}$  e quindi è possibile parlare di compattezza. Ad esempio per il gruppo  $U(1)$  la varietà associata al parametro è un cerchio in  $\mathbb{R}^2$  e quindi  $U(1)$  è compatto. Lo stesso per  $SO(2)$  che è localmente isomorfo ad  $U(1)$ . Il gruppo  $SO(3)$  i cui 3 parametri variano su una sfera, è anche esso compatto. Il gruppo di Lorentz invece non è compatto visto che la varietà descritta dai suoi parametri non è compatta, essendo una linea aperta con  $\frac{v}{c} \equiv \beta \in [0, 1[$ .

Una **rappresentazione unitaria** è una rappresentazione le cui matrici  $\pi(g)$  sono unitarie ( $\pi^\dagger = \pi^{-1}$ ). Un teorema chiave stabilisce che *tutte le rappresentazioni unitarie e irriducibili di un gruppo compatto sono finito dimensionali*. Se allora accettiamo la definizione di particelle elementari come i vettori di base di rappresentazioni unitarie e irriducibili di gruppi di simmetria, capiamo perché Yang e Mills si limitano a scegliere soltanto gruppi compatti. In questo modo infatti il numero di particelle elementari risulta finito. Questi vettori di base sono costituiti dalle *rappresentazioni fondamentali* del gruppo, in quanto dal prodotto tensore di essi si possono derivare le rappresentazioni di ordine maggiore. Le particelle fisiche costituite da stati legati di particelle elementari saranno descritte quindi dai prodotti tensori delle rappresentazioni fondamentali: il prodotto tensore di due rappresentazioni  $\pi_1$  e  $\pi_2$  del gruppo  $G$  su spazi rispettivamente  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  è la rappresentazione unitaria  $\pi_1 \otimes \pi_2$  definita su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \ni \psi_1 \otimes \psi_2$  da

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(\psi_1 \otimes \psi_2) \equiv \pi_1(g)\psi_1 \otimes \pi_2(g)\psi_2 \quad (\text{A.0.6})$$

## A.1 Gruppi SU(N)

Lie e Cartan hanno classificato in quattro sequenze tutti i gruppi compatti di Lie:  $e_6$

$$\begin{aligned} A_n &= SU(n+1) \\ B_n &= SO(2n+1) \\ C_n &= Sp(2n) \\ D_n &= SO(2n) \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

e cinque gruppi eccezionali chiamati  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ . Di speciale interesse in fisica è il gruppo  $SU(N)$ , che è il gruppo delle matrici complesse  $N \times N$ , unitarie speciali. Un elemento  $U \in SU(N)$  soddisfa le proprietà:

$$U^\dagger U = 1 \text{ (unitaria)} \tag{A.1.2}$$

$$\det U = 1 \text{ (speciale)} \tag{A.1.3}$$

Tenendo conto del numero di vincoli di queste equazioni sappiamo che il gruppo  $SU(N)$  ha  $N^2 - 1$  parametri reali.

Una matrice unitaria può essere rappresentata come esponenziazione di una matrice Hermitiana  $H$  ( $H^\dagger = H$ ):

$$U = e^{iH}. \tag{A.1.4}$$

Siccome ci sono  $N^2 - 1$  matrici indipendenti Hermitiane  $N \times N$ , possiamo anche scrivere:

$$U = \exp \left( i \sum_{i=1}^{N^2-1} \theta^a \tau^a \right) \tag{A.1.5}$$

dove  $\tau^a$  sono matrici Hermitiane indipendenti, generatori del gruppo  $SU(N)$  con algebra:

$$[\tau^a, \tau^b] = i f^{abc} \tau^c. \tag{A.1.6}$$

Per creare rappresentazioni irriducibili di  $SU(N)$  postuliamo l'esistenza di  $N$  campi complessi  $\phi^i$  e  $\psi_i$  che trasformano come,

$$\phi^i \rightarrow U_j^i \phi^j \tag{A.1.7}$$

$$\psi_i^* \rightarrow \psi_j^* (U^\dagger)_i^j \tag{A.1.8}$$

in modo che la quantità  $\psi_i^* \phi^i$  risulta un invariante per trasformazioni di  $SU(N)$ . Di fatto

possiamo usare quest'ultima come definizione alternativa del gruppo; vale a dire  $SU(N)$  consiste di tutte quelle trasformazioni complesse con determinante unitario che lasciano invariata la quantità  $\psi_i^* \phi^i$ . Diremo allora che  $\phi^i$  trasformano secondo la rappresentazione fondamentale del gruppo. Il nome è appropriato visto che possiamo derivare le rappresentazioni di ordine maggiore prendendo i prodotti tensoriali della rappresentazione fondamentale. Tensori di ordine maggiore trasformano esattamente come il prodotto di varie rappresentazioni fondamentali:

$$T_{j_1 j_2 \dots j_N}^{i_1 i_2 \dots i_M} \rightarrow (U_{k_1}^{i_1} U_{k_2}^{i_2} \dots U_{k_M}^{i_M}) (U_{j_1}^{\dagger l_1} U_{j_2}^{\dagger l_2} \dots U_{j_N}^{\dagger l_N}) T_{l_1 l_2 \dots l_N}^{k_1 k_2 \dots k_M} \quad (\text{A.1.9})$$

In generale tali tensori sono riducibili e per trovare le rappresentazioni irriducibili si possono usare due metodi: o prendere le combinazioni simmetriche e antisimmetriche degli indici oppure usare i tableaux di Young, discorso che però non approfondiremo in questa sede.

Un'ipotesi fondamentale del Modello Standard consiste nello scegliere le particelle elementari, quark e leptoni, come multipletti di *rappresentazioni fondamentali* del gruppo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Per una teoria di Yang-Mills generica questa scelta non è obbligatoria. Ad esempio nella Teoria della Grande Unificazione, in cui il gruppo di simmetria è un gruppo  $SU(5)$ , le particelle fondamentali vengono sistemate nella rappresentazione  $\mathbf{15} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{10}$ .

# Appendice B

## Algebre

Uno  $*$ -*morfismo* tra due algebre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  è una trasformazione lineare  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  che riproduce la legge di moltiplicazione e l'involuzione dell'algebra:

$$\begin{aligned}\pi(ab) &= \pi(a)\pi(b) \\ \pi(a^*) &= \pi(a)^*, \quad \forall a \in \mathcal{A}\end{aligned}\tag{B.0.1}$$

Una *rappresentazione*  $\pi$  di una  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è uno  $*$ -*morfismo* che manda  $\mathcal{A}$  nello spazio degli operatori lineari limitati su  $\mathcal{H}$ ,

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})\tag{B.0.2}$$

ed è un modo per scrivere l'algebra astratta  $\mathcal{A}$  concretamente come operatore.

Una *rappresentazione* è *fedele* quando lo  $*$ -*morfismo*  $\pi$  è iniettivo cioè il cui kernel è il banale sottogruppo  $\{0\}$  costituito solo dall'elemento neutro dell'algebra. Ricordiamo che il kernel di una trasformazione  $\pi$  da un insieme  $A$  ad un insieme  $B$  è definito come  $\ker(\pi) = \{a \in A \mid \pi(a) = \text{elemento neutro di } B\}$ .

Una *rappresentazione* è detta *irriducibile* se lo spazio  $\mathcal{H}$  non contiene sottospazi chiusi invarianti sotto l'azione di  $\pi$  diversi da  $\{0\}$  e  $\mathcal{H}$  stesso. Si prova che una rappresentazione è irriducibile se e solo se il commutante di  $\pi(a)$ , cioè l'insieme di elementi di  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  che commutano con ciascun elemento di  $\pi(a)$ , consiste di multipli dell'operatore identità. Da un punto di vista matriciale una rappresentazione irriducibile non è scrivibile come matrice a blocchi

Un ideale sinistro (rispettivamente ideale destro)  $\mathcal{I}$  dell'algebra  $\mathcal{A}$  è un sottospazio di

$\mathcal{A}$  tale che:

$$\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{I} \Rightarrow ab \in \mathcal{I} \text{ (rispettivamente } ba \in \mathcal{I}) \quad (\text{B.0.3})$$

Un ideale che risulti sia destro che sinistro è detto *ideale doppio*. L'ideale  $\mathcal{I}$  è massimale se non esistono altri ideali in cui  $\mathcal{I}$  è contenuto. Un esempio di ideale è l'insieme delle funzioni a valori nulli in un intervallo  $[a, b]$ : qualsiasi funzione moltiplicata per un elemento di tale insieme restituisce ancora un elemento dell'insieme.

Un ideale è automaticamente un'algebra. Se l'algebra  $\mathcal{A}$  è involutiva allora ogni *\*-ideale*, cioè un ideale che contiene l'involuzione di ogni suo elemento, risulta automaticamente doppio. La *C\*-algebra*  $\mathcal{A}$  è detta *semplice* se non contiene ideali doppi non banali.

Un ideale doppio  $\mathcal{I}$  è detto *essenziale* in  $\mathcal{A}$  se nessun altro ideale in  $\mathcal{A}$  ha intersezioni non nulle con esso. Un sottospazio  $\mathcal{I}$  della *C\*-algebra*  $\mathcal{A}$  è detto *primitivo* se è il kernel di una rappresentazione irriducibile:

$$\forall \pi \text{ di } \mathcal{A}, \mathcal{I} = \ker(\pi) \quad (\text{B.0.4})$$

Osserviamo che  $\mathcal{I}$  risulta automaticamente un ideale doppio. L'insieme  $\text{Prim } \mathcal{A}$  di tutti gli ideali primitivi di  $\mathcal{A}$  giocherà un ruolo fondamentale nella costruzione degli spazi topologici.

L'insieme risolvete  $r(a)$  di un elemento  $a \in \mathcal{A}$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  tale che

$$r(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (a - \lambda \mathbb{I}) \text{ è invertibile in } \mathcal{A}\} \quad (\text{B.0.5})$$

per ogni  $\lambda$  l'operatore inverso  $(a - \lambda \mathbb{I})^{-1}$  è detto risolvete di  $a$  in  $\lambda$ .

Il complemento dell'insieme  $r(a)$  in  $\mathbb{C}$  costituisce lo spettro  $\sigma(a)$  di  $a$ , perciò

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (a - \lambda \mathbb{I}) \text{ non è invertibile in } \mathcal{A}\} \quad (\text{B.0.6})$$

Se  $\mathcal{A}$  è una *C\*-algebra* lo spettro di ogni suo elemento  $a$  è un sottoinsieme compatto non vuoto di  $\mathbb{C}$ . Il *raggio spettrale*  $\rho(a)$  di un elemento  $a \in \mathcal{A}$  è dato da

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\} \quad (\text{B.0.7})$$

Per una *C\*-algebra* la norma è univocamente determinata dalla struttura algebrica data dal raggio spettrale  $\|a\|^2 = \rho(a^*a)$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$ .

In una *\*-algebra*  $\mathcal{A}$  ogni elemento  $a$  è detto *normale* se  $a^*a = a a^*$ . E' detto *autoaggiunto* se  $a = a^*$ . In una *C\*-algebra* lo spettro di un operatore autoaggiunto è reale ed  $\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$   $\sigma(a^2) \subseteq [0, \|a\|^2]$ . Una *proiezione* è un elemento autoaggiunto di  $\mathcal{A}$ ,  $p = p^* = p^2$ . Una *isometria parziale* è un elemento  $v \in \mathcal{A}$  se  $v^*v$  è una proiezione. Un

elemento  $a$  è detto *unitario* se  $a^*a = a a^* = \mathbb{I}$ . *Gli elementi unitari di una  $C^*$ -algebra formano un gruppo*: ad esempio gli elementi unitari dell'algebra delle matrici  $M_3(\mathbb{C})$  formano il gruppo  $U(3)$ ; gli elementi unitari dell'algebra  $\mathbb{C}$  formano il gruppo  $U(1)$ .

Definiamo il *valore assoluto*  $|a| \equiv (a^*a)^{1/2}$  per ogni elemento  $a \in \mathcal{A}$ . Ogni elemento invertibile di un'algebra  $\mathcal{A}$  si può decomporre polarmente semplicemente scrivendo  $a = u|a|$ , con  $u \equiv a|a|^{-1}$  elemento unitario per costruzione.

Ogni operatore  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , algebra degli operatori limitati su  $\mathcal{H}$ , ammette una decomposizione polare  $T = U|T|$  con  $U$  isometria parziale che può essere scelta unitaria se  $T$  è invertibile o normale. Ritourneremo su questo punto nel paragrafo 3.1.

Uno *stato* su una  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  è un funzionale lineare

$$\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \tag{B.0.8}$$

che risulti positivo e con norma unitaria:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{I}) &= 1 \\ \phi(a^*a) &\geq 0, \quad \forall a \in \mathcal{A} \\ \|\phi\| &\equiv \sup_{a \in \mathcal{A}} \{|\phi(a)| : \|a\| \leq 1\} = 1. \end{aligned} \tag{B.0.9}$$

la norma di  $\phi$  è l'usuale norma operatoriale.

Indichiamo con  $S(\mathcal{A})$  l'insieme di tutti gli stati di  $\mathcal{A}$ .  $S(\mathcal{A})$  è chiaramente un insieme convesso siccome  $\forall \phi_1, \phi_2 \in S(\mathcal{A})$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$  si ha

$$\lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2 \in S(\mathcal{A}) \tag{B.0.10}$$

Uno stato  $\phi$  è *puro* se non può essere scritto come combinazione convessa di altri due stati. Lo spazio degli stati puri si denota con  $PS(\mathcal{A})$ .

## B.1 Costruzione GNS

Esiste un secondo teorema di Gel'fand-Naimark che prova l'esistenza di un isomorfismo tra una  $C^*$ -algebra e una sotto-algebra auto-aggiunta dell'algebra degli operatori limitati su un opportuno spazio di Hilbert,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Questo risultato è strettamente legato alla così detta costruzione GNS (Gel'fand, Naimark, Segal) che ora descriviamo.

Si consideri uno stato  $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ , ad esso si può associare una rappresentazione  $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$  di  $\mathcal{A}$  detta rappresentazione GNS.

Consideriamo un sottospazio  $\mathcal{N}_\phi$  di  $\mathcal{A}$  tale che,

$$\mathcal{N}_\phi = \{a \in \mathcal{A} \mid \phi(a^*a) = 0\}. \quad (\text{B.1.1})$$

Usando il fatto che  $\phi(a^*b^*ba) \leq \|b\|^2\phi(a^*a)$  allora segue che  $\mathcal{N}_\phi$  è un ideale sinistro di  $\mathcal{A}$ . Lo spazio quoziente *pre Hilbertiano*  $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ , costituito dalle classi di equivalenza di  $a$  (indicate con  $[a]$ ),

$$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi \equiv \{[a] = a + c, \text{ con } a \in \mathcal{A}, c \in \mathcal{N}_\phi\} \quad (\text{B.1.2})$$

è uno spazio preHilbertiano definito con un prodotto scalare

$$\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi \times \mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi \rightarrow \mathbb{C}, \quad (a + \mathcal{N}_\phi, b + \mathcal{N}_\phi) \rightarrow \phi(a^*b) \quad (\text{B.1.3})$$

Spazio preHilbertiano vuol dire che il prodotto scalare non è completo nella norma. La completezza la si ottiene considerando lo spazio delle rappresentazioni associate ad ogni elemento di  $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ . Ad ogni  $a \in \mathcal{A}$  si può associare un operatore  $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi)$ . Una possibile scelta è considerare operatori  $\pi$  tali che

$$\pi(a)(b + \mathcal{N}_\phi) \equiv ab + \mathcal{N}_\phi \quad (\text{B.1.4})$$

infatti scrivendo

$$\|\pi(a)(b + \mathcal{N}_\phi)\|^2 = \phi(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\phi(b^*b) = \|b + \mathcal{N}_\phi\|^2, \quad (\text{B.1.5})$$

si ha  $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$  e quindi  $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi)$ . Esiste un'unica estensione di  $\pi(a)$  ad un operatore  $\pi_\phi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ . Verificando infine le proprietà algebriche  $\pi_\phi(a_1a_2) = \pi_\phi(a_1)\pi_\phi(a_2)$  e  $\pi_\phi(a^*) = \pi_\phi(a)^*$  si costruisce uno  $*$ -morfismo e quindi una rappresentazione

$$\pi_\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi), \quad a \rightarrow \pi_\phi(a). \quad (\text{B.1.6})$$

**Esempio 39.** Consideriamo ad esempio il caso  $\mathcal{A} = C^0(M)$  delle funzioni continue su una varietà  $M$ . Gli stati  $\delta$  si possono definire come  $\delta_{x_0} = a(x_0)$  cioè come “evaluation map”. L'ideale associato allo stato  $\delta_{x_0}$  è costituito dagli elementi a norma nulla:  $\mathcal{N}_{\delta_{x_0}} = \{a \mid a(x_0) = 0\}$

Come secondo esempio consideriamo il caso di algebra non commutativa  $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$  con due stati puri

$$\phi_1 \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = a_{11}, \quad \phi_2 \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = a_{22} \quad (\text{B.1.7})$$

Gli ideali associati agli stati  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , costituiti dagli elementi a norma nulla, sono rispettivamente

$$\mathcal{N}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{N}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{B.1.8})$$

Gli spazi di Hilbert associati saranno:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbb{C}^2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \langle X, X' \rangle = x_1^* x'_1 + x_2^* x'_2. \\ \mathcal{H}_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbb{C}^2 = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \langle Y, Y' \rangle = y_1^* y'_1 + y_2^* y'_2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.9})$$

dove la seconda colonna in  $\mathcal{H}_1$  e la prima in  $\mathcal{H}_2$  per costruzione sono arbitrarie e solo per semplicità sono state poste uguali a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Come rappresentazione di un elemento  $a \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \pi_1(a) \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & 0 \end{bmatrix} \equiv a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \pi_2(a) \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 & 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 & 0 \end{bmatrix} \equiv a \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.10})$$

## Appendice C

# Campi di Dirac Euclidei

Visto che uno dei background principali della teoria di Connes consiste nell'assunzione di uno spazio-tempo euclideo, vediamo in che modo il formalismo degli spinori di Dirac sviluppato di solito in ambiente minkowskiano, può facilmente estendersi al caso euclideo senza grandi modifiche.

L'equazione di Dirac, scritta usualmente in uno spazio di Minkowski ( $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ), ha la seguente espressione:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (\text{C.0.1})$$

In rappresentazione chirale in cui  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ , le matrici gamma hanno la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.0.2})$$

e gli spinori  $\psi_L$  e  $\psi_R$  sono autostati della matrice chiralità  $\gamma^5$  definita come:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (\text{C.0.3})$$

Affinchè uno spinore  $\psi$  che rispetta l'equazione di Dirac sia anche soluzione dell'equazione di Klein-Gordon è necessario richiedere la seguente proprietà sulle matrici gamma:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{C.0.4})$$

che come si può verificare è rispettata dalle (C.0.2).

Supponiamo di rendere Euclideo lo spazio-tempo operando la seguente trasformazione

sulle coordinate:

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow x^4 = ix^0 \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x} \end{aligned} \quad (\text{C.0.5})$$

che naturalmente comportano  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$ .

Avremo allora a che fare con due spinori euclidei che rispettano le seguenti regole di anticommutazione [31],

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0 \quad \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0 \quad \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = 0 \quad (\text{C.0.6})$$

L'ultima relazione è cruciale in quanto implica che  $\bar{\psi}$  non può essere espresso in alcun modo come aggiunto di  $\psi$  moltiplicato qualche matrice. Il che significa che bisognerà trattare  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  come variabili totalmente indipendenti. Questa indipendenza è la novità principale dei campi di Dirac Euclidei. Il resto della costruzione è semplice. Si definiscono le matrici gamma euclidee come quattro matrici anti-hermitiane obbedienti le regole di commutazione

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu} \quad (\text{C.0.7})$$

Una possibile rappresentazione è data da,

$$\gamma^4 \equiv i\gamma^0 = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.0.8})$$

Si usano queste relazioni per definire la legge di trasformazione del gruppo  $O(4)$  per lo spinore  $\psi$  e si definisce un campo  $\bar{\psi}$  che trasforma nella rappresentazione aggiunta. La matrice hermitiana di chiralità viene definita:

$$\gamma^5 \equiv \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (\text{C.0.9})$$

Così  $\bar{\psi}\psi$  è uno scalare,  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  è un pseudoscalare,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  è un vettore, etc.

L'azione euclidea per un campo di Dirac libero è,

$$S = - \int d^4x (i\gamma^\mu\partial_\mu - im) \psi. \quad (\text{C.0.10})$$

Il segno meno è puramente convenzionale e si può assorbire nello spinore  $\psi$  (ricordiamo che siamo liberi di modificare  $\psi$  senza modificare  $\bar{\psi}$ ). L'unità immaginaria dinanzi alla massa non è convenzionale e serve ad assicurare che il propagatore euclideo risulti proporzionale

a  $(\not{p} + im)/(\not{p}^2 + m^2)$ ; se non fosse presente la  $i$  avremmo dei poli tachionici [31].

# Bibliografia

- [1] M. Reed, B. Simon, Fourier Analysis, Self-Adjointness (Academic Press, 1975).
- [2] J. Dixmier, Existence de traces non normals, (C.R. Acad. Sci. Paris, 1966).
- [3] A. Connes, Noncommutative Geometry (Academic Press, 1994). Connes Home Page
- [4] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, Heat Kernels and Dirac Operators (Springer- Verlag, 1991).
- [5] J. C. Varilly, An Introduction to noncommutative geometry. (Costa Rica U. Sep 1997). Vedi sezione 3.5 arXiv:physics/9709045v2
- [6] T. Schucker, Geometries and forces (Portugal, Sept 1997). hep-th/9712095
- [7] B. Iochum, D. Kastler and T. Schucker, Fuzzy Mass Relations In The Standard Model. arXiv:hep-th/9507150v1
- [8] A. Connes, Gravity coupled with matter and foundation of noncommutative geometry (IHES, Bures-sur-Yvette, 1996). arXiv:hep-th/9603053v1
- [9] A.H. Chamseddine, A. Connes, The Spectral Action Principle. Connes Home Page
- [10] A.H. Chamseddine, A. Connes, Universal formula for noncommutative geometry actions: unification of gravity and the standard mode. Connes Home Page
- [11] D.V. Vassilevich, Heat kernel expansion: user's manual (St. Petersburg University, 2003). arXiv:hep-th/0306138v3

- [12] A. H. Chamseddine, A. Connes, *Commun. Math. Phys.* 186, 731 (1997). arXiv:hep-th/9606001
- [13] B. Iochum, D. Kastler, T. Schucker, “On the universal Chamseddine-Connes action 1: details of the action computation” (Marseille, CPT & Provence U. 1997). hep-th/9607158 18 Jul 1996
- [14] A. H. Chamseddine, A. Connes, M. Marcolli, Gravity and the standard model with neutrino mixing (2006). arXiv:hep-th/0610241v1
- [15] K. Huang, Quarks Leptons & Gauge Fields, 2 edition (October 1992, World Scientific Publishing Company).
- [16] M. Kaku, Quantum Field Theory: A Modern Introduction, New Ed edition (USA 1994).
- [17] L. H. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge University Press, 1986).
- [18] N. Bourbaki, Elements de mathematique: algebre (Diffusion C.C.L.S., 1970).
- [19] R.G. Swan, Vector Bundles and Projective Modules, (1962) 264-277.
- [20] J.C. Varilly, J.M. Gracia-Bondia, “Connes’ noncommutative differential geometry and the Standard Model”, *J.Gem.Phys.* 12 (1993) 223-301
- [21] A.Connes, *Non-commutative Geometry and Physics*, in *Gravitation and Quantizations*, Les Houches, Session LVII, (Elsevier Science B.V., 1995).
- [22] C.Giunti, Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics (Oxford University Press, USA 2007)
- [23] J. Dixmier, Les  $C^*$ -algebres et leurs representations (Gauthier-Villars, 1964).
- [24] J.M.G. Fell, R.S. Doran, Representations of  $*$ -Algebras, Locally Compact Groups and Banach  $*$ -Algebraic Bundles (Academic Press, 1988).
- [25] M. Nakahara, Geometry Topology and Physics, Second Edition (June 4, 2003)
- [26] M. A. Rieel, Morita Equivalence for Operator Algebras, in Operator Algebras and Applications, (American Mathematical Society, 1982) 285-298.
- [27] A. Connes, Noncommutative Geometry And Reality, *J. Math. Phys.* 36, 6194 (1995). Connes Home Page

- [28] J.M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, H. Figueroa, Elements of noncommutative geometry, (USA: Birkhaeuser 2001).
- [29] G. Landi, An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry, (Università di Trieste, 1997) arXiv:hep-th/9701078v1
- [30] C. P. Martin, J. M. Gracia-Bondia, J. C. Varilly, The Standard Model as a noncommutative geometry: the low energy regime (1997). arXiv:hep-th/9605001v2
- [31] S. Coleman, Aspects of symmetry, Selected Erice Lectures, (Cambridge University Press, 1985), sez 5.2.
- [32] G. Landi, An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry, (Università di Trieste, 1997) pag 129-131. arXiv:hep-th/9701078v1
- [33] F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele, G. Sparano, "Fermion Hilbert space and fermion doubling in the noncommutative geometry approach to gauge theories", (Napoli, 1996). arXiv:hep-th/9610035v1
- [34] J. M. Gracia-Bondia, B. Iochum, T. Schucker, The Standard model in noncommutative geometry and fermion doubling, (Phys.Lett. B416, 1998). arXiv:hep-th/9709145v1
- [35] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, (J. Wiley & Sons, 1972).