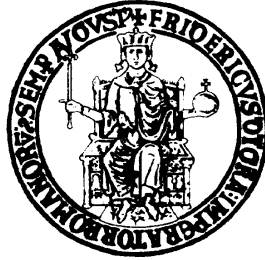


Università degli Studi di Napoli  
Federico II



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Tesi di Laurea in Fisica

## Applicazioni della sfera fuzzy

Relatore  
Prof. Fedele Lizzi

Candidato  
Bernardino Spisso  
matr. 60/930

Anno Accademico 2005/2006



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduzione alla sfera fuzzy</b>	<b>7</b>
<b>2 Geometria noncommutativa e mappe di Weyl</b>	<b>12</b>
2.1 Noncommutatività e meccanica quantistica . . . . .	12
2.2 Quantizzazione di Weyl . . . . .	14
2.3 Prodotto di Moyal . . . . .	18
<b>3 Dalla sfera alla sfera fuzzy</b>	<b>20</b>
3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare .	20
3.1.1 Equazione di Laplace e le armoniche sferiche . . . . .	20
3.1.2 Rotazioni e relazioni di commutazione . . . . .	26
3.1.3 $O(3)$ e $SU(2)$ . . . . .	28
3.2 La sfera fuzzy . . . . .	35
3.2.1 Costruzione degli stati coerenti . . . . .	35
3.2.2 Le armoniche fuzzy . . . . .	38
3.2.3 Morfismo alla Weyl . . . . .	40

---

<b>4</b>	<b>Un'applicazione classica della sfera fuzzy</b>	<b>48</b>
4.1	Richiami di elettrostatica . . . . .	48
4.1.1	Soluzione formale dei problemi elettrostatici con condizioni al contorno . . . . .	48
4.1.2	Espansione della funzione di Green in coordinate sferiche .	53
4.2	Applicazione della sfera fuzzy . . . . .	56
4.2.1	Costruzione delle armoniche fuzzy . . . . .	56
4.2.2	Fuzzyficazione del problema e risoluzione approssimata . .	61
4.2.3	Visualizzazione delle soluzioni . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Verifica del metodo e conclusioni</b>	<b>68</b>
5.1	Verifica dell'algoritmo . . . . .	68
5.1.1	Soluzione del problema con distribuzione di carica sferica .	68
5.1.2	Soluzione del problema con distribuzione di carica sinusoidale	70
5.2	Verifica dell'approssimazione . . . . .	75
5.2.1	Carica puntiforme . . . . .	75
5.2.2	Calotta sferica . . . . .	83
<b>A</b>	<b>Il codice sorgente</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>92</b>

# Introduzione

L'intento di questo lavoro di tesi è l'utilizzo di uno strumento mutuato dalla geometria noncommutativa: la sfera fuzzy, per la risoluzione, approssimata, di problemi elettrostatici con condizioni al contorno sferiche. Lo scopo fondamentale di questo lavoro è quello della verifica di un metodo per la risoluzione approssimata di equazioni differenziali alle derivate parziali indipendenti dal tempo utilizzando un problema di elettrostatica come test. Anche se la sfera fuzzy è stata introdotta per la risoluzione di teorie di campo tramite approssimazioni finite, si cercherà di utilizzarla per problemi più semplici per controllarne la validità del metodo. In particolare si cercherà di determinare il potenziale elettrico all'interno di una sfera  $\mathcal{S}^2$  cava di raggio generico, conoscendo le condizioni al contorno sulla superficie sferica e la distribuzione delle cariche al suo interno. Di questo problema si conosce la soluzione formale tramite la funzione di Green. Il metodo della sfera fuzzy si basa sulla costruzione di una corrispondenza tra uno spazio commutativo infinito dimensionale ad uno noncommutativo ed finito dimensionale in particolare tra le funzioni definite sulla sfera e gli elementi di uno spazio matriciale. Questa proprietà verrà utilizzata per sostituire, per la parte angolare, il reticolo utilizzato per la risoluzione approssimata di equazioni differenziali. Nel primo capitolo verrà introdotta la sfera fuzzy utilizzando l'approccio dell'articolo originale di J.Madore in cui fu introdotta per la prima volta la sfera fuzzy. Sarà data un'idea generale della sfera fuzzy e verranno mostrati gli strumenti fondamentali per affrontare la risoluzione approssimata del problema di elettrostatica. La formalizzazione della sfera fuzzy tramite mappe di Weyl verrà trattata nel secondo e terzo capitolo. In particolare nel secondo capitolo, utilizzando come esempio familiare la meccanica quantistica, saranno introdotte le mappe di Weyl. Le quali permettono di costruire una corrispondenza tra funzioni ed operatori tramite i coefficienti di Fourier relativi a delle appropriate basi nei due spazi. Verrà mostrato un esempio di quantizzazione alla Weyl per la posizione e l'impulso, in cui sia lo spazio d'origine sia lo

---

spazio quantizzato sono infinito dimensionali. Tramite queste mappe nel secondo capitolo verrà formalizzata la sfera fuzzy. Un lettore non interessato a questa formalizzazione dopo la lettura del primo capitolo può saltare direttamente al quarto capitolo. Nel terzo capitolo verrà descritta l'applicazione della sfera fuzzy ad un problema di elettrostatica in quanto, creata la suddetta corrispondenza, è possibile "fuzzyficare" una qualsiasi funzione di Green esprimibile in serie di armoniche sferiche, e conseguentemente esprimere la soluzione approssimata di un suddetto problema, in termini matriciali. Nella prima parte del terzo capitolo sarà mostrata la soluzione formale di questo problema e l'espressione della funzione di Green in termini di armoniche sferiche. La seconda parte del capitolo è dedicata alla descrizione di un algoritmo destinato alla valutazione numerica tramite calcolatore, per la risoluzione approssimata del problema mediante la sfera fuzzy. Tale algoritmo determina le armoniche fuzzy e per rendere conto della dipendenza radiale del problema, viene considerata una collezione di sfere fuzzy concentriche. La risoluzione approssimata è ricavata dall'espressione classica tenendo conto che le integrazioni si trasformano in tracce di matrici per la parte angolare, e somme tra matrici per la parte radiale. Una volta trovata la soluzione matriciale l'algoritmo ritorna alle funzioni. Il vantaggio di questo metodo risiede nel fatto che il procedimento è puramente algebrico e inoltre, nonostante il carattere discreto, l'azione delle rotazioni resta identica al caso continuo.

Infine, nel quinto e ultimo capitolo verrà verificato il buon funzionamento dell'algoritmo utilizzando problemi in cui la soluzione fuzzy è esatta, come il caso della sfera uniformemente carica. Inoltre per verificare la validità di questo metodo sarà, trattato il caso di una carica puntiforme, di cui si conosce la soluzione analitica, per permettere un confronto con risultati esatti. In fine come ulteriore esempio di applicazione della sfera fuzzy verrà trattato il caso di una semisfera carica.

# Capitolo 1

## Introduzione alla sfera fuzzy

*In questo capitolo è introdotta la sfera fuzzy in modo euristico. Lo scopo principale è di fornire al lettore un'idea generale della sfera fuzzy attraverso l'approccio usato da J. Modore nel primo lavoro sulla sfera fuzzy. Inoltre, verranno illustrati gli strumenti matematici fondamentali per affrontare l'applicazione della sfera fuzzy eseguita nel quarto e quinto capito. In questo modo un lettore non interessato alla formalizzazione della sfera fuzzy, dopo la lettura di questo capitolo, può passare direttamente alla lettura quarto capitolo*

La prima formalizzazione della sfera fuzzy si deve a J. Madore ([1]). In questo approccio la sfera fuzzy è un sequenza di algebre non abeliane, generate da tre coordinate noncommutative che soddisfano  $\hat{x}_i \hat{x}_i = 1$  e  $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = k \epsilon_{ijk} \hat{x}_k$ , dove  $k$  rappresenta un parametro di noncommutatività. Tali algebre possono essere costruite considerando la sequenza di algebre  $M_N$  delle matrici  $N \times N$  complesse. Si dimostra che per  $N \rightarrow \infty$  queste algebre tendono all'algebra delle funzioni sulla due-sfera. Per dare un'idea intuitiva di come questo possa essere fatto si considera una sfera bidimensionale  $\mathcal{S}^2$  come il luogo dei punti di  $\mathbb{R}^3$  che soddisfano la relazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1.1)$$

Le funzioni su questa sfera ha un'espansione polinomiale del tipo:

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{a=1}^3 f_a x^a + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^3 f_{ab} x^a x^b + \dots$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{a_1 \dots a_l=1}^3 f_{a_1 \dots a_l} x^{a_1} \dots x^{a_l} \quad (1.2)$$

La condizione della sfera (1.1) unita alla associatività dell'algebra delle funzioni, impone due condizioni sui coefficienti  $f_{a_1 \dots a_l}$ : devono essere totalmente simmetrici per uno scambio degli indici  $a_1 \dots a_l$  e devono essere a traccia nulla rispetto ad una qualunque coppia di indici. Queste condizioni implicano che ad ogni ordine dell'espansione, rappresentato dall'indice  $l$ , il numero di parametri indipendenti sono  $2l+1$ , ottenendo così:

$$\sum_{l=0}^N (2l+1) = (N+1)^2 \quad (1.3)$$

Questa relazione risulta essere interessante in quanto, considerando una serie troncata degli elementi dell'algebra delle funzioni

$$f^{(N)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l!} \sum_{a_1 \dots a_l=1}^3 f_{a_1 \dots a_l} x^{a_1} \dots x^{a_l} \quad (1.4)$$

il numero di componenti indipendenti in  $f^{(N)}(\mathbf{x})$  è  $N^2$ . Questo insieme di funzioni non è più un'algebra, se si utilizza l'usuale prodotto puntuale, in quanto l'ordine del prodotto di due funzioni di ordine  $N-1$  è maggiore  $N-1$ . Un modo per introdurre una struttura algebrica in questo spazio vettoriale è il considerare i coefficienti dello sviluppo come elementi di  $\mathbb{C}^{N^2}$ . La scelta più semplice è quella di considerare questi coefficienti come vettori complessi  $N^2$ -dimensionale, con questa posizione, lo spazio diventa algebricamente isomorfo all'algebra abeliana delle funzioni definite su  $N^2$  punti. Questa approssimazione è corrisponde ad un reticolo.

In alternativa  $\mathbb{C}^{N^2}$  può essere visto come lo spazio delle matrici  $N \times N$  con coefficienti complessi. Così facendo è possibile mappare coordinate commutative in coordinate noncommutative tramite le rappresentazioni dell'algebra di Lie del gruppo  $SU(2)$  in ogni spazio  $\mathbb{C}^N$ . Per esempio nel caso  $N=2$  alle coordinate  $x, y, z$  possiamo associare le matrici  $2 \times 2$  che generano l'algebra di Lie di  $SU(2)$ ; cioè le matrici di Pauli:

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i \equiv k\sigma_i \quad (1.5)$$

Il parametro  $k$  è legato ad  $r$  tramite la relazione  $r^2 = 3k^2$  in modo da soddisfare la (1.1) per le  $x_i$ . In questo modo le nuove coordinate non commutano e soddisfano



---

le regole di commutazione delle matrici di Pauli:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = k\epsilon_{ijk}\hat{x}_k \quad (1.6)$$

In generale per un generico  $N$  alle coordinate  $x_i$  si associano le rappresentazioni  $N$ -dimensionali dei generatori dell'algebra di Lie di  $SU(2)$ :

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i^{(N)} \equiv k\hat{L}_i^{(N)} \quad (1.7)$$

dove le  $\hat{L}_i^{(N)}$  soddisfano le regole di commutazione:

$$[\hat{L}_i^{(N)}, \hat{L}_j^{(N)}] = k\epsilon_{ijk}\hat{L}_k^{(N)} \quad (1.8)$$

Quindi, anche per un generico  $N$  le coordinate diventano noncommutative e soddisfano la seguente relazione:

$$[\hat{x}_i^{(N)}, \hat{x}_j^{(N)}] = k\epsilon_{ijk}\hat{x}_k^{(N)} \quad (1.9)$$

Questa relazione di commutazione tende a zero, restituendo il caso continuo, per  $k \rightarrow 0$ , in seguito sarà mostrato che  $k$  è inversamente proporzionale ad  $N$ . Con questa corrispondenza lo spazio delle funzioni troncate è mappato nello spazio delle matrici  $N \times N$  ossia  $\mathbb{M}_N$ :

$$f^{(N)} \rightarrow \hat{f}^{(N)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l!} \sum_{a_1 \dots a_l=1}^3 f_{a_1 \dots a_l} \hat{x}_{a_1}^{(N)} \dots \hat{x}_{a_l}^{(N)} \quad (1.10)$$

Inoltre, in ogni sottoalgebra troncata isomorfa all'algebra  $\mathbb{M}_N$ , c'è una naturale azione del gruppo  $SU(2)$  cioè il gruppo di simmetria agente sulla varietà  $\mathcal{S}^2$ , una tale azione sarebbe impossibile utilizzando l'approssimazione del reticolo.

Per utilizzare la sfera fuzzy si utilizzerà un altro approccio che sarà trattato nel secondo e terzo capitolo. Comunque, nel resto di questo capitolo verrà mostrato brevemente per permette, anche ad un lettore non interessato alla geometria non-commutativa, di avere gli strumenti basilari per comprendere il resto della tesi. In questo approccio le rappresentazioni  $N$ -dimensionali del gruppo  $SU(2)$  sono utilizzate per definire un particolare insieme di stati chiamati stati coerenti  $|\theta, \varphi, N\rangle$ . In breve questo set di stati, che è in relazione biunivoca con i punti della sfera

, è sovracompleto e non ortogonale nella misura  $d\Omega$ , Tali stati vengono costruiti applicando ad uno stato fissato un elemento di un sottogruppo di  $SU(2)$ :

$$|\theta, \varphi, N\rangle = \hat{\mathcal{R}}^{(L)}(\hat{u})|L, L\rangle \quad (1.11)$$

Utilizzando questa base è possibile associare ad ogni matrice di rango finito una funzione sulla sfera:

$$\hat{A}^{(N)} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^N) \approx \mathbb{M}_N \mapsto A^{(N)} \in \mathcal{F}(S^2) \quad (1.12)$$

$$A^{(N)}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi, N | \hat{A}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle \quad (1.13)$$

Si definiscono armoniche fuzzy tutte le matrici tali che ritrasformate in funzioni, tramite la relazione:

$$\langle \theta, \varphi, N | \hat{Y}_{JM}^{(N)} | \theta, \varphi, N \rangle \quad (1.14)$$

sono proprio le armoniche sferiche. Queste armoniche fuzzy risultano essere una base per ogni spazio matriciale  $M_N$  e quindi, dato che  $M_N$  è uno spazio finito dimensionale, un generico elemento si esprime come una somma finita dei vettori di base per degli opportuni coefficienti:

$$\hat{F}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (1.15)$$

Data una funzione sulla sfera sviluppabile nella base delle armoniche sferiche per creare una corrispondenza tra i due spazi, si considera il set di funzioni “troncate”. Utilizzando i coefficienti di questa serie si costruisce un corrispondente elemento di  $M_N$ . In generale ad una qualunque funzione esprimibile in serie di armoniche sferiche, una volta troncata ad un certo momento angolare massimo, viene associata una matrice quadrata di rango  $N$ . È evidente che dalla dimensione delle matrici dipende il grado d'approssimazione; maggiore è la dimensioni dello spazio matriciale e meno funzioni saranno rappresentate dalla stessa matrice. Dopo aver creato questa corrispondenza, può essere mostrato che fuzzyficando le posizioni sulla sfera  $x, y, z$  le matrici corrispondenti non commutano ed inoltre, a meno di una costante, soddisfano le stesse regole di commutazione dei generatori di  $SU(2)$ . Questa costante può essere fissata dalla condizione  $x_i x_i = 1$  portando a concludere che

$$\left[ \hat{x}_i^{(N)}, \hat{x}_j^{(N)} \right] = \frac{i2r\epsilon_{ijk}}{\sqrt{N^2 - 1}} \hat{x}_k^{(N)} \quad (1.16)$$

---

Da cui si deduce, come è stato anticipato, che questo spazio matriciale corrisponde alla sfera fuzzy, inoltre mette in evidenza che parametro di non commutatività è inversamente proporzionale al quadrato del rango delle matrici utilizzate. Intuitivamente, il limite  $N \rightarrow \infty$  restituisce la teoria del continuo, nel seguito questo limite verrà trattato in maniera più precisa.

## Capitolo 2

# Geometria noncommutativa e mappe di Weyl

*La sfera fuzzy può essere vista come un'applicazione di un metodo di quantizzazione sviluppato da Weyl per superare dei problemi che affliggono la quantizzazione classica. Lo scopo di questo capitolo è puramente introduttivo. Verrà mostrata la quantizzazione alla Weyl ([8],[5]) utilizzando come esempio familiare la meccanica quantistica. Una particolare mappa di Weyl sarà utilizzata nel capitolo successivo per definire la sfera fuzzy. Infine, per completezza, verrà illustrato come introdurre un prodotto nello spazio quantizzato tramite il prodotto di Moyal.*

### 2.1 Noncommutatività e meccanica quantistica

In fisica la necessità di utilizzare spazi non commutativi nasce dall'esigenza in meccanica quantistica di introdurre un principio di indeterminazione tra variabili associate.

Nella meccanica classica, lo stato di un sistema è rappresentato da un punto di una varietà di differenziale  $\mathcal{M}$ , questo concetto viene sostituito in meccanica quantistica da un vettore in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  o, più in generale, da un operatore densità. Le quantità osservabili, da funzioni reali su  $\mathcal{M}$ , diventano operatori autoaggiunti che agiscono su  $\mathcal{H}$ . Le variabili dinamiche della meccanica quantistica canonica vengono definite tramite il cosiddetto principio d'equivalen-

## 2.1 Noncommutatività e meccanica quantistica

---

za cioè alle variabili dinamiche classiche  $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  vengono sostituite, rispettivamente, dagli operatori autoaggiunti  $Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n$  in uno spazio di Hilbert separabile  $\mathcal{H}$ .

Questi operatori vengono scelti in modo tale da soddisfare le usuali regole di commutazione :

$$\begin{aligned} [Q^i, P_j] &= i\hbar\delta_j^i I \\ [Q^i, Q^j] &= 0 \\ [P_i, P_j] &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

per ogni  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Queste si ottengono sostituendo alle parentesi di Poisson, il commutatore diviso per  $i\hbar$ , cioè

$$\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]. \tag{2.2}$$

Un esempio familiare sono gli operatori  $P$  e  $Q$  con  $n = 1$ , utilizzando  $L^2(\mathbb{R})$  come spazio di Hilbert e come operatori autoaggiunti: l'operatore posizione definito da  $Qu = qu$  e l'operatore momento definito da  $Pu = -i\hbar du/dq$ .

La corrispondenza tra gli osservabili classici e quantistici è fornita dal valore medio di un operatore su di uno spazio di Hilbert. Dato uno spazio di Hilbert il valore medio di un operatore  $\mathcal{A}$  su un elemento di  $\mathcal{H}$  è definito tramite il prodotto scalare come:

$$\langle A \rangle = (u, Au)$$

e di conseguenza la scarto quadratico medio è

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Si può dimostrare che per due quantità le quali hanno regole di commutazione come le (2.1) vale la relazione di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta Q^i \Delta P_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_j^i \tag{2.3}$$

per ogni  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Questa relazione indica che l'incertezza sulla misura della variabile associata all'operatore  $Q^i$  è tanto minore quanto maggiore è l'indeterminazione sulla misura della variabile associata all'operatore  $P_i$ , e quindi è

impossibile conoscere, in una misura contemporanea, il valore dei due osservabili fisici con precisione arbitraria.

A questo punto è possibile associare a ogni osservabile, un operatore su  $L^2(\mathbb{R})$ . Tuttavia, in questa associazione c'è un problema di ordinamento dovuto alla non commutatività del prodotto di operatori. Infatti, alla funzione

$$qp \tag{2.4}$$

possiamo associare i due operatori distinti

$$QP \text{ o } PQ. \tag{2.5}$$

o una loro combinazione lineare con coefficienti normalizzata ad uno. Una scelta potrebbe essere la simmetrizzazione del prodotto prima di quantizzare e quindi alla funzione considerata associamo l'operatore

$$\frac{1}{2}(QP + PQ). \tag{2.6}$$

Inoltre vale il teorema di Wintner: Se  $Q$  e  $P$  sono operatori autoaggiunti in uno spazio di Hilbert separabile  $\mathcal{H}$  che soddisfano la relazione di commutazione canonica

$$[Q, P] = i\hbar \tag{2.7}$$

allora almeno uno di essi è non limitato. Quindi oltre al problema dell'ordinamento emerge un altro problema della quantizzazione canonica: gli operatori  $Q$  e  $P$  non possono essere entrambi limitati, indipendentemente da come vengono realizzate le relazioni di commutazione.

## 2.2 Quantizzazione di Weyl

Il superamento di questi inconvenienti della meccanica quantistica canonica sugli operatori non limitati  $Q$  e  $P$ , fu suggerito da Weyl con l'introduzione di una base nello spazio degli operatori su  $L^2(\mathbb{R})$  utilizzando gli operatori unitari:

$$U(q) = e^{\frac{i}{\hbar}qP} \tag{2.8}$$

$$V(p) = e^{\frac{i}{\hbar}pQ} \tag{2.9}$$

## 2.2 Quantizzazione di Weyl

---

che, essendo limitati, possono essere estesi all'intero spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ . In generale conviene usare come base l'operatore unitario:

$$W(\alpha, \beta) = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha P + \beta Q)} \quad (2.10)$$

Dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono due parametri reali. Un generico operatore in questa base si scrive come:

$$F(P, Q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} g(\alpha, \beta) e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha P + \beta Q)} d\alpha d\beta \quad (2.11)$$

Accanto a questa espansione si consideri la base delle funzioni  $p$  e  $q$  appartenente a  $L^2(\mathbb{R}^2)$ :

$$w(\alpha, \beta) = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} \quad (2.12)$$

tramite questa base una generica funzione può essere scritta come

$$f(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha, \beta) e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} d\alpha d\beta \quad (2.13)$$

dove  $\tilde{f}(\alpha, \beta)$  è la trasformata di Fourier di  $f(p, q)$ .

A questo punto, utilizzando le espansioni (2.13) e (2.11), si può introdurre un'applicazione, che associa ad ogni funzione in  $L^2(\mathbb{R}^2)$  un operatore su  $L^2(\mathbb{R})$ . Ciò viene realizzato utilizzando funzione la  $\tilde{f}(\alpha, \beta)$  nello sviluppo operatoriale (2.11). In questo modo è risolto il problema dell'ordinamento in quanto l'assegnazione non è ambigua.

Formalmente la mappa di Weyl è l'applicazione

$$\Omega : F(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{B}(F(\mathbb{R}))$$

definita da

$$f(p, q) \rightarrow \Omega(f)(P, Q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha, \beta) W(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.14)$$

con

$$\tilde{f}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} f(p, q) e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} dp dq \quad (2.15)$$

Per esempio applicando la mappa di Weyl alla funzione  $f = q$  si ottiene:

$$\Omega(q)(P, Q) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} q e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} dp dq e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha P + \beta Q)} d\alpha d\beta \quad (2.16)$$

Per verificare che l'operatore precedente è proprio l'operatore  $Q$  conviene applicarlo ad un autostato di  $Q$  di autovalore  $q'$ . Se l'operatore  $\Omega$  corrisponde a  $P$  deve verificare:

$$\Omega(q)(P, Q) | q' \rangle = q' | q' \rangle \quad (2.17)$$

Infatti si ottiene:

$$\Omega(q)(P, Q) | q' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} q e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha(p-p') + \beta(q-q'))} dp dq d\alpha d\beta | q' \rangle \quad (2.18)$$

Gli integrali in  $d\alpha d\beta$  conducono a due delta di Dirac:

$$\Omega(q)(P, Q) | q' \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} q \delta(q - q') \delta(p - p') dp dq | q' \rangle \quad (2.19)$$

e quindi

$$\Omega(q)(P, Q) | q' \rangle = q' | q' \rangle \quad (2.20)$$

Una siffatta applicazione di Weyl seleziona un particolare ordinamento: l'ordinamento simmetrico o di Weyl. Altri ordinamenti sono possibili, per esempio l'ordinamento normale o di Wick, inserendo nella (2.14) una funzione peso.

Inoltre, l'applicazione di Weyl è lineare e soddisfa la condizione

$$\Omega(\bar{f}) = \Omega(f)^\dagger \quad (2.21)$$

In particolare, se  $f$  è reale, allora

$$\Omega(f) = \Omega(f)^\dagger \quad (2.22)$$

cioè  $\Omega(f)$  è simmetrico.

Infine, l'inversa dell'applicazione di Weyl, la cosiddetta applicazione di Wigner, cioè l'applicazione che associa una funzione di  $p$  e  $q$  un operatore è definita da

$$\Omega^{-1}(F)(p, q) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} \text{Tr}(FW^\dagger(\alpha, \beta)) d\alpha d\beta \quad (2.23)$$

Infatti combinando la (2.14) e la (2.23) si ottiene:



## 2.2 Quantizzazione di Weyl

---

$$\Omega^{-1}(\Omega(f))(p, q) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} \operatorname{Tr} (\Omega(f)W^\dagger(\alpha, \beta)) \, d\alpha d\beta \quad (2.24)$$

$$\operatorname{Tr} (\Omega(f)W(\alpha, \beta)) = \operatorname{Tr} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\hbar} \tilde{f}(\xi, \eta) W(\xi, \eta) d\xi d\eta W^\dagger(\alpha, \beta) \right) \quad (2.25)$$

Dato che l'integrale della precedente relazione è in  $d\xi d\eta$  la traccia e  $W^\dagger(\alpha, \beta)$  possono passare sotto l'integrale che utilizzando l'identità:

$$\operatorname{Tr} e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha P + \beta Q)} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} dp dq = (2\pi\hbar)^2 \delta(\alpha, \beta) \quad (2.26)$$

diventa:

$$\operatorname{Tr} (\Omega(f)W(\alpha, \beta)) = 2\pi\hbar \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\xi, \eta) \delta(\xi - \alpha, \eta - \beta) d\xi d\eta \quad (2.27)$$

Quindi la (2.24) diventa:

$$\Omega^{-1}(\Omega(f))(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha, \beta) e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha p + \beta q)} d\alpha d\beta \quad (2.28)$$

Il lato destro della precedente equazione è proprio l'antitrasformata di Fourier di  $f(\alpha, \beta)$ , in definitiva si ottiene:

$$\Omega^{-1}(\Omega(f))(p, q) = f(p, q) \quad (2.29)$$

Il che dimostra che l'applicazione di Wigner è effettivamente l'inversa dell'applicazione di Weyl (2.23).

Questa trattazione è stata, per semplicità, sviluppata con funzioni definite su uno spazio unidimensionale, il caso di  $\mathbb{R}^N$  non crea nessuna difficoltà. In generale usando una base  $N$ -dimensionale è possibile creare una corrispondenza univoca tra una funzione di  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$  ad un operatore tramite i loro sviluppi nei rispettivi spazi.

Una particolare mappa di Weyl sarà utilizzata nel prossimo capitolo per definire la sfera fuzzy. La filosofia alla base del procedimento di quantizzazione è identica, ciò che cambia è la non invertibilità della mappa; a più funzioni sarà associato lo stesso operatore.

## 2.3 Prodotto di Moyal

Grazie all'applicazione di Weyl è possibile introdurre un nuovo prodotto per descrivere un sistema meccanico, il prodotto di Moyal o prodotto star. Questo nuovo prodotto non è commutativo ed è ottenuto trasformando due elementi dello spazio continuo in operatori, una volta moltiplicati i due operatori così ottenuti tramite il prodotto dello spazio operatoriale, si ritrasforma l'operatore prodotto in una funzione.

Formalmente si ha che il prodotto di Moyal o prodotto star è l'operazione definita da

$$f \star g = \Omega^{-1}(\Omega(f)\Omega(g)) \quad (2.30)$$

Il prodotto star è associativo, ma non commutativo e soddisfa la condizione

$$(\alpha f) \star g = \alpha(f \star g) = f \star (\alpha g) \quad (2.31)$$

con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Inoltre, esso soddisfa la condizione

$$\overline{f \star g} = \bar{g} \star \bar{f}. \quad (2.32)$$

Il prodotto star soddisfa anche la regola di Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f \star g) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \star g + f \star \frac{\partial g}{\partial x^i} \quad (2.33)$$

con  $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$  e la condizione

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) \star g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(x) dx \quad (2.34)$$

da cui segue che l'integrale ha la proprietà della traccia, cioè

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) \star g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} g(x) \star f(x) dx \quad (2.35)$$

Inoltre, è possibile dimostrare che

$$(f \star g)(q, p) = f(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q^i}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p_i}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q^i}} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p_i}} \right)} g(q, p) \quad (2.36)$$

## 2.3 Prodotto di Moyal

---

o equivalentemente

$$(f \star g)(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(q, p) \frac{1}{n!} \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q^i}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p_i}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q^i}} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p_i}} \right) \right]^n g(q, p) \quad (2.37)$$

dove le frecce indicano il verso nel quale le derivate parziali agiscono.

Si può concludere, che il prodotto di Moyal si riduce a quello usuale nel limite per  $\hbar \rightarrow 0$ , cioè il prodotto di Moyal è una deformazione del prodotto usuale nel parametro  $\hbar$ , parametro di deformazione. Pertanto, possiamo anche interpretare lo spazio delle fasi della meccanica quantistica come una deformazione dello spazio delle fasi classico ottenuta sostituendo al prodotto usuale il prodotto di Moyal. Tale prodotto verrà utilizzato nel prossimo capitolo nell'ambito della sfera fuzzy, in cui oltre alla deformazione dell'usuale prodotto tra funzioni ci sarà anche una perdita d'informazioni dovuta all'approssimazione introdotta dalla sfera fuzzy.

# Capitolo 3

## Dalla sfera alla sfera fuzzy

*In questo capitolo verrà costruita una mappa di Weyl tra le funzioni definite su di una sfera bidimensionale  $\mathcal{S}^2$  ed uno spazio matriciale noncommutativo.*

*Per questo scopo, saranno introdotte le armoniche sferiche e si mostrerà che nello spazio delle matrici  $N \times N$  possono essere costruite delle matrici, chiamate armoniche fuzzy, le quali messe in corrispondenza con le armoniche sferiche permetteranno di costruire un morfismo tra le funzioni definite sulla sfera e uno spazio matriciale.*

### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

*La prima parte di questa sezione consiste in dei richiami sulla costruzione e sulle proprietà delle armoniche sferiche ([7]). In seguito saranno date delle nozioni di base di teoria del momento angolare ([3], [10], [11]). Tali concetti veranno utilizzati nella sezione successiva per costruire un morfismo alla Weyl.*

#### 3.1.1 Equazione di Laplace e le armoniche sferiche

In coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$  l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{3.1}$$

### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

può essere scritta nella forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.2)$$

Assumendo che il potenziale  $\Phi$  sia fattorizzabile come:

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) D(\phi) \quad (3.3)$$

sostituendo la  $\Phi$  nella (3.2) le derivate parziali diventano totali restituendo:

$$PD \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UD}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 D}{d\phi^2} = 0 \quad (3.4)$$

Ora moltiplicando la precedente relazione per  $r^2 \sin^2 \theta / UPD$  si riesce ad isolare il termine in  $\phi$ :

$$r^2 \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] = -\frac{1}{D} \frac{d^2 D}{d\phi^2} \quad (3.5)$$

Dato che il lato destro dell'equazione dipende soltanto da  $\theta$  e il lato sinistro solo da  $\phi$  si può concludere che queste quantità sono uguali ad una costante. Quindi il termine in  $\phi$  che compare nella (3.5) può essere riscritto in modo totalmente separato come :

$$\frac{1}{D} \frac{d^2 D}{d\phi^2} = -m^2 \quad (3.6)$$

Dove  $m$  è la suddetta costante. La soluzione di tale equazione è:

$$D = e^{\pm im\phi} \quad (3.7)$$

Se si richiede che  $D$  non sia polidroma  $m$  deve essere un intero. La separazione per le altre due variabili viene ottenuta, analogamente, dividendo la (3.5) per  $\sin^2 \theta$  e utilizzando la (3.6).

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = -\frac{1}{\sin \theta P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (3.8)$$

Definendo la costante reale  $l(l+1)$  si approda alle equazioni separate per  $T(\theta)$  e  $U(r)$ :

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 \quad (3.10)$$

Dalla forma dell'equazione radiale si deduce che è soddisfatta da due singole potenze di  $r$  invece che da una serie. La soluzione, per ogni  $l$ , risulta essere :

$$U = Ar^{l+1} + Br^{-l} \quad (3.11)$$

Dove  $l(l+1)$  però risulta ancora indeterminato, verrà ricavato dallo studio dell'equazione in  $\theta$ . Esprimendo la (3.10) in termini di  $x = \cos \theta$  si ottiene la cosiddetta equazione generalizzata di Legendre:

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \quad (3.12)$$

Prima di trattare questa equazione è utile considerare l'ordinaria equazione differenziale di Legendre ( $m = 0$ ):

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + l(l+1)P = 0 \quad (3.13)$$

La soluzione desiderata deve essere finita, continua nell'intervallo  $-1 \leq x \leq 1$ , e inoltre deve essere monodroma affinché rappresenti un potenziale fisico. La risoluzione per serie dell'equazione fornisce sia una base polinomiale per l'insieme delle soluzioni sia un'informazione su  $l$ . Assumendo che la soluzione sia rappresentata da una serie di potenze della forma:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (3.14)$$

Sostituendo la (3.14) nella (3.13) si ottiene la seguente relazione di ricorrenza per i coefficienti  $a_j$  con  $j \geq 2$ .

$$a_{j+2} = \left[ \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+1)(j+2)} \right] a_j \quad (3.15)$$

I coefficienti  $a_0$  e  $a_1$  sono arbitrari, quindi è sufficiente scegliere, per semplicità, solo uno dei coefficienti  $a_0, a_1$  diverso da zero. Così facendo si costruiscono due serie che rappresentano due soluzioni indipendenti dell'equazione di Legendre. Per ogni serie così ottenuta è possibile provare che questa converge per  $x^2 < 1$  e

### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

---

diverge per  $x = \pm 1$ . Affinchè la soluzione rappresenti un potenziale fisico, viene richiesto che sia convergente in  $x = \pm 1$ . La convergenza agli estremi impone che la serie (3.14) sia finita; cioè deve esistere un  $j$  dopo il quale tutti i coefficienti della serie siano nulli. Dato che  $j$  è un numero intero, dalla relazione di ricorrenza (3.15) si deduce che la serie (3.14) diventa finita se e soltanto se  $l$  è zero o un intero positivo. In questo modo due serie succitate convergono nell'intervallo  $[-1, 1]$  e in entrambe le serie il grado massimo del polinomio presente nella soluzione è  $l$ . A i polinomi che costituiscono i termini delle due serie si dà il nome di polinomi di Legendre  $P_n(x)$  di ordine  $n$ , i quali per convenzione, sono normalizzati in modo tale da valere 1 in  $x = +1$ . I primi polinomi di Legendre sono:

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1 \\P_1(x) &= x \\P_2(x) &= \frac{(3x^2 - 1)}{2}\end{aligned}$$

Manipolando le due serie di potenze è possibile ottenere una rappresentazione compatta dei polinomi di Legendre conosciuta come formula di Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.16)$$

Si dimostra che i polinomi di Legendre formano un insieme completo e ortogonale di funzioni nell' intervallo  $-1 \leq x \leq 1$  e che la condizione di ortogonalità è espressa da:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm} \quad (3.17)$$

Come conseguenza della precedente affermazione ogni funzione definita nell'intervallo  $-1 \leq x \leq 1$  può essere espansa in termini dei polinomi di Legendre:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad (3.18)$$

Dove i coefficienti  $A_l$  sono:

$$A_l = \frac{2l + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \quad (3.19)$$

Trovate le soluzione dell'equazione di Legendre è già possibile trattare problemi simmetrici rispetto alla variabile  $\phi$ , infatti tale simmetria si rispecchia nell'equazioni con l'annullarsi di  $m$  nella (3.12) rendendo la parte angolare dell'equazione di Laplace proprio l'equazione di Legendre. Tutto questo implica che la soluzione generale per un problema del genere è:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l r^l + B_l^{-l+1} \right] P_l(\cos \theta) \quad (3.20)$$

i coefficienti  $A_l$  e  $B_l$  sono determinati dalle condizioni a contorno.

Per risolvere un problema generico ( $m \neq 0$ ) bisogna definire una generalizzazione dei  $P_n(x)$  che siano soluzione della (3.12) al variare di  $m$  e  $l$ . In modo del tutto analogo alla determinazione dei  $P_n(x)$  si dimostra che per ottenere una soluzione finita nell'intervallo  $-1 \leq x \leq 1$  il parametro  $l$  deve essere zero o un intero positivo e che l'intero  $m$  deve assumere solo valori compresi tra  $-l$  e  $l$ . Una soluzione avente tale proprietà è chiamata Polinomio associato di Legendre  $P_l^m(x)$  che per  $m$  positivo è definito dalla seguente formula:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (3.21)$$

Utilizzando la formula di Rodrigues (3.16) usata per rappresentare  $T_l(x)$ , si ottiene una definizione dei Polinomi associati di Legendre valida per ogni  $m$ :

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l \quad (3.22)$$

Dato che l'equazione differenziale (3.12) dipende unicamente da  $m^2$  e che  $m$  è un intero,  $P_l^{-m}(x)$  e  $P_l^m(x)$  devono essere proporzionali. Si dimostra che :

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (3.23)$$

Per  $m$  fissato le funzioni  $P_l^m(x)$  formano un set ortonormale nell'indice  $l$  nell'intervallo  $-1 \leq x \leq 1$ . In analogia con i polinomi di Legendre la relazione di ortogonalità può essere scritta come:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll} \quad (3.24)$$



### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

A questo punto è possibile scrivere la soluzione dell'equazione come prodotto di fattori dipendenti dalle tre variabili  $r, \theta, \phi$ , è conveniente combinare i fattori angolari e costruire delle funzioni ortonormali definite sulla sfera di raggio unitario. Osservando che le funzioni  $D_m(\phi) = e^{im\phi}$  formano un insieme completo ed ortogonale nell'indice  $m$  sull'intervallo  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , e che le funzioni  $P_l^m(\cos \theta)$  formano un insieme completo ed ortogonale nell'indice  $l$  per ogni  $m$  sull'intervallo  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , si deduce che il loro prodotto  $P_l^m D_m$  costituisce un insieme completo ed ortogonale sulla superficie della sfera unitaria nei due indici  $l$  e  $m$ . Utilizzando ad uno queste funzioni tenendo conto della (3.24) si giunge quindi alle cosiddette *armoniche sferiche*:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3.25)$$

Dalla proprietà (3.23) si ricava che:

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (3.26)$$

Le condizioni di ortonormalità e completezza sono espresse dalle seguenti relazioni:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (3.27)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (3.28)$$

Una funzione arbitraria  $g(\theta, \phi)$  può essere espansa in armoniche sferiche come:

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.29)$$

Dove i coefficienti sono:

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi) \quad (3.30)$$

Ora è finalmente possibile affermare che la soluzione generale per l'equazione di Laplace in coordinate sferiche può essere scritta in termini di armoniche sferiche

e potenze di  $r$  come generalizzazione del caso  $m = 0$ :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ A_{lm} r^l + B_{lm}^{-l+1} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.31)$$

Se il potenziale è specificato su una superficie sferica, i coefficienti  $A_{lm}$  e  $B_{lm}$  possono essere determinati valutando la (3.31) sulla superficie ed usando la (3.29).

### 3.1.2 Rotazioni e relazioni di commutazione

È ben noto che in generale rotazioni spaziali successive attorno ad assi diversi conducono a risultati diversi a seconda della successione delle rotazioni. Questo comportamento si formalizza dicendo che rotazioni attorno ad uno stesso asse commutano mentre rotazioni attorno ad assi diversi non commutano. Questa non commutatività è resa esplicita in diversi modi, un punto di partenza può essere la rappresentazione delle rotazioni in tre dimensioni come matrici  $3 \times 3$  reali ed ortogonali:

$$\mathcal{R} = (a_{ij}) \quad (3.32)$$

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = 1 \quad (3.33)$$

Utilizzando come regola di composizione l'usuale moltiplicazione tra matrici, queste matrici formano un gruppo in quanto l'ortogonalità delle singole matrici assicura l'ortogonalità del prodotto:

$$(\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2)^T \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2^T \mathcal{R}_1^T \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 = 1 \quad (3.34)$$

Come esempio di rotazione, si consideri una rotazione di un vettore  $\mathbf{v}$  attorno all'asse  $z$ . In generale si ha:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Quindi possiamo indentificare la rotazione  $\mathcal{R}_z(\phi)$  con la matrice:

$$\mathcal{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

Allo stesso modo si ottiene per gli altri assi:

$$\mathcal{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathcal{R}_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Ora avendo la forma esplicita delle rotazioni è possibile valutare il commutatore, confrontando l'effetto di una rotazione attorno all'asse  $x$  seguita da una rotazione attorno all'asse  $y$  con l'effetto delle stesse rotazioni ma invertendo la sequenza ottenendo:

$$\mathcal{R}_y(\alpha)\mathcal{R}_x(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \cos \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

e

$$\mathcal{R}_x(\beta)\mathcal{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \beta \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Quindi considerando la differenza si ottiene:

$$[\mathcal{R}_y(\alpha), \mathcal{R}_x(\beta)] \equiv \mathcal{R}_y(\alpha)\mathcal{R}_x(\beta) - \mathcal{R}_x(\beta)\mathcal{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha(1 - \cos \beta) \\ \sin \alpha \sin \beta & 0 & \sin \beta(-1 + \cos \alpha) \\ \sin \alpha(1 - \cos \beta) & \sin \beta(-1 + \cos \alpha) & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Questo risultato dimostra che rotazioni consecutive attorno ad assi diversi in generale non commutano. Questo comportamento delle regole di commutazione degli operatori di rotazione è legato al gruppo delle rotazioni in tre dimensioni  $O(3)$  e alla sua algebra di Lie  $o(3)$ . In generale le stesse regole di commutazione caratterizzano anche altri sistemi fisici come ad esempio lo spin che è descritto dal gruppo  $SU(2)$ . Nella prossima sezione saranno trattati questi due gruppi.

### 3.1.3 O(3) e SU(2)

Un generico gruppo  $O(n)$  può essere rappresentato dall'insieme delle matrici  $N \times N$  reali ed unitarie. Nel caso tridimensionale saranno delle matrici del tipo (3.32) con la condizione (3.33). L'unitarietà deriva dalla richiesta di conservazione della norma. Infatti, fissato un sistema di riferimento cartesiano imponendo

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

o equivalentemente  $r'^T r' = r^T r$  si ottiene sulla generica  $\mathcal{R}$ :

$$r'^T r' = r^T \mathcal{R}^T \mathcal{R} r = r^T r \Rightarrow \mathcal{R}^T \mathcal{R} = 1 \quad (3.41)$$

Gli elementi del gruppo  $O(3)$  possono essere rappresentati come rotazioni di un vettore  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{R}^3$ . Un esempio di rotazione può essere attorno all'asse  $z$  ed è rappresentato dalla matrice (3.36).

Il gruppo  $O(3)$  non è abeliano ma è un gruppo di Lie, cioè un gruppo continuo con un infinito numero di elementi. Questi elementi sono individuati da 3 parametri, infatti la relazione (3.33) riduce il numero di parametri indipendenti di un generico elemento da 9 a 3. Questi parametri possono, per esempio essere i tre angoli di Eulero. Una volta definiti i parametri i corrispondenti generatori sono definiti da:

$$J_z = \frac{1}{i} \frac{d\mathcal{R}_z(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$J_x = \frac{1}{i} \frac{d\mathcal{R}_x(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$J_y = \frac{1}{i} \frac{d\mathcal{R}_y(\psi)}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Il nome generatori deriva dal fatto che generano le rotazioni infinitesime tramite le relazioni:

$$\mathcal{R}_z(\delta\theta) = 1 + iJ_z\delta\theta \quad (3.45)$$

### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

$$\mathcal{R}_x(\delta\phi) = 1 + iJ_x\delta\phi \quad (3.46)$$

Infatti ruotando attorno all'asse  $z$  di un  $\theta = N\delta\theta$  con ( $N \rightarrow \infty$ ) si ottiene:

$$\mathcal{R}_z(\theta) = [\mathcal{R}_z(\delta\theta)]^N = (1 + iJ_z\delta\theta)^N = \left(1 + iJ_z\frac{\theta}{N}\right)^N = e^{iJ_z\theta} \quad (3.47)$$

È facilmente verificabile che questa forma è equivalente a (3.36), definendo l'esponenziale dalla sua espansione in serie di potenze si ha

$$\begin{aligned} e^{iJ_z\theta} &= 1 + iJ_z\theta - J_z^2\frac{\theta^2}{2!} - iJ_z^3\frac{\theta^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che è proprio la (3.36). In generale qualsiasi rotazione finita di un angolo  $\theta$  attorno ad un qualsiasi asse  $\mathbf{n}$  può scriversi in forma esponenziale come:

$$\mathcal{R}_n(\theta) = e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\theta} \quad (3.48)$$

Ad ogni gruppo possiamo associare un'algebra di Lie e viceversa. I generatori infinitesimali possono essere visti come base dello spazio tangente al gruppo visto come varietà nell'elemento unitario, in questo spazio tangente è possibile introdurre un'algebra tramite le parentesi di commutazione. I generatori vengono determinati calcolando in zero le derivate dell'elemento generico della rappresentazione rispetto ai parametri del gruppo. Viceversa ad ogni algebra tramite esponenziazione è possibile associare una rappresentazione di un gruppo.

La non commutatività tra gli elementi si riflette nelle regole di commutazione tra i generatori. Utilizzando le (3.42),(3.43) e (3.44) si ottiene una relazione di

commutazione per i generatori:

$$J_x J_y - J_y J_x = [J_y, J_x] = iJ_z \quad (3.49)$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per gli altri generatori si approda alle regole generali di commutazione dei generatori infinitesimali di  $O(3)$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad (3.50)$$

Dove  $\epsilon_{ijk}$  è il simbolo di Levi-Civita e  $i, j, k$  sono tutte le permutazioni della terna  $x, y, z$

*Per la trattazione del gruppo  $SU(2)$  si userà un approccio più astratto in quanto nel seguito verranno utilizzate rappresentazioni con diversa dimensionalità da cui la necessità di definire  $SU(2)$  in modo indipendente dalla sua rappresentazione.*

Si definisce il gruppo astratto  $SU(2)$  (il gruppo speciale unitario bidimensionale) come l'insieme degli oggetti  $\mathcal{U}(a, b)$  che soddisfano:

$$\mathcal{U}(a_2, b_2)\mathcal{U}(a_1, b_1) = \mathcal{U}(a_2 a_1 - b_2 b_1^*, a_2 b_1 + b_2 a_1^*) \quad (3.51)$$

$$\mathcal{U}(a_2, b_2)^{-1} = \mathcal{U}(a_2^*, -b_2) \quad (3.52)$$

dove  $a$  e  $b$  sono una coppia di numeri complessi tali che  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Un esempio di rappresentazione sono le matrici  $2 \times 2$  complesse e unitarie con determinante pari a uno. La generica matrice  $2 \times 2$  complessa ha 4 gradi di libertà complessi:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Per ottenere le (3.51) e (3.52) imponiamo sulle  $\mathcal{U}$  le condizioni:

$$\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger = 1, \det \mathcal{U} = 1, \quad (3.54)$$

la condizione di unitarietà può essere scritta come  $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}$ , quindi, dato che  $\det \mathcal{U} = 1$  diventa:

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

e quindi  $a^* = d, b^* = -c$ . Usando queste relazioni sugli elementi la generica matrice si scrive:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \text{ con } \det \mathcal{U} = |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (3.56)$$

### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

Per costruzione le matrici  $\mathcal{U}$  soddisfano le (3.51) e (3.52), quindi questo spazio matriciale  $2 \times 2$  forma una rappresentazione irriducibili di  $SU(2)$

Esplicitando i numeri complessi  $a$  e  $b$  otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

la condizione sul determinante implica:

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \quad (3.58)$$

da cui si deduce<sup>1</sup> che  $SU(2)$  è omomorfo alla sfera  $\mathcal{S}^3$  di raggio 1 in  $\mathbb{R}^4$

Esplicitando  $a_1$  e sostituendo nella (3.57) si ottiene:

$$\mathcal{U}(a_2, b_1, b_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - a_2 - b_1 - b_2} + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & \sqrt{1 - a_2 - b_1 - b_2} - ia_2 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Ora analogamente al gruppo  $O(3)$  è possibile definire i generatori della trasformazione infinitesima come:

$$\sigma_z = \frac{1}{i} \frac{d\mathcal{U}(a_2, b_1, b_2)}{da_2} \Big|_{(a_2, b_1, b_2)=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{i} \frac{d\mathcal{U}(a_2, b_1, b_2)}{db_1} \Big|_{(a_2, b_1, b_2)=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{i} \frac{d\mathcal{U}(a_2, b_1, b_2)}{db_2} \Big|_{(a_2, b_1, b_2)=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Queste matrici sono le ben note matrici di Pauli per le quali vale la relazione di commutazione:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.63)$$

Le matrici di Pauli possono essere interpretate come una base della rappresentazione  $2 \times 2$  dell'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . A partire dalle matrici di Pauli è possibile costruire un'altra base, chiamata base sferica, definita da:

<sup>1</sup>Questa conclusione è indipendente dalla rappresentazione usata

$$\begin{aligned}\sigma_+ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_- &= \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Questa base soddisfa le regole di commutazione diverse dalle (3.63) della base cartesiana:

$$\begin{aligned}[\sigma_+, \sigma_-] &= \sigma_z \\ [\sigma_z, \sigma_\pm] &= \pm\sigma_\pm\end{aligned}\tag{3.64}$$

Inoltre preso uno spazio composto da vettori colonna bidimensionale su cui far agire SU(2), le matrici  $\sigma_-$  e  $\sigma_+$  agiscono come operatori gradino sugli autostati di  $\sigma_z$ .

Sono possibili rappresentazioni di dimensioni maggiori sempre imponendo che la generica matrice soddisfi le (3.51) e (3.52), oppure è possibile partire dall'algebra costruendo un insieme di matrici  $N \times N$  utilizzando come base delle matrici che soddisfano le relazioni di commutazione (3.63), per poi tornare al gruppo tramite esponenziazione. Per esempio una rappresentazione di ordine superiore può essere definita utilizzando le matrici  $3 \times 3$ . Partendo dall'algebra conviene definire gli elementi della stessa tramite una base sferica analoga a  $\sigma_+, \sigma_-, \sigma_z$ , inoltre la richiesta che questa base soddisfi la (3.63) equivale a richiedere che siano soddisfatte le seguenti relazioni:

$$L_+ |L, M\rangle = \sqrt{L(L+1) - M(M+1)} |L, M+1\rangle\tag{3.65}$$

$$L_- |L, M\rangle = \sqrt{L(L+1) - M(M-1)} |L, M-1\rangle\tag{3.66}$$

$$L_z |L, M\rangle = M |L, M\rangle\tag{3.67}$$

Dove  $|L, M\rangle$  con  $M = -L, \dots, L$  e  $2L+1 = N$  (e quindi  $L = 1$ ), sono una base dei vettori colonna tridimensionale su cui agisce la rappresentazione. Dalla terza relazione è immediato dedurre la forma di  $L_z$ :

$$L_z |1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |1, 1\rangle\tag{3.68}$$



### 3.1 Simmetrie della sfera e richiami di teoria del momento angolare

Analogamente per le altre due matrici sia ha

$$L_+ |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} |1, 1\rangle \quad (3.69)$$

$$L_- |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} |1, -1\rangle \quad (3.70)$$

Trovate queste matrici l'elemento generico di SU(2) è ricavato tramite esponenziazione :

$$\mathcal{U}^{(3)}(\hat{u}) = e^{iL^{(3)} \cdot \hat{u}} \quad (3.71)$$

dove è stato esplicitato l'ordine della rappresentazione e  $L^{(3)} = (L_z, L_+, L_-)$ .

Nella prossima sezione verranno utilizzate rappresentazioni n-dimensionali, per queste rappresentazioni le tre matrici  $L_-^{(N)}, L_+^{(N)}, L_z^{(N)}$  in generale si scrivono come:

$$L_z^{(N)} = \begin{pmatrix} L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -L+1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -L \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

$$L_+^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{L(L+1) - (L-2)(L-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2}L \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

$$L_-^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}L & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{L(L+1) - (-L+1)(-L)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2}L & 0 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

o in forma più sintetica:

$$\langle L, M, N | L_z^{(N)} | L, M' \rangle = M \langle L, M, N | L, M', N \rangle = M \delta_{M, M'}^{(N)} \quad (3.75)$$

$$\langle L, M, N | L_+^{(N)} | L, M', N \rangle = \sqrt{L(L+1) - M(M+1)} \delta_{M, M'+1}^{(N)} \quad (3.76)$$

$$\langle L, M, N | L_-^{(N)} | L, M', N \rangle = \sqrt{L(L+1) - M(M-1)} \delta_{M, M'-1}^{(N)} \quad (3.77)$$

I gruppi SU(2) e O(3) sono strettamente collegati, infatti i generatori dei due gruppi hanno le stesse regole di commutazione<sup>2</sup>. Si potrebbe pensare che O(3) e SU(2) siano lo stesso gruppo, tuttavia tale dubbio può essere risolto usando le rappresentazioni già illustrate. Infatti, questi due gruppi possono essere collegati tramite le matrici di Pauli; al vettore posizione  $x, y, z$  su cui agisce la rappresentazione di O(3) si associa una matrice  $2 \times 2$  Hermitiana a traccia nulla, ovvero:

$$h = \sigma \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

con  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ .

Preso un elemento di SU(2) la trasformazione  $h \mapsto \mathcal{U}h\mathcal{U}^\dagger = h'$  preserva l'hermitianità, è a traccia nulla, e inoltre  $\det h' = \det h$  o equivalentemente:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.79)$$

La suddetta trasformazione su  $h$ , quindi, induce una rotazione del vettore posizione  $\mathbf{r}$

In generale è possibile esprimere i parametri di SU(2) in termini degli angoli usati per parametrizzare O(3):

$$a = e^{-\frac{1}{2}i(\alpha+\gamma)} \cos \frac{1}{2}\beta \quad (3.80)$$

$$b = -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha-\gamma)} \sin \frac{1}{2}\beta \quad (3.81)$$

Utilizzando le precedenti relazioni si osserva che per  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  e  $\alpha = 2\pi, \beta = \gamma = 0$ , che entrambi individuano l'identità di O(3), corrispondono a  $a = 1, b = 0$

<sup>2</sup>In termini matematici, SU(2) e O(3) hanno la stessa algebra di Lie

## 3.2 La sfera fuzzy

---

e  $a = -1, b = 0$  rispettivamente. Quindi,  $\alpha = 2\pi, \beta = \gamma = 0$  non identifica l'identità di  $SU(2)$ , ciò indica che la rappresentazione  $2 \times 2$  di  $SU(2)$  non può essere una rappresentazione di  $O(3)$ , in quanto c'è una corrispondenza due a uno tra gli elementi dei gruppi. I gruppi  $SU(2)$  e  $O(3)$  nonostante abbiano la stessa algebra sono due gruppi distinti.

## 3.2 La sfera fuzzy

Nei prossimi paragrafi si formalizzeranno le idee illustrate nel primo capitolo nell'ambito delle mappe di Weyl-Wigner; utilizzando come base per l'algebra delle funzioni sulla sfera le armoniche sferiche che, come è stato mostrato, sono una base per le funzioni definite su questa superficie. Infatti la generica funzione in questa base si scrive:

$$F(\theta, \phi) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J f_{JM} Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.82)$$

Tale espansione mette in evidenza il carattere definito dell'algebra delle funzioni sulla sfera sotto trasformazioni di  $SU(2)$ . Come nel caso precedente verranno considerate le serie trocate e messe in relazione con un analogo sviluppo nello spazio  $M_N$ . Tale sviluppo sarà costruito in modo tale da conservare il carattere definito sotto trasformazioni di  $SU(2)$ .

### 3.2.1 Costruzione degli stati coerenti

In questo paragrafo si introdurranno gli stati coerenti ([9]) come mezzo per la quantizzazione. Dove per quantizzazione si intende il passaggio dallo spazio continuo delle funzioni sulla sfera allo spazio discreto delle matrici  $N \times N$ . Questi stati sono una base dell'algebra dello spazio su cui far agire degli operatori e quindi, sotto opportune ipotesi, permettono di creare un isomorfismo tra uno spazio di operatori e le funzioni definite su una sfera. Per definire un insieme di stati coerenti si considera una rappresentazione unitaria irriducibile  $N$ -dimensionale del gruppo  $SU(2)$

Scelto uno spazio di Hilbert  $\mathbb{C}^N$ , una base su questo spazio è data dai vettori colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

Che in notazione di Dirac sono rappresentati dallo stato  $|L, M\rangle$  con  $N = 2L + 1$  e  $M = (-L, -L + 1, \dots, L - 1, L)$ . Questa base di  $\mathbb{C}^N$  serve a definire lo spazio su cui far agire una rappresentazione  $N$ -dimensionale di  $SU(2)$ . Formalmente la rappresentazione associa ad ogni elemento del gruppo un elemento di  $\mathcal{B}(\mathbb{C}^N)$ , in altre parole una matrice  $N \times N$ :

$$\hat{\mathcal{R}}^{(N)} : SU(2) \mapsto \mathcal{B}(\mathbb{C}^N) \quad (3.84)$$

Fissato un elemento del gruppo, tramite un set di tre parametri  $u$ , la rappresentazione produce una matrice il cui elemento di matrice è dato da:

$$\langle L, M | \hat{\mathcal{R}}^{(L)}(u) | L, M' \rangle = \mathcal{D}_{MM'}^L(u) \quad (3.85)$$

Dove  $\mathcal{D}_{MM'}^L(u)$  sono chiamate funzioni di Wigner. Per definire morfismo alla Weyl bisogna specificare i parametri  $u$  e quindi la varietà cui appartengono, inoltre occorre definire un'applicazione dalle funzioni alle matrici. Il primo dei problemi verrà risolto ora, il secondo sarà trattato nei paragrafi successivi. Per definire i parametri del gruppo verrà adoperato uno stato di riferimento detto *fiducial state*, per esempio lo stato massimo della rappresentazione:  $|\psi_0\rangle = |L, L\rangle$ . Usando la parametrizzazione con gli angoli di Eulero rappresenta un elemento del gruppo in queste coordinate è individuato dalla terna  $\alpha, \beta, \gamma$ . Una volta fissato lo stato di riferimento per sapere gli effettivi gradi di libertà del gruppo dobbiamo considerare il sottogruppo di stabilità rispetto a questo stato fissato. Cioè il sottogruppo tale che, scelto uno stato, l'applicazione di un qualunque elemento di questo sottogruppo lascia lo stato invariato, ad esempio tramite un fattore di fase globale. In questo caso il gruppo di stabilità  $\mathcal{H}_{\psi_0}$  è costituito dagli elementi per cui  $\beta = 0$ , cioè quelle rotazioni che hanno per asse proprio lo stato scelto, detta condizione vale indipendentemente da  $N$ . Quindi due elementi del gruppo individuati da  $u$  e  $u'$  sono equivalenti se appartengono entrambi a  $\mathcal{H}_0$ . Lo spazio quoziente tra il

### 3.2 La sfera fuzzy

---

gruppo e il gruppo di stabilità è la varietà cercata. Si ha che:

$$\frac{SU(2)}{\mathcal{H}_{\psi_0}} \approx S^2 \quad (3.86)$$

identificando  $\theta = \beta$  e  $\phi = \alpha \bmod 2\pi$ . Con questa scelta si può identificare lo stato fiduciale con il polo nord della sfera su cui giacciono i parametri del gruppo.

Scelto un  $\hat{u}$  elemento rappresentativo in ogni classe di equivalenza del quoziente e esplicitando la dipendenza da  $N$ , un set di stati coerenti è definito come:

$$|\theta, \varphi, N\rangle = \hat{\mathcal{R}}^{(L)}(\hat{u})|L, L\rangle \quad (3.87)$$

Proiettando sugli elementi di base si ottiene:

$$\langle L, M | \theta, \varphi, N \rangle = \langle L, M | \hat{\mathcal{R}}^{(L)}(\hat{u}) | L, L \rangle = \mathcal{D}_{ML}^L(\hat{u}) \quad (3.88)$$

Da cui:

$$|\theta, \varphi, N\rangle = \sum_{M=-L}^L \mathcal{D}_{ML}^L(\hat{u}) |L, M\rangle \quad (3.89)$$

Esplicitando la forma dei  $\mathcal{D}_{ML}^L$ , calcolati da Wigner, si ottiene:

$$|\theta, \varphi, N\rangle = \sum_{M=-L}^L \left( \frac{(2L)!}{(L+M)!(L-M)!} \right)^{1/2} (\cos \theta/2)^{L+M} (\sin \theta/2)^{L-M} e^{-i\phi M} |L, M\rangle \quad (3.90)$$

Questo set di stati non è ortonormale e sovracompleto nella misura  $d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \langle \theta', \phi', N | \theta, \phi, N \rangle &= e^{-iL(\phi' - \phi)} \left[ e^{i(\phi' - \phi)} \cos \theta/2 \cos \theta'/2 \sin \theta'/2 \right]^{2L} \\ 1 &= \frac{2L+1}{4\pi} \int_{S^2} |\theta, \phi, N\rangle \langle \theta, \phi, N | d\phi \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.91)$$

Ora con questo insieme di stati è possibile definire una relazione tra uno spazio di operatori finito dimensionale e lo spazio delle funzioni definite sulla sfera  $S^2$ :

$$\hat{A}^{(N)} \in \mathbb{M}_N \mapsto A^{(N)} \quad (3.92)$$

$$A^{(N)}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi, N | \hat{A}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle \quad (3.93)$$

In questo modo ogni matrice viene mappata in una funzione sulla sfera.

### 3.2.2 Le armoniche fuzzy

Particolare attenzione meritano delle specifiche matrici tali che le funzioni tramite la (3.93) sono le armoniche sferiche cioè:

$$\langle \theta, \varphi, N | \hat{Y}_{JM}^{(N)} | \theta, \varphi, N \rangle = Y_{JM}^{(N)}(\theta, \phi) \quad (3.94)$$

dove  $J = 0, 1, \dots, 2L$  e  $M = -J, \dots, J$

Il nome armoniche fuzzy deriva oltre che dalla definizione anche dal fatto che possono essere viste come, analogamente alle armoniche sferiche, come soluzioni dell'equazione di Laplace "fuzzyficata" cioè trasportata in  $\mathbb{M}_N$ . Per far ciò bisogna definire il laplaciano fuzzy, cosa che verrà fatta tramite i generatori  $\hat{L}_a^N$  di  $SU(2)$ :

$$\left[ \hat{L}_a^{(N)}, \hat{L}_b^{(N)} \right] = i\epsilon_{abc} \hat{L}_c^{(N)} \quad (3.95)$$

La commutazione di questi operatori con la generica matrice può essere interpretata come derivazione rispetto all'indice del generatore quindi possiamo definire il laplaciano come doppia applicazione del commutatore tra un generatore e la generica matrice:

$$\nabla_N^2 : \mathbb{M}_N \mapsto \mathbb{M}_N, \quad (3.96)$$

$$\nabla_N^2 \hat{A}_N^{(N)} = \left[ \hat{L}_s^{(N)}, \left[ \hat{L}_s^{(N)}, \hat{A}_N^{(N)} \right] \right] \quad (3.97)$$

Lo spettro di questo operatore è dato dagli autovalori  $J = j(j+1)$ , dove  $j = 0, 1, \dots, 2L$ , ed ogni autovalore ha molteplicità  $2j+1$ . Questo spettro coincide entro l'ordine  $2L$ , con il suo corrispettivo continuo definito sullo spazio delle funzioni su una sfera. Gli autostati di questo operatore sono le armoniche fuzzy e, quindi, rappresentano un set completo e ortogonale di soluzioni dell'equazione di Laplace fuzzyficata.

Per definire l'ortogonalità bisogna definire un prodotto scalare con le stesse proprietà dell'usuale prodotto scalare di  $L^2(S^2)$  cioè:

$$(\hat{A}^{(N)}, \hat{B}^{(N)}) = \text{Tr} \left[ \hat{A}^{(N)\dagger} \hat{B}^{(N)} \right] \quad (3.98)$$

Utilizzando questo prodotto scalare le armoniche fuzzy sono ortogonali ma non ortonormali:

$$\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{J'M'}^{(N)} \right] = \alpha_{JM}^{2(N)} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (3.99)$$

### 3.2 La sfera fuzzy

Dove  $\alpha_{JM}^{(N)}$  è un coefficiente di normalizzazione che verrà determinato nel prossimo capitolo.

Nello spazio delle matrici a rango finito di ordine  $N = 2l + 1$ , è possibile introdurre un insieme di  $N^2$  operatori di polarizzazione  $\hat{T}_{JM}^{(N)}$ . I quali soddisfano:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{T}_{JM}^{(N)\dagger}, \hat{T}_{J'M'}^{(N)} \right] &= \sqrt{L(L+1) - M(M \pm 1)} \hat{T}_{JM \pm}^{(N)} \\ \left[ \hat{T}_{JM}^{(N)\dagger}, \hat{T}_{J'M'}^{(N)} \right] &= M \hat{T}_{JM}^{(N)} \\ \text{Tr} \left[ \hat{T}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{T}_{J'M'}^{(N)} \right] &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \\ \hat{T}_{JM}^{(N)\dagger} &= (-1)^M \hat{T}_{J-M}^{(N)} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Le precedenti relazioni determinano completamente gli operatori di polarizzazione: le armoniche fuzzy sono proporzionali agli operatori di polarizzazione:

$$\hat{Y}_{JM}^{(N)} = \alpha_{JM}^{(N)} \hat{T}_{JM}^{(N)} \quad (3.101)$$

Usando le armoniche fuzzy come base di  $\mathbb{M}_N$ , un generico elemento  $\hat{F}^{(N)}$  può essere scritto come

$$\hat{F}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (3.102)$$

Quindi i coefficienti normalizzati della serie (3.102) sono:

$$\hat{F}_{JM}^{(N)} = \frac{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{F}^{(N)} \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right]} \quad (3.103)$$

Il prodotto tra due matrici è definito a partire dal prodotto tra due armoniche fuzzy, che a sua volta è definito tramite i coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{J'M'}^{(N)} \hat{Y}_{J''M''}^{(N)} &= \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J (-1)^{2L+J} \sqrt{\frac{(2J'+1)(2J''+1)(2L+1)}{4\pi}} \\ &\times \left\{ \begin{matrix} J'' & J' & J \\ 2L & 2L & 2L \end{matrix} \right\} C_{J'M', J''M''}^{J, M} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \end{aligned} \quad (3.104)$$

dove  $\left\{ \begin{matrix} J'' & J' & J \\ 2L & 2L & 2L \end{matrix} \right\}$  sono i 6j simboli ([3], [6]).

### 3.2.3 Morfismo alla Weyl

Nel primo capitolo sono state trattate le mappe di Weyl utilizzando come esempio gli operatori momento e posizione. Nel caso di  $P$  e  $Q$ , sia lo spazio delle funzioni sia lo spazio operatoriale, sono infinito dimensionali e, quindi, la mappa di Weyl può essere invertita definendo la mappa di Wigner. Nel caso della sfera fuzzy lo spazio degli operatori è finito dimensionale e dipende dal rango delle matrici che si vuole utilizzare. Una tale mappa, che ad ogni funzione definita sulla sfera associa una matrice di rango finito, non può essere invertibile. Ciò che può essere definito è un'applicazione opposta cioè che ad una matrice associa una funzione sulla sfera. La costruzione di questa mappa viene eseguita in modo analogo al caso per  $P$  e  $Q$ , utilizzando delle basi appropriate nei due spazi, e costruendo un elemento dello spazio operatoriale a partire dai coefficienti di Fourier nello sviluppo funzionale ([4]).

Nei paragrafi precedenti è stata introdotta una base di  $\mathbb{M}_n$  tramite le armoniche fuzzy tale che ogni elemento  $\hat{F}^{(N)}$  può essere espresso come:

$$\hat{F}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (3.105)$$

ricordando che una funzione sulla sfera abbastanza regolare<sup>3</sup> può essere espressa, tramite le armoniche sferiche come:

$$F(\theta, \phi) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J f_{JM} Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.106)$$

È possibile creare una corrispondenza tra funzioni sulla sfera e matrici appartenenti a  $\mathbb{M}_N$ . Una tale corrispondenza è ottenuta semplicemente mappando le armoniche sferiche nelle armoniche fuzzy o equivalentemente utilizzando i coefficienti di Fourier dello sviluppo in armoniche sferiche, troncato ad certo  $J = 2L$ , nello sviluppo “fuzzy“ (3.105). Formalmente, questa corrispondenza può essere ottenuta tramite un appropriata mappa di Weyl cioè l'applicazione:

$$\Omega : L^2(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{M}_N$$

<sup>3</sup>Ad esempio se è a quadrato integrabile rispetto alla misura  $d\Omega$



### 3.2 La sfera fuzzy

---

definita dalla posizione:

$$\hat{Y}_{JM}^{(N)} \iff Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.107)$$

$$\hat{F}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \iff F(\theta, \phi) = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM} Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.108)$$

Il taglio delle armoniche sferiche superiori ad un certo  $L$  fa in modo che tutte le funzioni sulla sfera che hanno in comune i coefficienti delle prime  $L$  armoniche sferiche vengono mappate nella stessa matrice. Da cui, risulta evidente, l'impossibilità di definire una trasformazione inversa se si considera tutto lo spazio delle funzioni sulla sfera.

L'applicazione che associa una funzione ad una matrice è proprio la (3.93) infatti utilizzando lo sviluppo (3.105):

$$\langle \theta, \varphi, N | \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM} \hat{Y}_{JM}^{(N)} | \theta, \varphi, N \rangle = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM} \langle \theta, \varphi, N | \hat{Y}_{JM}^{(N)} | \theta, \varphi, N \rangle \quad (3.109)$$

e quindi per definizione di armoniche fuzzy (3.94):

$$\langle \theta, \varphi, N | \hat{F}^{(N)} | \theta, \varphi, N \rangle = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM} Y_{JM}(\theta, \phi) = F(\theta, \phi) \quad (3.110)$$

Un interessante esempio è la fuzzyficazione delle coordinate  $x, y, z$  che con l'usuale prodotto commutano, per far ciò conviene esprimere le coordinate cartesiane in termini sferici:

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta \\ x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

che utilizzando le armoniche sferiche:

$$\begin{aligned} Y_{10}(\theta) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{11}(\theta, \phi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_{1-1}(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \end{aligned}$$

possono essere espresse come:

$$z = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\theta) \quad (3.111)$$

$$x = r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1-1}(\theta, \phi) - Y_{11}(\theta, \phi)) \quad (3.112)$$

$$y = r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}i(Y_{11}(\theta, \phi) + Y_{1-1}(\theta, \phi)) \quad (3.113)$$

Ora per fuzzyficare queste quantità basta utilizzare la mappa di Weyl (3.108) e quindi sostituendo le armoniche sferiche con le corrispondenti armoniche fuzzy si ottiene:

$$\hat{z} = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\hat{Y}_{10} \quad (3.114)$$

$$\hat{x} = r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(\hat{Y}_{1-1} - \hat{Y}_{11}) \quad (3.115)$$

$$\hat{y} = r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}i(\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_{1-1}) \quad (3.116)$$

Ciò prova che le posizioni sulla sfera fuzzy non commutano, inoltre, le armoniche fuzzy  $\hat{Y}_{10}$ ,  $-\hat{Y}_{11}$ ,  $\hat{Y}_{1-1}$  sono proporzionali rispettivamente a  $L_-$ ,  $L_+$  e  $L_z$ , infatti, le suddette armoniche fuzzy soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} [\hat{L}_z, \hat{Y}_{1\pm 1}] &= \pm \hat{Y}_{1\pm 1} \propto \hat{L}_\pm \\ [\hat{L}_+, \hat{Y}_{1-1}] &= \sqrt{2}\hat{Y}_{10} \propto \hat{L}_z \\ [\hat{L}_-, -\hat{Y}_{11}] &= -\sqrt{2}\hat{Y}_{10} \propto -\hat{L}_z \end{cases} \quad (3.117)$$

le quali sono coerenti con le relazioni di commutazione per  $L_-$ ,  $L_+$  e  $L_z$ . Quindi la (3.116) si può riscrivere:

$$\hat{z} = r\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\hat{L}_z \quad (3.118)$$

$$\hat{x} = r\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(\hat{L}_- + \hat{L}_+) \quad (3.119)$$

$$\hat{y} = r\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{3}}i(\hat{L}_- - \hat{L}_+) \quad (3.120)$$

### 3.2 La sfera fuzzy

---

che utilizzando le:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_- + \hat{L}_+) \quad (3.121)$$

$$\hat{L}_y = \frac{1}{2}i(\hat{L}_- - \hat{L}_+) \quad (3.122)$$

diventano:

$$\hat{z} = r\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\hat{L}_z \quad (3.123)$$

$$\hat{x} = 2r\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\hat{L}_x \quad (3.124)$$

$$\hat{y} = 2r\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\hat{L}_y \quad (3.125)$$

Questo risultato mette in evidenza che le relazioni di commutazione per le posizioni fuzzy sono, a meno di una costante, le relazioni di commutazione di  $L_x, L_y, L_z$ :

$$[\hat{x}^{(N)}, \hat{y}^{(N)}] = i\beta\hat{z}^{(N)} \quad (3.126)$$

La costante  $\beta$  può essere determinata imponendo la condizione sul raggio:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow \left( \hat{L}_x^{2(N)} + \hat{L}_y^{2(N)} + \hat{L}_z^{2(N)} \right) |J, M\rangle = J(J+1)\beta^2 |J, M\rangle = r^2 |J, M\rangle \quad (3.127)$$

da cui:

$$J(J+1)\beta^2 = r^2 \rightarrow \beta = \frac{r}{\sqrt{J(J+1)}} \rightarrow \beta = \frac{2r}{\sqrt{N^2 - 1}} \quad (3.128)$$

Dove è stata utilizzata la relazione  $N = 2J + 1$ .

In definitiva, la relazione di commutazione (3.126) si scrive come:

$$[\hat{x}_i^{(N)}, \hat{x}_j^{(N)}] = \frac{i2r\epsilon_{ijk}}{\sqrt{N^2 - 1}}\hat{x}_k^{(N)} \quad (3.129)$$

Come anticipato la definizione della sfera fuzzy tramite il formalismo delle mappe di Weyl coincide con l'approccio più intuitivo introdotto da Madore, cioè il definire la sfera fuzzy come una sequenza di algebre non abeliane, generate da tre coordinate noncommutative che soddisfano  $\hat{x}_i\hat{x}_i = 1$  e (3.129). È interessante

notare che il parametro di non commutatività  $k$  risulta essere inversamente proporzionale ad  $N$ ; il limite  $N \rightarrow \infty$ , implica che  $k \rightarrow 0$  per  $N \rightarrow \infty$  il commutatore tende a zero, riottenendo così il caso continuo.

Ora si consideri l'insieme delle funzioni troncate:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J f_{JM} Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.130)$$

questo è uno spazio vettoriale ma non è un'algebra utilizzando l'usuale prodotto puntuale di due funzioni, infatti il prodotto di due armoniche sferiche di ordine  $2L$  ha un ordine maggiore o uguale di  $2L$ . Formalmente si ha:

$$(Y_{J'M'} Y_{J''M''})(\theta, \phi) = \sum_{J=|J'-J''|}^{|J'+J''|} \sum_{M=-J}^J \sqrt{\frac{(2J'+1)(2J''+1)}{4\pi(J+1)}} C_{J'0J''0}^{J0} C_{J'M'J''M''}^{JM} Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.131)$$

Come è stato mostrato queste funzioni possono essere mappate tramite la (3.108):

$$f(\theta, \phi) \rightarrow \hat{f}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J f_{JM} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (3.132)$$

Utilizzando questa restrizione alle funzioni troncate la mappa di Weyl diviene invertibile e tramite l'inversa, la mappa di Wigner, (3.93) è possibile definire un prodotto di Moyal:

$$(f^{(N)} * g^{(N)})(\theta, \phi) = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \frac{\text{Tr} \left[ \hat{g}^{(N)} \hat{f}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \right] Y_{JM}(\theta, \phi)}{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right]} \quad (3.133)$$

Per verificare questa forma basta fuzzyficare due funzioni troncate utilizzando la mappa di Weyl, eseguirne il prodotto matriciale per poi ritornare nello spazio delle funzioni tramite l'applicazione inversa. Formalmente si ha che il prodotto di Moyal o prodotto star è l'operazione

$$\star : L^2(S^2) \times L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$$

definita da

$$f \star g = \Omega^{-1}(\Omega(f)\Omega(g)) \quad (3.134)$$

### 3.2 La sfera fuzzy

---

per ogni  $f, g \in L^2(S^2)$ .

Infatti, considerando due funzioni  $f^{(N)}$  e  $g^{(N)}$  troncate, utilizzando la mappa di Weyl alle due funzioni vengono associati due matrici  $\hat{f}^{(N)}$  e  $\hat{g}^{(N)}$ . Il prodotto di queste due matrici è ovviamente una matrice di  $\mathbb{M}_N$  e quindi il prodotto può essere scritto come:

$$\hat{f}^{(N)}\hat{g}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J F_{JM} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (3.135)$$

dove i coefficienti sono:

$$F_{JM} = \frac{\text{Tr} \left[ \hat{f}^{(N)} \hat{g}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right]} \quad (3.136)$$

Quindi il prodotto può essere espresso come:

$$\hat{f}^{(N)}\hat{g}^{(N)} \equiv \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \frac{\text{Tr} \left[ \hat{f}^{(N)} \hat{g}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right]} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (3.137)$$

Per ritornare nello spazio delle funzioni basta applicare l'applicazione inversa (3.93) ottenendo:

$$\langle \theta, \phi, N | \hat{f}^{(N)} \hat{g}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle \equiv \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \frac{\text{Tr} \left[ \hat{f}^{(N)} \hat{g}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right]} \langle \theta, \phi, N | \hat{Y}_{JM}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle \quad (3.138)$$

e quindi utilizzando la definizione di armoniche fuzzy si ottiene la definizione di prodotto di Moyal:

$$\Omega^{-1}(\Omega(f^{(N)})\Omega(g^{(N)}))(\theta, \phi) \equiv \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \frac{\text{Tr} \left[ \hat{f}^{(N)} \hat{g}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right]} Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.139)$$

È interessante studiare il comportamento di questo prodotto per  $N \rightarrow \infty$ . Per far ciò conviene esprimere  $\hat{f}^{(N)}\hat{g}^{(N)}$  che compaiono nella (3.139) in termini di

armoniche sferiche, per poi applicare la relazione (3.104)

$$\Omega^{-1}(\Omega(f^{(N)})\Omega(g^{(N)})) = \sum_{J,M} \frac{\text{Tr} \left[ \sum_{J',M'} F_{J'M'} \hat{Y}_{J'M'}^{(N)} \sum_{J'',M''} G_{J''M''} \hat{Y}_{J''M''}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \right]}{\text{Tr} \left[ \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right]} Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (3.140)$$

Dove è stata utilizzata la notazione  $\sum_{A=0}^{2L} \sum_{B=-A}^A = \sum_{A,B}$ . Considerando il numeratore si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{J',M'} \sum_{J'',M''} F_{J'M'} G_{J''M''} \sum_{l,m} \text{Tr} \left[ (-1)^{2L+l} \sqrt{\frac{(2J'+1)(2J''+1)(2L+1)}{4\pi}} \hat{Y}_{lm}^{(N)} \hat{Y}_{JM}^{(N)\dagger} \right] \\ \times \left\{ \begin{matrix} J'' & J' & l \\ 2L & 2L & 2L \end{matrix} \right\} C_{J'M'J''M''}^{lm} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Che utilizzando le proprietà delle armoniche fuzzy(3.99) diventa:

$$\begin{aligned} \sum_{J',M'} \sum_{J'',M''} F_{J'M'} G_{J''M''} \sum_{l,m} (-1)^{2L+l} \sqrt{\frac{(2J'+1)(2J''+1)(2L+1)}{4\pi}} \alpha_{JM}^{2(N)} \delta_{Jl} \delta_{Mm} \\ \times \left\{ \begin{matrix} J'' & J' & l \\ 2L & 2L & 2L \end{matrix} \right\} C_{J'M'J''M''}^{lm} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Riscrivendo la (3.140) utilizzando la precedente espressione si ottiene:

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}(\Omega(f^{(N)})\Omega(g^{(N)})) = \sum_{J',M'} \sum_{J'',M''} F_{J'M'} G_{J''M''} \sum_{l,m} (-1)^{2L+l} \sqrt{\frac{(2J'+1)(2J''+1)(2L+1)}{4\pi}} \\ \times Y_{lm}(\theta, \phi) \left\{ \begin{matrix} J'' & J' & l \\ 2L & 2L & 2L \end{matrix} \right\} C_{J'M'J''M''}^{lm} \end{aligned} \quad (3.143)$$

Ora per studiare il comportamento del prodotto di Moyal per grandi  $N$  conviene utilizzare una forma asintotica dei  $6j$  coefficienti che in questo caso permette di scrivere:

$$\lim_{2L \rightarrow \infty} \left[ (-1)^{2L} \sqrt{2L+1} \left\{ \begin{matrix} J'' & J' & l \\ 2L & 2L & 2L \end{matrix} \right\} \right] = \frac{(-1)^l}{\sqrt{(2l+1)}} C_{J'0J''0}^{l0} \quad (3.144)$$

### 3.2 La sfera fuzzy

---

In definitiva, si ottiene che il prodotto di Moyal per  $L \rightarrow \infty$  e quindi per  $N \rightarrow \infty$  diventa:

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}(\Omega(f^{(\infty)})\Omega(g^{(\infty)})) &= \sum_{J',M'} \sum_{J'',M''} F_{J'M'} G_{J''M''} \sum_{l,m} \sqrt{\frac{(2J'+1)(2J''+1)}{4\pi(2l+1)}} \\ &\times C_{J'M',J''M''}^{lm} C_{J'0,J''0}^{l0} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (3.145)$$

Comparando la precedente espressione con la (3.131) e tenedo conto delle proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan, si deduce che il prodotto di Moyal per  $N \rightarrow \infty$  tende all'usuale prodotto tra funzioni definite sulla sfera.

## Capitolo 4

# Un'applicazione classica della sfera fuzzy

*Come già accennato lo scopo di questa tesi è la verifica di un effettivo utilizzo della sfera fuzzy come strumento per la risoluzione approssimata di un problema elettrostatico. In particolare la determinazione del potenziale all'interno di una sfera cava. Nella prima parte di questo capitolo sarà dedicata a dei richiami di elettrostatica [7]. Verrà mostrata la soluzione generale, tramite le funzioni di Green, per i problemi di elettrostatica con condizioni al contorno sferiche. Inoltre sarà calcolata un'espansione in armoniche sferiche della funzione di Green. Nella seconda parte del capitolo sarà illustrato un algoritmo, pensato per la risoluzione numerica, in grado di risolvere in modo approssimato il suddetto problema tramite la sfera fuzzy.*

### 4.1 Richiami di elettrostatica

#### 4.1.1 Soluzione formale dei problemi elettrostatici con condizioni al contorno

La soluzione dell'equazione di Poisson o di Laplace in un volume finito  $V$  con condizioni al contorno su una superficie  $S$  può essere ottenuta tramite il teorema di Green e le cosiddette funzioni di Green.



## 4.1 Richiami di elettrostatica

---

Nei problemi di elettrostatica in cui non sono presenti condizioni al contorno la soluzione generale:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (4.1)$$

è la strada più conveniente e diretta per qualsiasi problema. In generale le situazioni in cui si vuole calcolare il potenziale in volumi finiti, non necessariamente contenenti distribuzioni di carica, con condizioni al contorno, l'utilizzo della soluzione (4.1) per il calcolo del potenziale è sconveniente nella maggior parte dei casi. Per maneggiare le condizioni al contorno è necessario ricordare la prima identità di Green ed il teorema di Green che sono rispettivamente:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \psi \nabla \phi) d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \quad (4.2)$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S \left[ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \quad (4.3)$$

dove  $\phi$  e  $\psi$  sono due arbitrari campi scalari,  $S$  è la superficie che racchiude il volume  $V$  e  $\partial/\partial n$  è la derivata lungo la normale alla superficie diretta verso l'esterno del volume. L'equazione differenziale di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \rho(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

può essere convertita in una equazione integrale con un'opportuna scelta dei due campi scalari. Infatti, ponendo  $\psi = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \equiv 1/R$  dove  $\mathbf{x}$  è il punto d'osservazione e  $\mathbf{x}'$  è la variabile d'integrazione e ponendo  $\phi = \Phi$  si ottiene:

$$\int_V \left( \Phi \nabla^2 \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \nabla^2 \Phi \right) d^3x = \oint_S \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds \quad (4.5)$$

Utilizzando la (4.4) e l'identità

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.6)$$

si ottiene:

$$\int_V \left( -4\pi \Phi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{4\pi}{R} \rho(\mathbf{x}') \right) d^3x' = \oint_S \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] ds' \quad (4.7)$$

Se il punto  $\mathbf{x}$  giace entro il volume  $V$ , la  $\Phi$  può essere espressa come:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] ds' \quad (4.8)$$

invece se il punto  $\mathbf{x}$  giace fuori dal volume  $V$  il lato destro della (4.8) si annulla. Da questa discendono due interessanti osservazioni: la prima è che se  $S$  tende all'infinito e il campo elettrico su  $S$  decresce più velocemente di  $R^{-1}$  l'integrale di superficie si annulla e quindi la (4.8) diventa la (4.1). La seconda osservazione è che, supponendo il volume  $V$  privo di cariche, il potenziale all'interno di  $V$  è espresso in termini del potenziale e della sua derivata normale solo sulla superficie  $S$ . Questo risultato (4.8) però non è una soluzione di un problema con condizioni al contorno, ma soltanto una equazione integrale, dato che la specificazione di  $\Phi$  e di  $\partial\Phi/\partial n$  (condizioni di Cauchy) è ridondante. A questo punto, sorge la questione di stabilire quale siano le condizioni al contorno appropriate per l'equazione di Poisson (o di Laplace) tali che le soluzioni siano uniche e regolari nella regione in esame. Tuttavia, teoremi di analisi matematica dimostrano che la specificazione di un potenziale su una superficie chiusa definisce un'unica soluzione. Un problema con questo tipo di condizioni al contorno è chiamato *problema di Dirichlet*. Similmente l'assegnazione del campo elettrico (ovvero la derivata normale del potenziale) su tutta la superficie definisce anch'essa un'unica soluzione. Tali condizioni al contorno assegnate dalla derivata normale sono conosciute come *condizioni al contorno di Neumann*, un problema con queste condizioni è chiamato *problema di Neumann*. Formalmente è possibile dimostrare che l'equazione di Poisson, all'interno di un volume  $V$ , ammette un'unica soluzione utilizzando sia le condizioni al contorno di Dirichlet che di Neumann. Infatti, se per assurdo si suppone che esistano due soluzioni distinte  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  che soddisfano le stesse condizioni al contorno, ponendo:

$$U = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (4.9)$$

si ha  $\nabla^2 U = 0$  dentro  $V$ , e  $U = 0$  o  $\partial U/\partial n = 0$  su  $S$  per le condizioni di Dirichlet e Neumann rispettivamente. Dalla prima identità di Green (4.2) con  $\phi = \psi = U$  si ricava la relazione:

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \nabla U) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (4.10)$$

Utilizzando le proprietà di  $U$  la precedente relazione, per entrambe i tipi di

## 4.1 Richiami di elettrostatica

---

condizioni al contorno, si riduce a:

$$\int_V |\nabla U|^2 d^3x = 0 \quad (4.11)$$

che implica  $\nabla U = 0$ . Conseguentemente, all'interno di  $V$ ,  $U$  è costante. Nel caso di condizioni al contorno di Dirichlet,  $U = 0$  su  $S$  e quindi, è nulla ( $\Phi_1 = \Phi_2$ ) all'interno da cui l'unicità della soluzione. Allo stesso modo per le condizioni al contorno di Neumann la soluzione è unica a meno di una costante additiva. Inoltre, dalla (4.10) si deduce che la soluzione è unica anche utilizzando condizioni al contorno miste (Dirichlet su una parte della superficie, Neumann sulla restante parte).

Ora che è stato stabilito come imporre le condizioni al contorno è possibile determinare una soluzione almeno formale ad un problema generale di elettrostatica con condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann. Per ottenere questa soluzione generale si farà uso delle funzioni di Green che verranno introdotte a partire dalla classica soluzione (4.1).

Nell'ottenere la forma integrale dell'equazione di Poisson (4.8), che come si è messo in evidenza non è una soluzione, è scelta nella (4.3) una  $\psi$  uguale a  $1/R$  tale che soddisfi la (4.6). La funzione  $1/R$  fa parte di una classe di funzioni dipendenti dalle variabili  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  chiamate *funzioni di Green*, le quali vengono definite dalla seguente proprietà:

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.12)$$

dove

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (4.13)$$

con la funzione  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  soluzione dell'equazione di Laplace  $\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$  all'interno della regione  $V$ . Grazie a questa generalizzazione del concetto di funzione Green e al suo grado di libertà aggiuntivo, tramite la funzione  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , sorge la possibilità di poter usare il teorema di Green (4.3) con  $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  e scegliere una  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  appropriata che elimini uno dei due integrali di superficie che compaiono nel lato destro della (4.3). Così facendo si ottiene un'espressione per il potenziale  $\Phi(\mathbf{x})$  che contenga solo condizioni al contorno o di Dirichlet o di Neumann. Come verrà mostrato nei prossimi calcoli, per la determinazione del potenziale la funzione di Green non dipende in dettaglio dai valori delle condizioni al contorno utilizzate.

Utilizzando il teorema di Green (4.3), con  $\phi = \Phi$  e  $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , le proprietà (4.12) della funzione di Green, si ottiene la generalizzazione della (4.8):

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] ds' \quad (4.14)$$

Il grado di libertà disponibile nella definizione di  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  (4.13) permette di rendere l'integrale di superficie soltanto dalla condizione al contorno desiderata. Quindi per le condizioni di Dirichlet si richiede che:

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \text{ per } \mathbf{x}' \text{ su } S \quad (4.15)$$

Per cui, il primo termine dell'integrale di superficie in (4.14) si annulla e la soluzione per  $\Phi$  diventa:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}')G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} ds' \quad (4.16)$$

Per le condizioni di Neumann bisogna essere più accorti; infatti procedendo come nel caso precedente cioè richiedendo che:

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = 0 \text{ per } \mathbf{x}' \text{ su } S \quad (4.17)$$

si incorre in un'inconsistenza. Infatti, basta notare che l'applicazione del teorema di Gauss alla (4.12) mostra che.

$$\oint_S \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = -4\pi \quad (4.18)$$

Conseguentemente la condizione al contorno più semplice da imporre su  $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  è:

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{s} \text{ per } \mathbf{x}' \text{ su } S \quad (4.19)$$

Dove  $s$  è l'area della superficie  $S$ . Utilizzando questa funzione di Green nella (4.14) si ottiene la soluzione:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} ds' \quad (4.20)$$

dove  $\langle \Phi \rangle_S$  è il valore medio del potenziale su tutta la superficie  $S$ . Come già anticipato, si conclude che la funzione di Green soddisfa semplici condizioni al

## 4.1 Richiami di elettrostatica

---

contorno (4.15) o (4.19) che non dipendono in dettaglio dai valori delle condizioni al contorno del problema.

Un ultimo importante aspetto da sottolineare è il significato fisico di  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Come già menzionato,  $F$  è una soluzione dell'equazione di Laplace e rappresenta il potenziale di un sistema di cariche esterne al volume  $V$  scelto in modo da soddisfare le condizioni al contorno omogenee del potenziale nullo (o della sua derivata normale nulla) sulla superficie  $S$ , includendo il potenziale dovuto alla distribuzione di carica vera. Dato che il potenziale nel punto  $\mathbf{x}$  sulla superficie  $S$  generato dalle cariche sorgenti dipende dalle posizioni delle stesse, la finta distribuzione di cariche esterna  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  deve necessariamente dipendere da  $\mathbf{x}'$ . Da questo punto di vista il così detto metodo delle cariche immagine è fisicamente equivalente alla determinazione dell'appropriata funzione  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  che soddisfi la condizione al contorno (4.15) o (4.19).

### 4.1.2 Espansione della funzione di Green in coordinate sferiche

Come mostrato nel paragrafo precedente, un qualsiasi problema di elettrostatica con condizioni al contorno può essere risolto (almeno formalmente) in termini di una funzione di Green che dipende solo dal tipo di condizioni al contorno utilizzate. In questo paragrafo, verrà trattata l'espansione della funzione di Green in coordinate sferiche poichè la condizioni al contorno utilizzate per il problema, che si vuole adoperare per testare la sfera fuzzy, sono assegnate su una superficie sferica. Nella sezione precedente è stato sottolineata l'equivalenza tra il metodo delle cariche immagine ed il trovare una funzione di Green appropriata per la soluzione di un problema con condizioni al contorno omogenee. Quindi presa una superficie sferica, il potenziale prodotto da una carica e dalla sua immagine, non è altro che la funzione di Green appropriata per le condizioni al contorno di Dirichlet o Neumann. Per un problema di Dirichlet omogeneo su una sfera di raggio  $a$  il potenziale generato da una carica unitaria e dalla rispettiva carica immagine è dato da:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (4.21)$$

con

$$q' = -\frac{a}{x'} \quad , \quad y = \frac{a^2}{x'} \quad (4.22)$$

dove  $x'$  e  $y'$  indicano i moduli dei rispettivi vettori. Esprimendo la (4.21) in termini delle sole  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  si ottiene la funzione di Green:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{x'|\mathbf{x} - \frac{a^2}{x'^2}\mathbf{x}'|} \quad (4.23)$$

E' utile ricordare l'espansione in armoniche sferiche della funzione  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ :

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{>}^l}{r_{<}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.24)$$

dove  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) è minore (maggiore) tra  $r$  e ( $r'$ ). Utilizzando la precedente relazione per entrambe i termini della (4.23), si ottiene un'espansione in armoniche sferiche della funzione di Green per la determinazione del potenziale all'esterno di una sfera di raggio  $a$  su cui imporre le condizione al contorno:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[ \frac{r_{>}^l}{r_{<}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left( \frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.25)$$

La costruzione precedente ha un carattere euristico; inoltre, il risultato (4.25) vale soltanto per la determinazione del potenziale esterno alla sfera  $S$ . Per ottenere un'espansione della funzione di Green in coordinate sferiche più generale conviene partire solo dalla definizione della funzione di Green e dalle sue condizioni al contorno. Utilizzando l'espansioni in armoniche sferiche della delta di Dirac e considerando una generica espansione della funzione di Green possiamo utilizzare la (4.12) per determinare i coefficienti dell'espansione. In generale, la funzione Green come funzione di  $\mathbf{x}$  può essere espansa in armoniche sferiche come:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(\theta', \phi') g_l(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.26)$$

Utilizzando l'espansione precedente e l'espansione della delta in armoniche sferiche:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.27)$$

nella (4.12) si arriva alle relazioni:

$$A_{lm}(\theta', \phi') = Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (4.28)$$

## 4.1 Richiami di elettrostatica

---

e

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \quad (4.29)$$

Quindi, si conclude che la parte radiale della funzione di Green soddisfa la stessa parte radiale dell'equazione di Laplace per  $r \neq r'$  (3.9), quindi, può essere scritta come:

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Ar^l + Br^{-(l+1)} & \text{per } r < r' \\ A'r^l + B'r^{-(l+1)} & \text{per } r > r' \end{cases} \quad (4.30)$$

I coefficienti  $A, B, A', B'$  sono funzioni di  $r'$  da determinare tramite le condizioni al contorno, la simmetria di  $g_l(r, r')$  rispetto ad  $r$  e  $r'$ , e la condizione imposta dalla  $\delta(r - r')$  nella (4.29). Ora volendo determinare un'espansione della funzione di Green valida all'interno di una sfera si utilizza una superficie al contorno composta da una superficie sferica di raggio  $R$ . L'annullarsi di  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  per  $\mathbf{x}$  su questa superficie implica l'annullarsi di  $g_l(r, r')$  per  $r = R$ . Conseguentemente  $g_l(r, r')$  diventa

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Ar^l & \text{per } r < r' \\ B' \left( \frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{R^{2l+1}} \right) & \text{per } r > r' \end{cases} \quad (4.31)$$

La simmetria in  $r$  e  $r'$  implica che i coefficienti  $A(r')$  e  $B'(r')$  siano tali da poter scrivere  $g_l(r, r')$  come :

$$g_l(r, r') = Cr^l \left( \frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{R^{2l+1}} \right) \quad (4.32)$$

Per determinare la costante  $C$  bisogna considerare l'effetto della delta nella (4.29). Questa equazione implica che la costante  $C$  sia:

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1)} \quad (4.33)$$

Combinando la precedente relazione con le (4.26), (4.28) e (4.32) si approda all'espansione della funzione di Green per una sfera di raggio  $R$ :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{2l+1} \left( \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{(r_{>} r_{<})^l}{R^{2l+1}} \right) \quad (4.34)$$

Per  $R \rightarrow \infty$  e  $b \rightarrow \infty$ , si riottiene la precedente espansione (4.24).

## 4.2 Applicazione della sfera fuzzy

In questo paragrafo sarà descritto l'algoritmo sviluppato per la fuzzyficazione ed il successivo calcolo approssimato del potenziale all'interno di una sfera cava di raggio  $R$ , con condizioni al contorno di Dirichlet e con una distribuzione di cariche interne assegnata. La filosofia del metodo è il trasformare tutte le funzioni in delle matrici o come sarà mostrato in collezioni di matrici, in questo spazio matriciale la risoluzione approssimata del problema diventa puramente algebrica. Questo algoritmo numerico, una volta assegnato l'ordine della rappresentazione  $N$  con  $(2J + 1 = N)$  o equivalentemente un  $L = N - 1$  massimo nello sviluppo fuzzy, crea una collezione di sfere fuzzy dividendo in  $\mathcal{N}$  parti il raggio  $R$  della sfera ed assegnando ad ogni sfera fuzzy il raggio  $R_i$  con  $i$  che va da 1 a  $\mathcal{N}$  creando così una sorta di cipolla fuzzy. Ad una funzione vengono associate  $\mathcal{N}$  matrici  $N \times N$  e quindi  $\mathcal{N}N^2$  coefficienti. I limiti  $N \rightarrow \infty$  e  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$  restituiscono il caso esatto. Su questa collezione di sfere fuzzy l'algoritmo fuzzyfica la funzione di Green (4.34), la derivata radiale della funzione di Green, la condizione al contorno e la distribuzione di carica interna. Avendo trasformato tutte le funzioni necessarie in matrici e dato che gli integrali in  $d\omega$  si trasformano in tracce di una matrice e gli integrali in  $dr$  si trasformano in somme tra matrici quindi la determinazione del potenziale  $\Phi(\mathbf{x})$  tramite la (4.16) diventa un procedimento puramente algebrico. Una volta determinata la matrice  $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$  l'algoritmo ritorna alle funzioni su ogni sfera fuzzy tramite gli stati coerenti (3.93).

### 4.2.1 Costruzione delle armoniche fuzzy

La prima parte dell'algoritmo sviluppato è dedicata alla costruzione delle armoniche fuzzy e quindi delle sfere fuzzy che dipenderà dall'approssimazione richiesta. Il primo passo da fare è la costruzione degli stati coerenti. Tali stati vengono costruiti a partire da un set di vettori  $N$ -dimensionali  $|L, \sigma, \rangle$  con  $L$  fissato dalla relazione  $2L + 1 = N$  e  $\sigma$  compreso tra  $-L$  e  $L$ . tramite la:

$$|\theta, \varphi, N\rangle = \sum_{M=-L}^L \left( \frac{(2L)!}{(L+\sigma)!(L-\sigma)!} \right)^{1/2} (\cos \theta/2)^{L+\sigma} (\sin \theta/2)^{L-\sigma} e^{-i\phi\sigma} |L, \sigma, N\rangle \quad (4.35)$$



## 4.2 Applicazione della sfera fuzzy

---

Gli stati coerenti vengono utilizzati per assegnare ad ogni matrice una funzione sulla sfera tramite la relazione:

$$\langle \theta, \phi, N | \hat{F}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle = f(\theta, \phi) \quad (4.36)$$

e per definire le armoniche fuzzy come quelle matrici tali che

$$\langle \theta, \phi, N | \hat{Y}_{JM}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle = Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (4.37)$$

Queste armoniche possono essere costruite tramite le loro utilizzando le proprietà di trasformazione rispetto all'azione dei generatori di SU(2). Infatti le armoniche fuzzy si comportano allo stesso modo del caso classico cioè:

$$\left[ \hat{L}_{\pm}^{(N)}, \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right] = \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} \hat{Y}_{JM \pm 1}^{(N)} \quad (4.38)$$

$$\left[ \hat{L}_z^{(N)}, \hat{Y}_{JM}^{(N)} \right] = M \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (4.39)$$

Queste regole identificano un'armonica fuzzy a meno di un coefficiente di normalizzazione, tale coefficiente di normalizzazione verrà determinato in seguito. Per esempio la determinazione dalle armoniche fuzzy con  $L = 1$  può essere eseguita calcolando  $\hat{Y}_{11}^{(N)}$  per poi determinare  $\hat{Y}_{10}^{(N)}$  e  $\hat{Y}_{1-1}^{(N)}$  tramite applicazioni successive di  $\hat{L}_{\pm}^{(N)}$ . Per concretezza considerando il caso  $2 \times 2$  si ha:

$$\hat{Y}_{11}^{(2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Applicando  $\hat{L}_{+}^{(N)}$  si ottiene:

$$\left[ \hat{L}_{+}^{(2)}, \hat{T}_{11}^{(2)} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.41)$$

Da cui:

$$\sqrt{2} \begin{pmatrix} c & d - a \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0 \quad (4.42)$$

Il che implica  $c = 0$  e  $d = a$ , ora utilizzando  $\hat{L}_{-}^{(N)}$ :

$$\left[ \hat{L}_z^{(2)}, \hat{T}_{11}^{(2)} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Da cui:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

e quindi  $a = 0$ . L'armonica fuzzy  $\hat{Y}_{11}^{(2)}$  è, a meno di un fattore di normalizzazione:

$$\hat{Y}_{11}^{(2)} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Utilizzando una normalizzazione ad uno si ottengono i cosiddetti tensori di polarizzazione.

$$\text{Tr} \left[ \hat{T}_{11}^{(2)\dagger} \hat{T}_{11}^{(2)} \right] = a^2 \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1 \quad (4.46)$$

Scelta  $a = 1$  i successivi tensori di polarizzazione sono ottenuti come:

$$\hat{T}_{10}^{(2)} = \left[ \frac{\hat{L}_-^{(2)}}{\sqrt{2}}, \hat{T}_{11}^{(2)} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

$$\hat{T}_{1-1}^{(2)} = \left[ \frac{\hat{L}_-^{(2)}}{\sqrt{2}}, \hat{T}_{10}^{(2)} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Questo procedimento, però, anche se intuitivo è alquanto sconveniente per quanto riguarda l'efficienza di calcolo. Quindi si è preferito, per la costruzione degli operatori di polarizzazione, utilizzare l'espressione degli elementi di matrice in termini dei coefficienti di Clebsch-Gordan. Relazione che deriva comunque dalle regole di commutazione (4.39). Si ha:

$$\langle L, \sigma, N | \hat{T}_{JM}^{(N)} | L, \sigma', N \rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} C_{L\sigma JM}^{L\sigma'} \quad (4.49)$$

dove è stata esplicitata la dipendenza da  $J$  e con  $(\sigma, \sigma' = -L, -L+1, \dots, L)$ .

Quindi invertendo la precedente relazione si ottiene:

$$\hat{T}_{JM}^{(N)} = \sum_{\sigma=-L}^L \sum_{\sigma'=-L}^L \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} C_{L\sigma JM}^{L\sigma'} |L, \sigma', N\rangle \langle L, \sigma, N| \quad (4.50)$$

## 4.2 Applicazione della sfera fuzzy

Per il calcolo numerico è di gran lunga più conveniente questa espressione in quanto i coefficienti di Clebsch-Gordan sono noti e tabulati.

Resta da determinare la costante di proporzionalità tra armoniche fuzzy e tensori di polarizzazione. Ciò viene effettuato tramite la normalizzazione delle armoniche sferiche e la definizione delle armoniche fuzzy:

$$\langle \theta, \phi, N | \alpha \hat{T}_{JM}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle = \langle \theta, \phi, N | \hat{Y}_{JM}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle = Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (4.51)$$

da cui:

$$\alpha = \frac{Y_{JM}(\theta, \phi)}{\langle \theta, \phi, N | \hat{T}_{JM}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle} \quad (4.52)$$

Utilizzando le (4.35) e (4.49) il lato destro della precedente relazione diventa:

$$\sum_{\sigma, \sigma' = -L}^L \frac{Y_{JM}(\theta, \phi)}{\left( \frac{(2L+1)(2L)!}{(2J+1)(L+\sigma)!(L-\sigma)!(L+\sigma')!(L-\sigma')!} \right)^{1/2} (\cos \theta/2)^{2L+\sigma+\sigma'} (\sin \theta/2)^{2L-\sigma-\sigma'} e^{-i\phi(\sigma-\sigma')} C_{L\sigma JM}^{L\sigma'}} \quad (4.53)$$

Grazie alla proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan :

$$M + \sigma \neq \sigma' \Rightarrow C_{L\sigma JM}^{L\sigma'} = 0 \quad (4.54)$$

si ottiene:

$$\sum_{\sigma = -L}^L \frac{Y_{LM}(\theta, \phi)}{\frac{(2L)!(2L+1)^{1/2}}{((2L+1)(L+\sigma)!(L-\sigma)!(L+\sigma+M)!(L-\sigma-M)!)^{1/2}} (\cos \theta/2)^{2(L+\sigma)+M} (\sin \theta/2)^{2(L-\sigma)-M} e^{i\phi M} C_{L\sigma JM}^{L, \sigma+M}} \quad (4.55)$$

Dato che il coefficiente  $\alpha$  non dipende da  $\theta$  e  $\phi$  è possibile fissare gli stessi. Ponendo  $\theta = \pi/3$  e  $\phi = 0$  si ottiene:

$$\alpha = \sum_{\sigma = -L}^L \frac{Y_{LM}(\frac{\pi}{3}, 0)}{\frac{(2L)!(2L+1)^{1/2}}{((2L+1)(L+\sigma)!(L-\sigma)!(L+\sigma+M)!(L-\sigma-M)!)^{1/2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2(L+\sigma)+M} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(L-\sigma)-M} C_{L\sigma JM}^{L, \sigma+M}} \quad (4.56)$$

Ed infine esprimendo le armoniche sferiche  $Y_{LM}(\frac{\pi}{3}, 0)$  in termini di funzioni ipergeometriche:

$$Y_{LM}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = (-1)^M \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi(J+M)!(J-M)!}} (2J+1)!! \left(\frac{1}{2}\right)^J (\sqrt{3})^M \\ \times F\left(-\frac{L-M}{2}, -\frac{L-M-1}{2}; \frac{2L-1}{2}; 4\right) \quad (4.57)$$

si giunge ad una formula utilizzabile, in quanto sia le funzioni ipergeometriche sia i coefficienti di Clebsch-Gordan sono tabulati e facilmente implementabili in un'algoritmo numerico.

Come ampiamente discusso, sfera fuzzy può essere utilizzata per avere un'approssimazione dell'algebra delle funzioni definite sulla sfera, una volta fuzzyficate tramite un morfismo alla Weyl, queste funzioni possono essere manipolate estendendo allo spazio matriciale i concetti di derivata ed integrale. Ma tutto ciò non basta a trattare il problema di elettrostatica in esame. Infatti, la sfera fuzzy non rende conto della dipendenza radiale del problema, in quanto tutta la trattazione è effettuata a raggio fissato. Per ovviare a questa mancanza viene utilizzata una successione di sfere concentriche su raggi progressivi, questi raggi possono essere scelti in modo arbitrario. Per far ciò si considera la palla tridimensionale di raggio  $R$  foliata da una serie di sfere concentriche di raggio arbitrario purchè siano contenute dalla sfera di raggio  $R$  su cui viene assegnato il potenziale. Per esempio una partizione può essere :

$$r_i = \frac{i}{\mathcal{N}} \text{ per } i = 1, 2 \dots \mathcal{N} \quad (4.58)$$

Fissata questa successione si considera la fuzzyficazione di ogni sfera ottenendo una sorta di cipolla fuzzy, cioè una collezione di sfere fuzzy dove ad ogni raggio  $r_i$  viene assegnata una sfera fuzzy. Una generica funzione all'interna della sfera di raggio  $R$  sarà approssimata da  $\mathcal{N}$  matrici; la parte angolare è approssimata dalla sfera fuzzy, la parte radiale invece si viene a creare una sorta di reticolo. Formalmente si ottiene che ad ogni sfera viene associata una matrice  $N \times N$  ad ogni funzione  $f(r, \omega)$  viene associata successione di  $\mathcal{N}$  matrici  $F_{(j)}$  di rango  $N$ :

$$f(r, \Omega) \rightarrow \hat{F} = \bigoplus_{j=0}^{\mathcal{N}} \hat{F}^{(j)} \quad (4.59)$$

## 4.2 Applicazione della sfera fuzzy

---

con le  $\hat{F}^{(j)}$  matrici definite come:

$$\hat{F}^{(j)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J f_{JM}(r_j) \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (4.60)$$

La dipendenza radiale viene inglobata nei coefficienti della serie fuzzy, i quali sono determinati calcolando la  $f(r, \omega)$  in ogni raggio  $r_i$  e proiettandola sulle armoniche sferiche.

### 4.2.2 Fuzzyficazione del problema e risoluzione approssimata

Ora l'algoritmo procede alla fuzzyficazione del potenziale sul bordo e della distribuzione di carica interna. Per quanto riguarda il potenziale sul bordo, dato che è definito solo sulla sfera più esterna e quindi basta eseguire la fuzzyficazione sull'ultima sfera:

$$\Phi_{JM}^c = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \Phi_{JM}^c \hat{Y}_{JM}$$

Dove i  $\Phi_{JM}$  sono:

$$\hat{\Phi}_{JM}^c = \sum_{\Omega} \Phi^c(\theta, \phi) Y_{JM}^*(\theta, \phi) d\Omega \quad (4.61)$$

Mentre per la distribuzione di carica, dato che è definita in tutta la palla, bisogna utilizzare la (4.59), ottenendo:

$$\hat{\rho} = \bigoplus_{j=0}^{\mathcal{N}} \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \rho_{JM}(r_j) \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (4.62)$$

I coefficienti  $\rho_{JM}(r_j)$  sono dati da:

$$\rho_{JM}(r_j) = \int_S \rho(r_j, \theta, \phi) Y_{JM}^*(\theta, \phi) d\Omega \quad (4.63)$$

Nel caso in cui la distribuzione di carica sia presente solo su una sfera di raggio  $r_i$  l'unico coefficiente  $f_{JM}(r_j)$  diverso da zero è per  $i = j$  e quindi l'approssimazione del reticolo non influenza la fuzzyficazione della  $\rho(r_j, \theta, \phi)$ . Invece nel caso che la distribuzione di carica sia dipendente dal raggio ma localizzata, cioè la  $\rho$  è diversa

da zero solo in delle regioni interne alla sfera, conviene utilizzare una foliazione che concentri più sfere nelle regioni in cui la  $\rho$  è diversa da zero.

A questo punto si giunge alla fuzzyficazione della funzione di Green che, come è stato mostrato nel paragrafo precedente, per questo problema risulta essere espressa in termini di armoniche sferiche come:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \frac{Y_{JM}^*(\theta', \phi') Y_{JM}(\theta, \phi)}{2J+1} \left( \frac{r_{<}^J}{r_{>}^{J+1}} - \frac{(r_{>} r_{<})^J}{R^{2J+1}} \right) \quad (4.64)$$

In quanto funzione di due punti la funzione di Green verrà mappata per ogni sfera in un prodotto tensore di due matrici del tipo:

$$\hat{G}^{(i)} \otimes \hat{G}^{(j)} = \sum_{J=0}^L \sum_{M=-J}^J \sum_{J'=0}^L \sum_{M'=-J'}^{J'} g_{JM J' M'}(r_i, r_j) \hat{Y}_{J' M'}^\dagger \otimes \hat{Y}_{JM} \quad (4.65)$$

e quindi:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rightarrow \hat{G} = \bigoplus_{i=0}^{\mathcal{N}} \bigoplus_{j=0}^{\mathcal{N}} \hat{G}^{(i)} \otimes \hat{G}^{(j)} \quad (4.66)$$

I coefficienti  $g_{JM J' M'}(r_i, r_j)$  dell'espansione (4.65) sono determinabili a partire dall'espansione in armoniche sferiche della funzione di Green (4.64). Infatti una volta troncata la serie (4.64) a  $J = L$  dal confronto con la (4.65) si deduce:

$$g_{JM J' M'}(r_i, r_j) = \frac{4\pi \delta_{JJ'} \delta_{MM'}}{2J+1} \left( \frac{r_{<}^J}{r_{>}^{J+1}} - \frac{(r_{>} r_{<})^J}{R^{2J+1}} \right) \quad (4.67)$$

In definitiva la funzione di Green viene fuzzyficata tramite lo sviluppo:

$$\hat{G}^{(i)} \otimes \hat{G}^{(j)} = \sum_{J=0}^L \sum_{M=-J}^J \frac{4\pi}{2J+1} \left( \frac{r_{(i,j)<}^J}{r_{(i,j)>}^{J+1}} - \frac{(r_{(i,j)>} r_{(i,j)<})^J}{R^{2J+1}} \right) \hat{Y}_{JM}^\dagger \otimes \hat{Y}_{JM} \quad (4.68)$$

dove  $r_{(i,j)<} (r_{(i,j)>})$  è il minore (maggiore) tra  $r_i$  e  $r_j$ .

Analogamente, per la derivata radiale della funzione di Green, necessaria per utilizzare la relazione (4.16), la fuzzyficazione è effettuata tramite il suo sviluppo in armoniche sferiche:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = 4\pi \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \frac{Y_{JM}^*(\theta', \phi') Y_{JM}(\theta, \phi)}{2J+1} r_{<}^J \left( \frac{(J+1)r_{>}^J}{r_{>}^{2J+2}} - \frac{J r_{>}^{J-1}}{R^{2J+1}} \right) \quad (4.69)$$

## 4.2 Applicazione della sfera fuzzy

Dove è stato supposto che la variabile  $\mathbf{x}'$  sia la variabile d'integrazione sulla sfera più esterna e quindi la derivata va fatta su i raggi  $r_>$ . Come per la (4.67) si ha per i coefficienti per l'espansione fuzzy della derivata di Green:

$$g_{JM J' M'}(r_i, r_j) = \frac{4\pi \delta_{JJ'} \delta_{MM'}}{2J+1} r_{(i,j)<}^J \left( \frac{(J+1)r_{(i,j)>}^J}{r_{(i,j)>}^{2J+2}} - \frac{Jr_{(i,j)>}^{J-1}}{R^{2J+1}} \right) \quad (4.70)$$

In definitiva la derivata radiale di Green viene fuzzyficata tramite lo sviluppo:

$$\hat{G}_{\partial r'}^{(i)} \otimes \hat{G}_{\partial r'}^{(j)} = \sum_{J=0}^L \sum_{M=-J}^J \frac{4\pi}{2J+1} r_{(i,j)<}^J \left( \frac{(J+1)r_{(i,j)>}^J}{r_{(i,j)>}^{2J+2}} - \frac{Jr_{(i,j)>}^{J-1}}{R^{2J+1}} \right) \hat{Y}_{JM}^\dagger \otimes \hat{Y}_{JM} \quad (4.71)$$

Prima di procedere con la risoluzione fuzzy conviene ricordare la formula precedentemente mostrata per la risoluzione classica del problema:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} ds' \quad (4.72)$$

Trasformata nello spazio matriciale questa relazione diventa puramente algebrica. Infatti, come è stato mostrato, gli integrandi diventano matrici e, come sarà mostrato, l'integrale di superficie diventa una traccia e l'integrale di volume diventa una traccia più una somma sulla variabile radiale.

Infatti preso l'integrale in  $d\Omega$  di una funzione possiamo considerare l'integrale della funzione troncata ad un certo  $N$  che sarà dato da:

$$\int_{\Omega} f(\theta, \phi) d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} f^{(N)}(\theta, \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \langle \theta, \phi, N | \hat{f}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle d\Omega \quad (4.73)$$

Utilizzando la completezza degli stati  $|L, M, N\rangle$  si ottiene:

$$\int_{\Omega} \langle \theta, \phi, N | \hat{f}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle d\Omega = \sum_{m=-J}^J \sum_{m'=-J}^J \int_{\Omega} \langle \Omega | |M\rangle \langle M | \hat{f}^{(N)} | M' \rangle | \langle M' | \Omega \rangle d\Omega \quad (4.74)$$

Dove per semplicità è stato posto  $|\theta, \phi, N\rangle = |\Omega\rangle$  e  $|L, M, N\rangle = |M\rangle$ . Il termine è  $\langle M | \hat{f}^{(N)} | M' \rangle$  un coefficiente quindi non dipende delle variabili d'integrazione. la precedente relazione diventa:

$$\int_{\Omega} \langle \theta, \phi, N | \hat{f}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle d\Omega = \sum_{m=-J}^J \sum_{m'=-J}^J \langle M | \hat{f}^{(N)} | M' \rangle \int_{\Omega} \langle \Omega | M \rangle | \langle M' | \Omega \rangle d\Omega \quad (4.75)$$

Che per l'ortogonalità dei vettori  $|L, M, N\rangle$  l'operatore  $|M\rangle\langle M'|$  diventa una delta di Kroneker  $\delta_{MM'}$ :

$$\int_{\Omega} \langle \theta, \phi, N | \hat{f}^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle d\Omega = \text{Tr} \left( \hat{f}^{(N)} \right) \int_{\Omega} \langle \Omega | \Omega \rangle d\Omega \quad (4.76)$$

Dove è stata utilizzata la definizione di traccia di una matrice. Utilizzando le proprietà degli stati coerenti, in particolare che la norma di un stato coerente è  $4\pi/(2L+1)$ , si ottiene :

$$\int_{\Omega} f(\theta, \phi) d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} f^{(N)}(\theta, \phi) d\Omega = \frac{4\pi}{2L+1} \text{Tr} \left( \hat{f}^{(N)} \right) \quad (4.77)$$

A questo punto la risoluzione del problema tramite la (4.72), viene eseguita in due parti cioè calcolando i due integrali distinti per poi sommare i rispettivi risultati. Per quanto riguarda l'integrale di superficie dato che è eseguito rispetto alla sola variabile  $x'$  il corrispondente integrale fuzzy deve essere compiuto solo una parte del prodotto tensore che rappresenta la derivata radiale della funzione di Green inoltre considerando che la superficie su cui integrare è la sfera di raggio massimo la fuzzyficazione è compiuto solo sull'ultima sfera della cipolla fuzzy. Il calcolo dell'integrale di superficie, quindi, viene effettuato moltiplicando la matrice rappresentativa del potenziale sul bordo con la prima parte fuzzyficazione della derivata radiale della funzione di Green ponendo l'indice radiale uguale ad  $\mathcal{N}$  cioè l'indice dell'ultima sfera fuzzy :

$$\hat{\Phi}_0^{\mathcal{N}} \hat{G}_{\partial r'}^{\mathcal{N}} \otimes \hat{G}_{\partial r'}^{(j)} \quad (4.78)$$

Fatto ciò utilizzando la (4.77) sulla prima parte del prodotto tensore e ricordando il fattore  $r_{\mathcal{N}}^2$  derivante della misura si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} ds' \rightarrow \frac{r_{\mathcal{N}}^2}{2L+1} \text{Tr} \left( \hat{\Phi}_{\mathcal{N}} \hat{G}_{\partial r'}^{\mathcal{N}} \right) \otimes \hat{G}_{\partial r'}^{(j)} \quad (4.79)$$

Un procedimento analogo è stato effettuato per la fuzzyficazione dell'integrale di volume che compare nella (4.72). Il fatto che sia un integrale di volume implica, che passando all'approssimazione della cipolla fuzzy in cui è stato inserito un reticolo per la parte radiale, bisogna tener conto di tutti i contributi delle varie sfere. Quindi, nell'integrale fuzzy, oltre che una traccia sarà presente una somma tra le matrici appartenenti a sfere su raggi diversi. In definitiva si ha:



## 4.2 Applicazione della sfera fuzzy

---

$$\int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' \rightarrow \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{r_i^2 4\pi}{2L+1} \text{Tr} \left( \hat{\rho}_i \hat{G}^i \right) \otimes \hat{G}^{(j)} \quad (4.80)$$

In definitiva la soluzione fuzzy viene calcolata dall'algoritmo grazie alla formula:

$$\hat{\Phi}^{(N)} = \bigoplus_{j=1}^{\mathcal{N}} \left[ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{r_i^2 4\pi}{2L+1} \text{Tr} \left( \hat{\rho}_i \hat{G}^i \right) \otimes \hat{G}^{(j)} - \frac{r_{\mathcal{N}}^2}{2L+1} \text{Tr} \left( \hat{\Phi}_{\mathcal{N}} \hat{G}_{\partial r'}^{\mathcal{N}} \right) \otimes \hat{G}_{\partial r'}^{(j)} \right] \quad (4.81)$$

Per tornare nello spazio delle funzioni si utilizza la (3.93) per ogni  $j$  fissato, ottenendo così l'andamento approssimato del potenziale su ogni sfera di raggio  $r_j$

$$\Phi(r_j, \theta, \phi) = \langle \theta, \phi, N | \hat{\Phi}_j^{(N)} | \theta, \phi, N \rangle \quad (4.82)$$

A questo punto l'algoritmo, ha finalmente determinato  $\Phi(r_j, \theta, \phi)$  per ogni  $j$ , che equivale determinare un'approssimazione della soluzione del problema.

### 4.2.3 Visualizzazione delle soluzioni

L'ultima parte dell'algoritmo è dedicata alla visualizzazione della soluzione su ogni sfera, per visualizzare tali soluzioni viene adoperata una particolare proiezione della sfera sul piano. Introducendo le coordinate polari  $\rho, \alpha$  sul piano, dove  $\rho$  è la coordinata radiale e  $\alpha$  è la coordinata angolare, tale proiezione associa la variabile  $\theta$  alla variabile radiale del piano  $\rho$  e la variabile della sfera  $\phi$  alla variabile del piano  $\alpha$ . Cioè:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \alpha = \arccos \left( \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \quad (4.83)$$

Quindi ponendo  $\rho = \theta$  e  $\alpha = \phi$  si ottiene:

$$\theta = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \phi = \arccos \left( \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \quad (4.84)$$

Dato che  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  le variabili polari sul piano soddisfano:  $0 \leq \rho \leq \pi$  e  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Le quali, a loro volta, impongono sulle variabili  $X$  e  $Y$  di variare tra  $\pi$  e  $-\pi$  con la condizione  $f(X, Y) = 0$  per  $\sqrt{X^2 + Y^2} > \pi$ . Inoltre,

data la non invertibilità del coseno tra 0 e  $2\pi$  bisogna che la proiezione sia definita in modo diverso a seconda della regione cioè:

$$\begin{aligned} \text{per } 0 \leq \phi < \pi &\rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \\ \text{per } \pi < \phi \leq 2\pi &\rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) + \pi \end{aligned} \quad (4.85)$$

In questo modo una qualsiasi funzione  $f(r_i, \theta, \phi)$  definita sulla sfera viene proiettata sul piano tramite il cambiamento di variabili, ottenendo una funzione  $f'(r_i, X, Y)$  definita in un disco di raggio  $\pi$ , sul piano  $X - Y$ . Il polo sud viene proiettato al centro del disco mentre il polo nord viene proiettato sul bordo.

Per esempio la funzione  $f(\theta, \phi) = \theta$  viene proiettata nella funzione  $f'(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}$ . Graficando la due funzioni si ottiene:

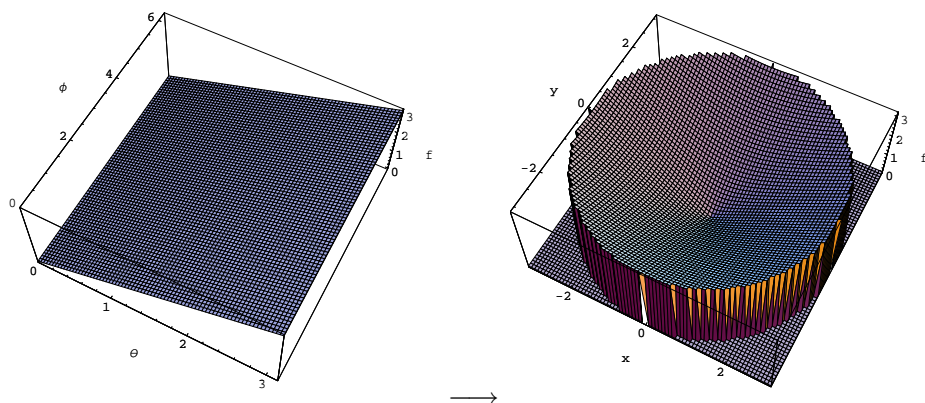


Figura 4.1: a sinistra la funzione  $f = \theta$ ; a destra la proiezione  $f'(X, Y)$ .

Invece la funzione  $f(\theta, \phi) = \phi$  viene proiettata nella funzione  $f'(X, Y) = \arccos\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$  e  $f'(X, Y) = \arccos\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) + \pi$ . Graficando la due funzioni si ottiene:

## 4.2 Applicazione della sfera fuzzy

---

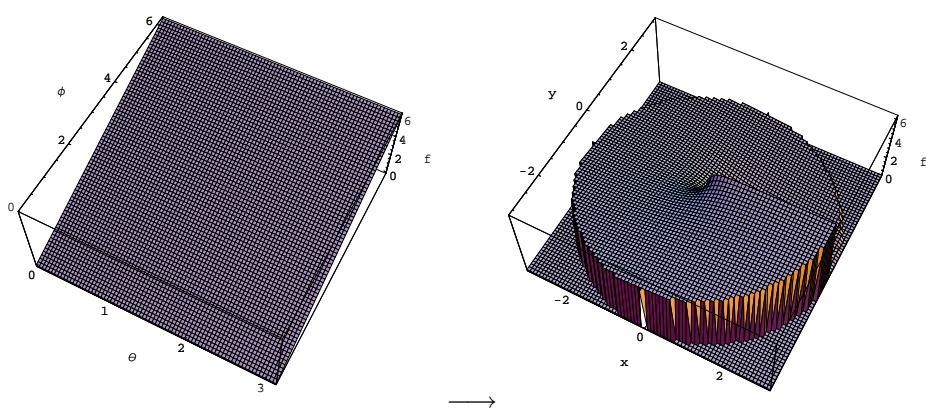


Figura 4.2: a sinistra la funzione  $f = \phi$ ; a destra la proiezione  $f'(X, Y)$ .

# Capitolo 5

## Verifica del metodo e conclusioni

*In quest'ultimo capitolo sarà utilizzato l'algoritmo precedentemente descritto per la determinazione approssimata del potenziale all'interno di una sfera cava. Per verificare l'algoritmo verranno risolti casi in cui l'approssimazione fuzzy è esatta cioè nei casi in cui la distribuzione di carica interna e il potenziale al contorno sono espressi da un numero finito di armoniche sferiche. Infatti l'algoritmo verrà testato con una distribuzione di carica sferica e una distribuzione di carica sinusoidale in  $\theta$  e cosinusoidale in  $\phi$*

### 5.1 Verifica dell'algoritmo

#### 5.1.1 Soluzione del problema con distribuzione di carica sferica

Il primo test dell'algoritmo è stato la risoluzione del problema utilizzando come distribuzione di carica una densità di carica sferica, uniforme ed unitaria e con la condizione al contorno nulla. La soluzione analitica di questo problema è nota ed è di semplice determinazione. Supponendo una sfera carica di raggio  $r'$  per conoscere il potenziale all'esterno di questa sfera carica basta utilizzare il teorema di Gauss in una sfera contenente la sfera carica ottenendo:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{4\pi r'^2}{r^2} \mathbf{r} \quad (5.1)$$

## 5.1 Verifica dell'algoritmo

---

da cui per integrazione si ottiene il potenziale a meno di una costante:

$$\Phi(r) = \left( \frac{4\pi r'^2}{r} + C \right) \mathbf{r} \quad (5.2)$$

La costante  $C$  è fissata imponendo le condizioni al contorno cioè che il potenziale deve annullarsi sulla sfera di raggio  $R$ :

$$\Phi(R) = 0 \rightarrow \frac{4\pi r'^2}{R} + C = 0 \rightarrow C = -\frac{4\pi r'^2}{R} \quad (5.3)$$

Quindi la soluzione analitica per  $r > r'$  è:

$$\Phi(r) = 4\pi r'^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \mathbf{r} \quad (5.4)$$

Il potenziale all'interno della sfera carica è costante, in quanto applicando il teorema di Gauss all'interno della sfera carica si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\int_V \rho(\mathbf{x}) dV}{r^2} \mathbf{r} = 0 \quad (5.5)$$

In quanto la  $\rho$  è nulla all'interno della sfera di raggio  $r'$ . Da cui si deduce che il potenziale è costante e, per continuità, deve essere uguale al valore del potenziale esterno calcolato in  $r'$ . In definitiva la soluzione analitica è:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 4\pi r'^2 \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{R} \right) \mathbf{r} & \text{per } r \leq r' \\ 4\pi r'^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \mathbf{r} & \text{per } r > r' \end{cases} \quad (5.6)$$

Questa soluzione analitica verrà confrontata con la soluzione dell'algoritmo che in questo caso è esatta. Il primo passo per la risoluzione fuzzy del problema è il fuzzyficare la distribuzione di carica e le condizioni al contorno. Per quanto riguarda il potenziale sul bordo dato che è nullo la corrispondente matrice sarà la matrice nulla. Invece per la distribuzione di carica conviene scriverla come:

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta(r - r') \quad (5.7)$$

Per poter fuzzyficare questa funzione bisogna scegliere una cipolla fuzzy tale che uno dei raggi a cui corrisponde una sfera fuzzy sia proprio  $r'$ , o in altre parole deve esistere un  $j$  tale che  $r_j = r'$ . In questo caso è stata scelta una cipolla fuzzy

composta da 8 sfere equidistanziate con l'ordine di ogni sfera fuzzy è uguale ad 4. Con questa scelta ogni funzione all'interno della sfera è mappata in una collezione di otto matrici  $4 \times 4$ :

$$f(r, \Omega) \rightarrow \hat{F} = \bigoplus_{j=0}^8 \hat{F}^{(j)} \quad (5.8)$$

Dove i raggi sono dati dalla:

$$r_i = \frac{i}{8} \text{ per } i = 1, 2 \dots 8 \quad (5.9)$$

Si è scelto di porre  $r' = r_3$ . La distribuzione di carica è presente solo una sfera di raggio  $r'$ , ponendo  $r' = r_3$ , l'unica matrice diversa dalla matrice nulla è  $\hat{F}^{(3)}$ . Tale matrice è costruita a partire dai coefficienti:

$$\rho_{JM}(r_i) = \int_S \rho(r_i, \theta, \phi) Y_{JM}^*(\theta, \phi) d\Omega = \int_S Y_{JM}^*(\theta, \phi) d\Omega = \sqrt{4\pi} \delta_{J0} \delta_{M0} \quad (5.10)$$

Quindi la  $\rho(\mathbf{x})$  è fuzzyficata sulla terza sfera nella matrice :

$$\hat{\rho} = \sqrt{4\pi} \hat{Y}_{00}^{(4)} \quad (5.11)$$

Il fatto che la distribuzione di carica possa essere scritta in termini di un numero finito di armoniche sferiche è il motivo per cui la risoluzione tramite sfera fuzzy restituisce un risultato esatto. Una volta fuzzyficata la distribuzione di carica ed il potenziale sul bordo l'algoritmo utilizzando (4.81) si ricava la soluzione del problema.

Il potenziale sulla prima sfera ( $r = 1/5$ ) calcolato dall'algoritmo è mostrato nella figura 5.1, tale potenziale, come è da aspettarsi, non ha dipendenza angolare. Per confrontare i risultati dell'algoritmo con la (4.81), dato che non c'è dipendenza angolare si utilizza un grafico bidimensionale dove sono confrontati i valori del potenziale al variare del raggio. La figura 5.2 mostra questo confronto; la linea continua rappresenta la soluzione analitica e i cerchi neri sono i valori del potenziale calcolati dall'algoritmo. Da questo confronto risulta evidente che la soluzione fornita dall'algoritmo coincide con la soluzione analitica.

### 5.1.2 Soluzione del problema con distribuzione di carica sinusoidale

Il secondo test dell'algoritmo è stato eseguito utilizzando una distribuzione di carica non simmetrica e con un potenziale al contorno nullo. In particolare è

## 5.1 Verifica dell'algoritmo

---

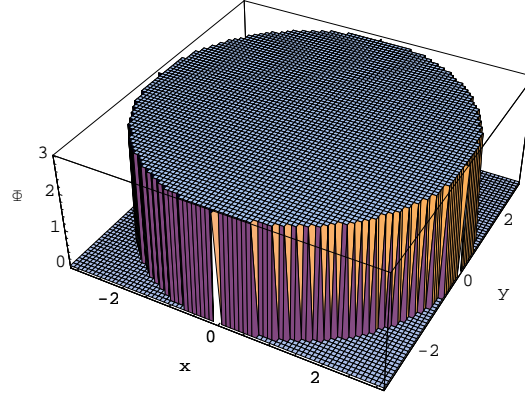


Figura 5.1: potenziale sulla prima sfera.

stata utilizzata una distribuzione di carica, solo sulla terza sfera, del tipo:

$$\rho(\mathbf{x}) = \cos \phi \sin \theta \delta(r - r'') \quad (5.12)$$

che graficata appare come:

La soluzione analitica è determinata tramite la soluzione generale:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' \quad (5.13)$$

Dove il termine di bordo è assente. Con:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{2l+1} \left( \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - (r_{>} r_{<})^l \right) \quad (5.14)$$

Per utilizzare le precedenti relazioni conviene esprimere la  $\rho$  in termini di armoniche sferiche:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) \delta(r - r'') \quad (5.15)$$

Unendo le tre precedenti relazioni si ottiene:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) \delta(r' - r'') 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{2l+1} \left( \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - (r_{>} r_{<})^l \right) d^3 x' \quad (5.16)$$

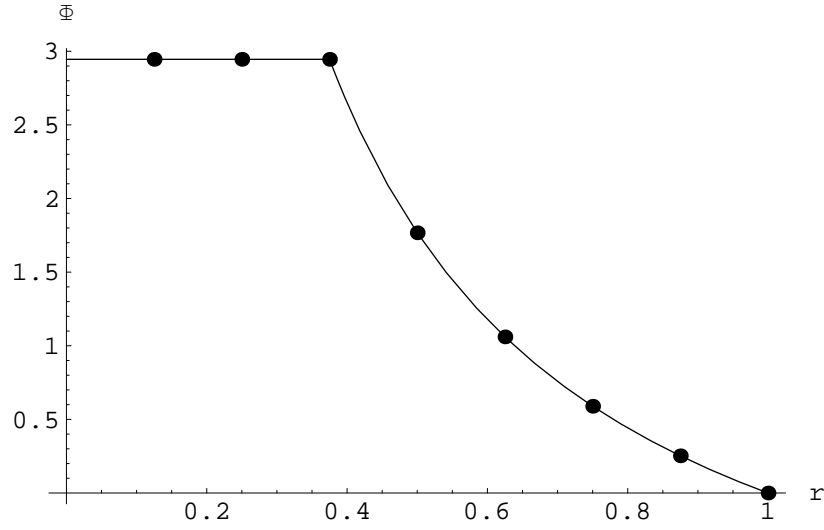


Figura 5.2: potenziale in funzione del raggio.

Per studiare la soluzione conviene separare i due casi  $r \leq r''$  e  $r > r''$ . Nel primo caso  $r' = r_>$  e  $r = r_<$  e quindi la precedente relazione diventa:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) \delta(r' - r'') 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{2l+1} \left( \frac{r^l}{r'^{(l+1)}} - (r'r)^l \right) d^3x' \quad (5.17)$$

Che utilizzando le proprietà della delta diventa:

$$\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{\Omega} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega' \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{2l+1} (r'')^{2l} r^l \left( \frac{1}{r''^{l+1}} - (r'')^l \right) \quad (5.18)$$

L'integrale è di facile risoluzione grazie all'ortonormalità delle armoniche sferiche si ottiene:

$$\int_{\Omega} (Y_{1-1} - Y_{11}) Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega' = (\delta_{l1} \delta_{m1} - \delta_{l1} \delta_{m-1}) \quad (5.19)$$

Quindi la (5.18) diventa:

$$\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{(Y_{1-1} - Y_{11})}{3} (r'')^{2l} r \left( \frac{1}{(r'')^2} - r'' \right) = \frac{4\pi}{3} \cos \phi \sin \theta (r'')^2 r \left( \frac{1}{(r'')^2} - r'' \right) \quad (5.20)$$



## 5.1 Verifica dell'algoritmo

---

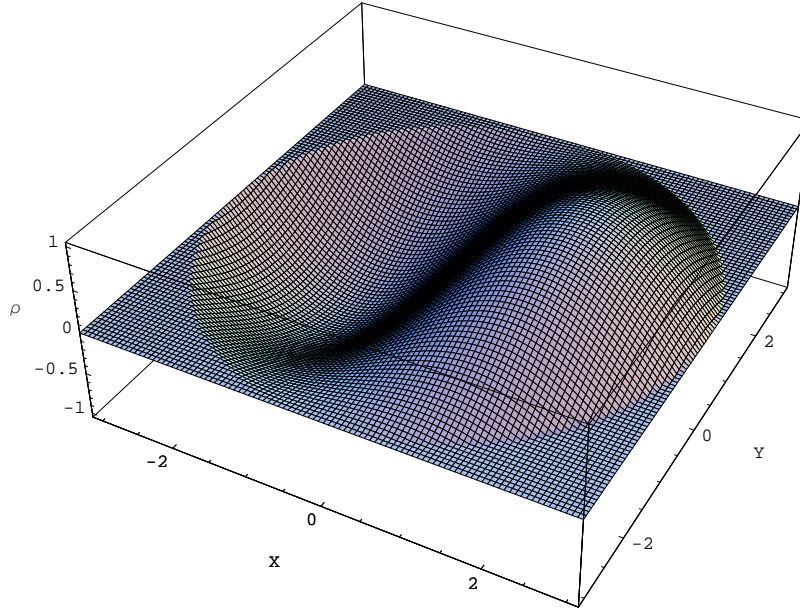


Figura 5.3: distribuzione di carica.

Analogamente per  $r > r''$  il caso si ha:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{3} \cos \phi \sin \theta (r'')^3 \left( \frac{1}{r^2} - r \right) \quad (5.21)$$

In definitiva la soluzione analitica è :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \cos \phi \sin \theta (r'')^2 r \left( \frac{1}{(r'')^2} - r'' \right) & \text{per } r \leq r'' \\ \frac{4\pi}{3} \cos \phi \sin \theta (r'')^3 \left( \frac{1}{r^2} - r \right) & \text{per } r > r'' \end{cases} \quad (5.22)$$

Come nel caso precedente, per la risoluzione tramite la sfera fuzzy, si è utilizzata una cipolla fuzzy con otto sfere fuzzy di ordine 4. Sono stati utilizzati i raggi dati dalla (5.9) e ed è stato ponendo  $r'' = r_3$ . la distribuzione di carica viene fuzzyficata esattamente come nel caso precedente. Dato che la distribuzione di carica è localizzata solo sulla terza sfera l'unica matrice diversa dalla matrice

nulla nella (5.8) è  $\hat{F}^{(3)}$ . Tale matrice è costruita a partire dai coefficienti:

$$\begin{aligned}\rho_{JM}(r_i) &= \int_{\Omega} \rho(r_i, \theta, \phi) Y_{JM}^*(\theta, \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1} - Y_{11}) Y_{JM}^*(\theta, \phi) d\Omega \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (\delta_{l1} \delta_{m1} - \delta_{l1} \delta_{m-1})\end{aligned}\quad (5.23)$$

Quindi la  $\rho(\mathbf{x})$  è fuzzyficata sulla terza sfera nella matrice :

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (\hat{Y}_{1-1}^{(4)} - \hat{Y}_{11}^{(4)})\quad (5.24)$$

Una volta determinate le matrici corrispondenti alle condizioni al contorno l'algoritmo procede alla determinazione della soluzione. Per il confronto tra soluzione analitica e calcolata dall'algoritmo si utilizzerà la proiezione (4.85) per confrontare la dipendenza angolare e per studiare la dipendenza radiale verranno fissati gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  e graficati i valori del potenziale in funzione del raggio.

Di seguito sono messi a confronto i grafici relativi alla soluzione analitica e la soluzione fuzzy sulla prima sfera ( $r = 1/5$ ):

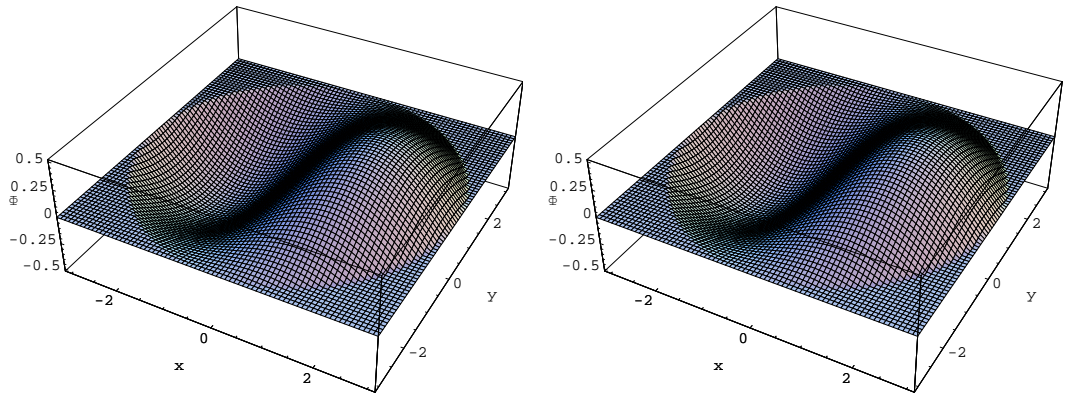


Figura 5.4: a destra la soluzione Fuzzy; a sinistra la soluzione analitica.

È evidente che i due grafici coincidono, per brevità si omettono i grafici per gli altri raggi in quanto il comportamento angolare resta identico per ogni raggio.

## 5.2 Verifica dell'approssimazione

Ora verranno fissati gli angoli  $\theta, \phi$  e verranno confrontati i valori ottenuti dalla soluzione analitica (5.22) con i valori calcolati dall'algoritmo. Come primo grafico si è fissato  $\theta = 3, \phi = 3$ , il successivo è ottenuto fissando  $\theta = 1/2, \phi = 1/2$ . Graficando in funzione del raggio le due soluzioni si ottiene:

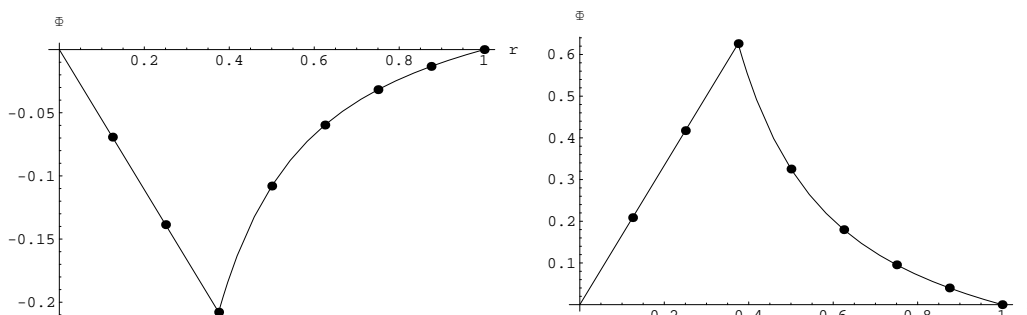


Figura 5.5: il grafico di destra è per  $\theta = 3, \phi = 3$ ; il grafico di sinistra è per  $\theta = 1/2, \phi = 1/2$ .

Dove in entrambe i grafici la linea continua indica la soluzione analitica e i cerchi neri i valori ricavati dall'algoritmo per ogni raggio (5.9)

## 5.2 Verifica dell'approssimazione

### 5.2.1 Carica puntiforme

In questo paragrafo verrà trattato il caso di una carica puntiforme. A differenza dai casi precedenti la risoluzione tramite la sfera fuzzy restituisce un risultato approssimato. Ciò è dovuto al fatto che la distribuzione di carica di tale problema involve un numero infinito di armoniche sferiche mentre gli elementi sfera fuzzy sono caratterizzati da un  $L$  massimo. In seguito verrà determinata la soluzione analitica del problema tramite il metodo delle cariche immagine, tale soluzione sarà confrontata con il risultato calcolato dall'algoritmo. Il problema consiste in una carica puntiforme e unitaria posta nel punto  $\mathbf{x}'$  interno alla sfera su cui viene assegnato il potenziale, per semplicità si utilizzerà un potenziale nullo. Si suppone

che la soluzione sia della seguente forma:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (5.25)$$

Dove dove  $q'$  è una carica fittizia posta nel punto  $\mathbf{y}$  esterno alla sfera di raggio 1. Tale punto alle stesse coordinate angolari del punto  $\mathbf{x}'$  e la parte radiale è fissata dalla richiesta che il potenziale si annulli sulla sfera di raggio 1. Chiamando  $\mathbf{n}$  il vettore unitario nella direzione di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{n}'$  il vettore unitario nella direzione di  $\mathbf{y}$  la precedente relazione diventa:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|x\mathbf{n} - x'\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{|x\mathbf{n} - y\mathbf{n}'|} \quad (5.26)$$

Calcolando il potenziale per  $x = 1$  si ha:

$$\Phi(x = 1) = \frac{1}{|\mathbf{n} - x'\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{y|\mathbf{n}' - \frac{1}{y}\mathbf{n}|} = 0 \quad (5.27)$$

Da cui si deduce che la scelta:

$$1 = -\frac{q'}{y}, \quad x' = \frac{1}{y} \quad (5.28)$$

rende  $\Phi(x = 1) = 0$  per ogni possibile valore di  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$ . Quindi sostituendo le (5.28) nella (5.26) si ottiene la soluzione analitica :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|x\mathbf{n} - x'\mathbf{n}'|} - \frac{1}{x'|x\mathbf{n} - \frac{1}{y}\mathbf{n}'|} \quad (5.29)$$

In particolare la carica puntiforme verrà posta polo al sud di una sfera di raggio  $1/8$ . Cioè in coordinate polari risulta:  $\phi = 0, \theta = 0$  e  $r = 1/8$ . Per la risoluzione tramite sfera fuzzy è necessario fuzzyficare la distribuzione di carica analogamente al caso precedente conviene utilizzare l'espansione in armoniche sferiche della delta:

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J Y_{JM}^*(\theta', \phi') Y_{JM}(\theta, \phi) \quad (5.30)$$

La  $\delta(r - r')$  fa in modo che la fuzzyficazione viene effettuata solo sulla sfera di raggio  $r'$  che per costruzione corrisponde alla prima sfera della cipolla fuzzy. La

## 5.2 Verifica dell'approssimazione

---

generica matrice appartenente alla prima sfera fuzzy può essere scritta tramite la solita espansione in armoniche fuzzy:

$$\hat{\rho}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \rho_{JM} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (5.31)$$

Il confronto tra la precedente relazione e la (5.30) troncata si ricavano i coefficienti dell'espansione in armoniche fuzzy della matrice corrispondente alla  $\rho$

$$\rho_{JM} = \frac{1}{r'^2} Y_{JM}^*(\theta', \phi') \quad (5.32)$$

In definitiva la distribuzione di carica è fuzzyficata in una collezione di matrici dove l'unica matrice non nulla corrisponde alla prima sfera ed ha la seguente forma:

$$\hat{\rho}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \frac{1}{r'^2} Y_{JM}^*(\theta', \phi') \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (5.33)$$

Per verificare l'approssimazione della soluzione fuzzy sono state utilizzate due diverse impostazioni dell'algoritmo. Nel primo caso si è utilizzata una cipolla fuzzy composta di 8 sfere poste ai raggi (5.9) di rango 5, per cui ogni funzione viene mappata in otto matrici  $5 \times 5$ . Utilizzando queste impostazioni l'algoritmo ha calcolato le soluzioni fuzzy che verranno messe a confronto con la soluzione analitica (5.22).

Di seguito viene messa a confronto la soluzione fuzzy e la soluzione analitica sulla sfera di raggio  $r_7$  dove le due soluzioni appaiono identiche. Inoltre data la

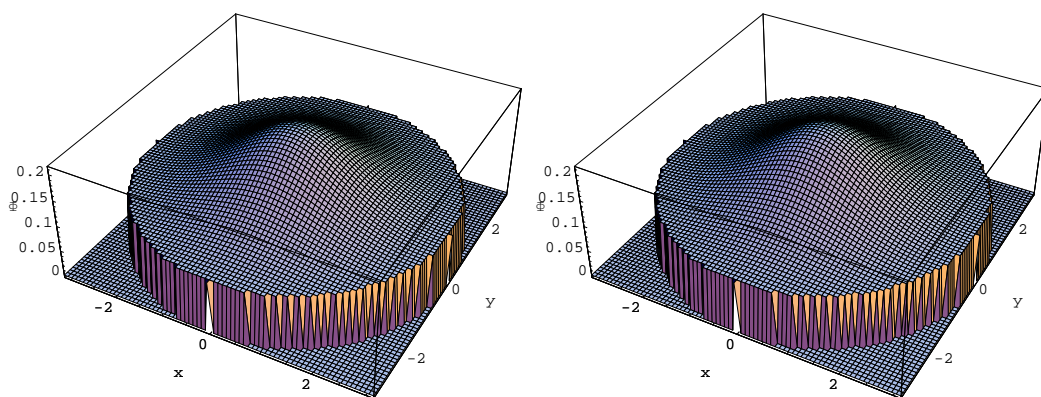


Figura 5.6: a sinistra la soluzione Fuzzy; a destra la soluzione analitica.

simmetria in  $\phi$  è utile confrontare gli andamenti del potenziale in funzione di  $\theta$  fissato il raggio.

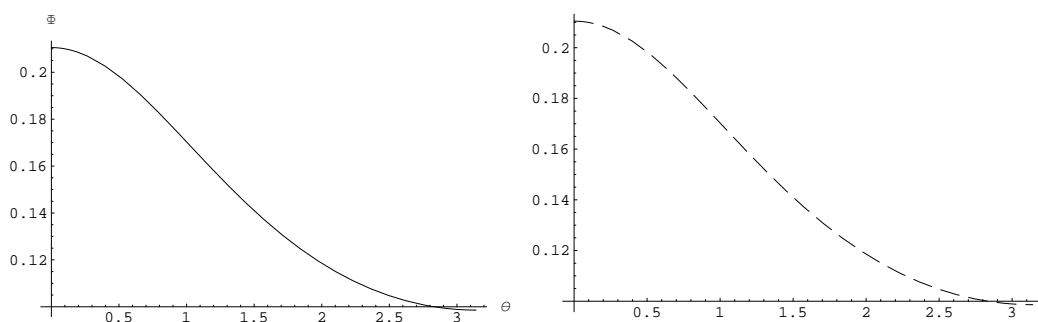


Figura 5.7: a sinistra la soluzione Fuzzy; a destra la soluzione analitica.

Nella figura 5.7 sono mostrati gli andamenti, per la settima sfera, della soluzione analitica e della soluzione fuzzy in funzione di  $\theta$ ; anche in questo caso non sono visibili differenze. Per valutare la differenza tra le due soluzioni bisogna ricorrere al confronto numerico il quale mostra un accordo entro tre cifre decimali. L'accordo tra soluzione fuzzy e soluzione analitica rimane sostanzialmente buono fino alla terza sfera in cui si iniziano a vedere differenze. Infatti considerando la terza sfera e utilizzando il grafico bidimensionale ( figura 5.7 a destra ) sono ravvisabili differenze tra le due funzioni nei pressi dei poli della sfera ma le due soluzioni

## 5.2 Verifica dell'approssimazione

---

sono praticamente coincidenti nei pressi dell'equatore. Questa differenza si accentua passando alla sfera successiva

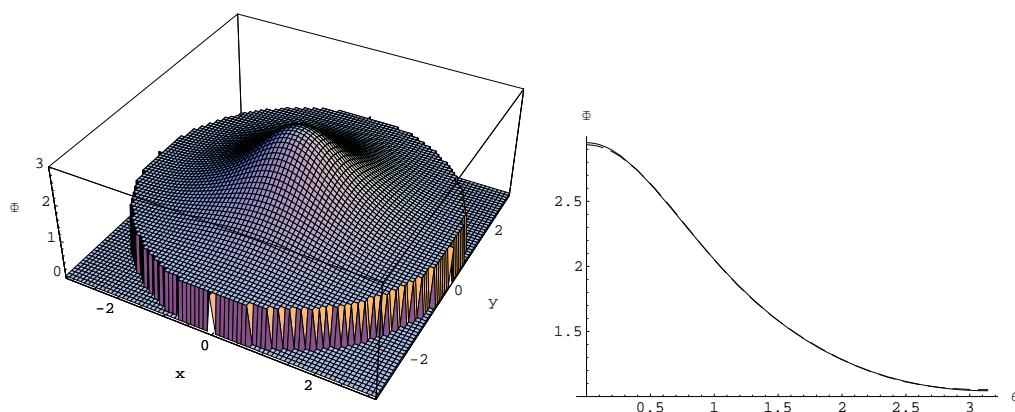


Figura 5.8: a destra la soluzione fuzzy; a sinistra confronto tra la soluzione analitica(linea continua) e la soluzione fuzzy(linea spezzata)

Il grafico 5.10 mostra le due soluzioni sulla seconda sfera, come sulla sfera precedente la soluzione fuzzy devia dalla soluzione analitica in prossimità dei poli.

In fine considerando i grafici delle soluzioni sulla prima sfera ( figura 5.11 e figura 5.12), sulla quale è posizionata la carica, si evince che le due soluzioni sono palesemente diverse. Tale comportamento è dovuto al fatto che la soluzione fuzzy deriva da un'approssimazione finita e quindi addolcirà la divergenza dovuta alla carica puntiforme tramite un andamento finito. È interessante notare però che lontano dalla carica la soluzione fuzzy si avvicina alla soluzione analitica oscillando attorno alla stessa.

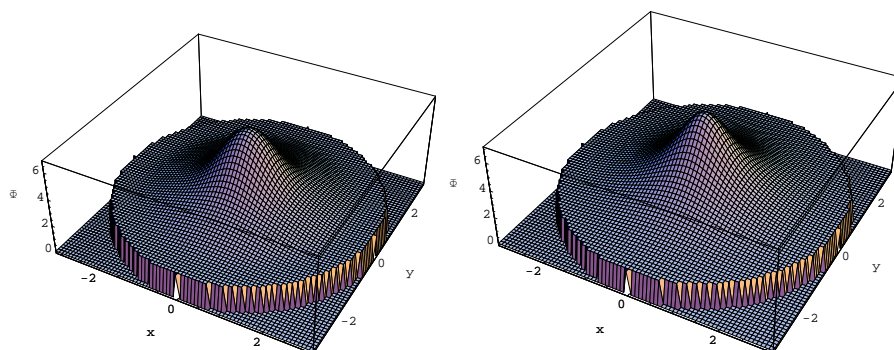


Figura 5.9: a destra la soluzione Fuzzy; a sinistra la soluzione analitica.

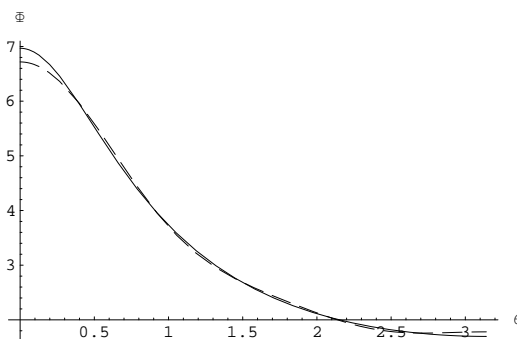


Figura 5.10: confronto al variare di  $\theta$ .

Oltre ai grafici fin qui discussi è interessante considerare l'andamento delle soluzioni in funzione del raggio per un angolo fissato, cioè per  $\theta = 0 \phi = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} \phi = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta = \pi \phi = \pi$ . La soluzione analitica è rappresentata della linea continua e i cerchi neri rappresentano i valori del potenziale calcolati per ogni raggio tramite la soluzione fuzzy. Questi grafici confermano che più ci si allontana dalla carica e più la soluzione fuzzy coincide con la soluzione analitica. Infatti il valore fuzzy più vicino alla carica non coincide affatto con la soluzione analitica, ma basta passare al successivo punto per ottenere un notevole miglioramento dell'approssimazione. Dalla quarta sfera in poi le due soluzioni sono, graficamente indistinguibili.

La precedente risoluzione del problema è stata condotta con delle sfere fuzzy



## 5.2 Verifica dell'approssimazione

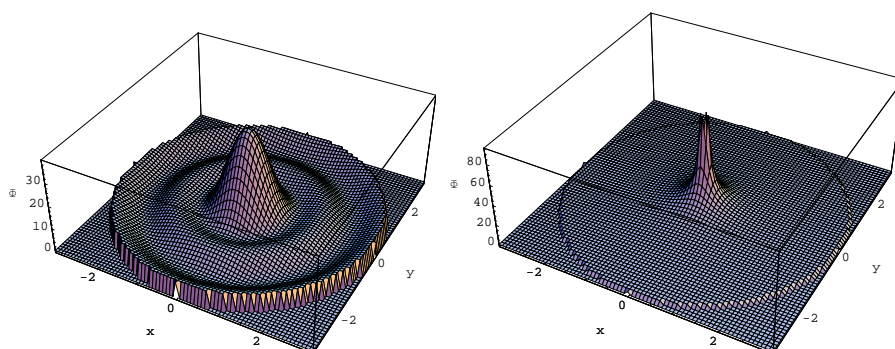


Figura 5.11: a destra la soluzione Fuzzy; a sinistra la soluzione analitica.

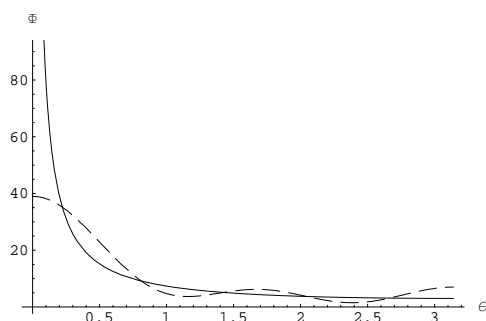


Figura 5.12: la linea spezzata è la soluzione fuzzy; la linea continua è la soluzione analitica.

di rango 5. Una tale approssimazione è stata utilizzata solo a scopo dimostrativo, in quanto è di molto inferiore alle effettive capacità di calcolo di un odierno calcolatore. Per studiare nel dettaglio il comportamento della soluzione fuzzy è stata utilizzata una cipolla fuzzy composta di 10 sfere fuzzy di rango 10 poste ai raggi:

$$r_1 = \frac{1}{10}, \quad r_{j+1} = \left( \frac{1}{10} + \frac{j}{100} \right) \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, 9 \quad (5.34)$$

Questa partizione è stata scelta per studiare l'approssimazione nelle vicinanze della distribuzione di carica. Anche in questo caso trovate le soluzioni fuzzy sono messe a confronto con la soluzione analitica (5.22). La figura 5.14 mostra il confronto tra le due soluzioni ad ogni raggio. In particolare in alto a sinistra

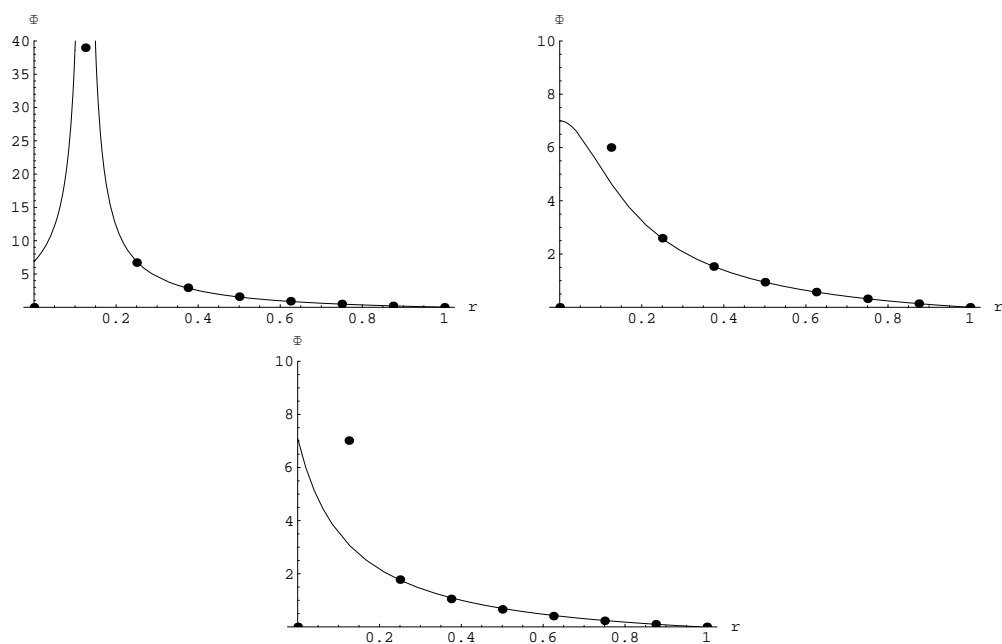


Figura 5.13: il confronto tra soluzione fuzzy e soluzione analitica al variare del raggio fissato un angolo solido.

sono comparate le soluzioni sulla decima sfera, i successivi grafici procedendo verso destra e verso il basso sono riferiti alle successive sfere. La distanza tra una sfera e la successiva è di 0.01. Da questi grafici si evince che la soluzione fuzzy e la soluzione analitica si sovrappongono per distanze dalla carica dell'ordine di 0.05.

## 5.2 Verifica dell'approssimazione

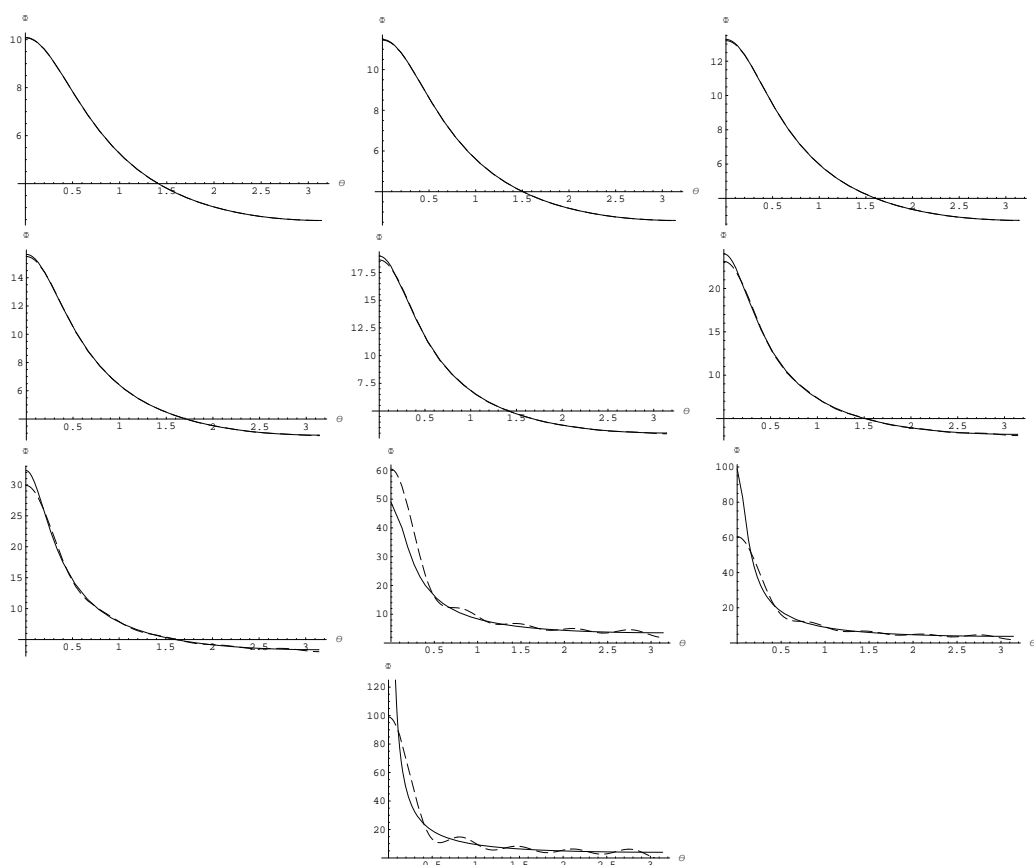


Figura 5.14: confronto delle soluzioni per le varie sfere

### 5.2.2 Calotta sferica

Come ulteriore applicazione della sfera fuzzy sarà trattato, in questa sezione, il caso di una calotta sferica di raggio  $r$  con una densità di carica uniforme e unitaria e con condizioni a contorno nulle sulla sfera unitaria. Tale calotta sarà costituita da una semisfera carica di raggio fissato. Di tale problema si conosce la soluzione analitica per il potenziale solo per serie ma prendendo in considerazione il potenziale solo lungo l'asse  $z$  è possibile colcolare un'espressione finita per il potenziale. Tale calcolo viene effettuato utilizzando il metodo delle cariche immagine per ogni carica infinitesima  $dc$  presente sulla calotta. Così facendo oltre alla calotta data verrà a crearsi una calotta fittizia di raggio  $r' = 1/r$  e densità

di carica  $\sigma' = -1/r'^3$ . Tale densità di carica deriva dal fatto che il metodo delle immagini impone che la carica fittizia sia  $r'dc$  da cui:

$$\sigma' = r' \frac{dc}{dV'} = r' \frac{dc}{dV} \frac{dV}{dV'} = r' \sigma \frac{dV}{dV'} \quad (5.35)$$

Dato che la  $\sigma$  della calotta fisica è unitaria si ha:

$$\sigma' = r' \frac{dV}{dV'} \quad (5.36)$$

Differenziando la relazione:

$$V = 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{r'^2} = \frac{(4\pi)^2}{V'^2} \quad (5.37)$$

si ottiene:

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{1}{r'^4} \quad (5.38)$$

E quindi

$$\sigma' = -\frac{1}{r'^3} \quad (5.39)$$

La soluzione sarà data dall'integrale:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{x}|} - \frac{r'^2}{r'^3 |\mathbf{v} - \mathbf{x}'|} \right) \sin \theta d\phi d\theta \quad (5.40)$$

Ponendo il punto d'osservazione  $\mathbf{x}$  sull'asse  $z$  la quantità  $|\mathbf{v} - \mathbf{x}|$  diventa in coordinate polari:  $\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}$ . Quindi la soluzione lungo l'asse può essere scritta come:

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} - \frac{1}{r' \sqrt{r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta}} \right) \sin \theta d\phi d\theta \quad (5.41)$$

Questi due integrali sono di facile risoluzione, in definitiva il potenziale lungo l'asse  $z$  risulta essere:

$$\Phi(z) = 2\pi \frac{\sqrt{2r'^2 - \sqrt{2r'(r' - z)} + r'^2 r \sqrt{(r - z)^2 - r'^2 r \sqrt{r^2 + z^2}}}{r'^2 z} \quad (5.42)$$

## 5.2 Verifica dell'approssimazione

---

Per il confronto tra soluzione analitica e soluzione fuzzy è stata scelta una semisfera inferiore posta ad  $r = 2/8$  e per la risoluzione fuzzy è stata usata una cipolla fuzzy composta da otto sfere fuzzy di ordine 21 con la foliazione (5.9). Come nei casi precedenti per calcolare la soluzione fuzzy bisogna determinare la fuzzyficazione della distribuzione di carica e quindi i coefficienti dello sviluppo sulla seconda sfera:

$$\hat{\sigma}^{(N)} = \sum_{J=0}^{2L} \sum_{M=-J}^J \sigma_{JM} \hat{Y}_{JM}^{(N)} \quad (5.43)$$

per far ciò conviene esprimere  $\sigma$  come:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{per } \pi \geq \theta > \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{per } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.44)$$

Quindi i coefficienti saranno dati dall'integrale:

$$\begin{aligned} \sigma_{JM} &= \int_{\Omega} \sigma(\theta) Y_{JM}^*(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_{JM}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi} \frac{(J-M)!}{(J+M)!}} P_J^M(\cos \theta) e^{iM\phi} \sin \theta d\phi d\theta \end{aligned} \quad (5.45)$$

L'integrale in  $d\phi$  restituisce  $2\pi\delta_{0M}$  infatti:

$$\int_0^{2\pi} e^{iM\phi} d\phi = \begin{cases} \frac{1}{iM} e^{iM\phi} \Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{per } M \neq 0 \\ 2\pi & \text{per } M = 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

quindi la (5.45) diventa:

$$\begin{aligned} \sigma_{JM} &= \sqrt{\pi(2J+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_J^0(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \sqrt{\pi(2J+1)} \int_1^0 P_J^0(x) dx \end{aligned} \quad (5.47)$$

L'integrale che compare nella precedente espressione può essere espresso in termini di funzioni gamma di Eulero:

$$\int_1^0 P_J^0(x) dx = \sqrt{\pi} \frac{\left( -\frac{1}{\gamma[-\frac{J}{2}]\gamma[\frac{3+J}{2}]} + \frac{1}{\gamma[1-\frac{J}{2}]\gamma[\frac{1+J}{2}]} \right)}{2J+1} \quad (5.48)$$

In definitiva i coefficienti per la fuzzyficazione della distribuzione di carica (5.44) sono dati da:

$$\sigma_{JM} = \pi \frac{\left( -\frac{1}{\gamma[-\frac{J}{2}]\gamma[\frac{3+J}{2}]} + \frac{1}{\gamma[1-\frac{J}{2}]\gamma[\frac{1+J}{2}]} \right)}{\sqrt{(2J+1)}} \quad (5.49)$$

Trovata la fuzzyficazione della distribuzione di carica l'algoritmo procede alla risoluzione approssimata del problema, la figura 5.15 mostra il confronto tra la soluzione analitica lungo l'asse  $z$  e la soluzione fuzzy lungo l'asse  $z$  calcolata dall'algoritmo. È

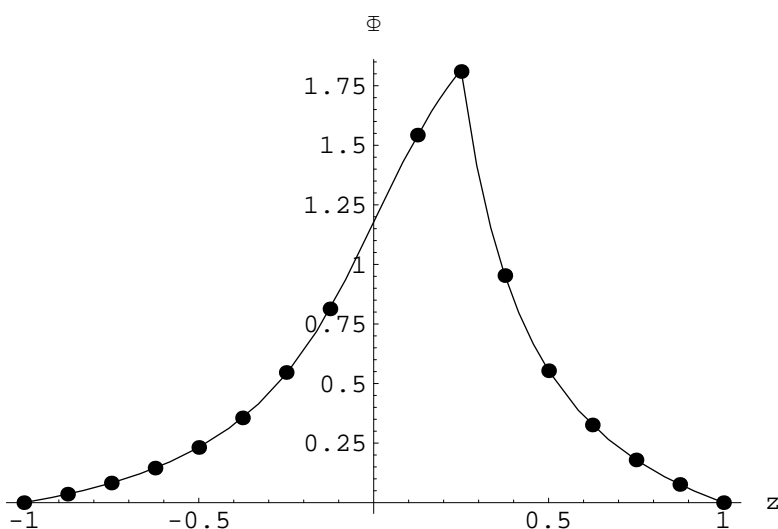


Figura 5.15: a destra la soluzione Fuzzy; a sinistra la soluzione analitica.

evidente che la soluzione analitica e la soluzione fuzzy coincidono, questo risultato conferma la validità dell'approssimazione fuzzy per risolvere questo problema.

# Conclusioni

In quest'ultimo capitolo è stato verificato l'effettivo utilizzo della sfera fuzzy come metodo per approssimare la soluzione di equazioni differenziali indipendenti dal tempo. L'algoritmo sviluppato per questo scopo ha è stato testato con successo in due casi (distribuzione di carica sferica e distribuzione di carica sinusoidale) in cui la soluzione fuzzy è esatta. In seguito per verificare la validità dell'approssimazione è stato utilizzato il caso di una carica puntiforme, per il quale si conosce la soluzione analitica. La risoluzione è stata effettuata tramite calcolatore utilizzando limitando il grado di approssimazione alle prestazioni dello stesso; per la risoluzione del problema con una carica puntiforme sono stati utilizzati due gradi d'approssimazione. Nel primo caso sono stati utilizzate 8 sfere di rango 5, dall'esame dei risultati dell'algoritmo e dal confronto con la soluzione esatta si può concludere che questo metodo può essere effettivamente valido a meno che non si studi la soluzione nelle prossimità di una singolarità. Un tale comportamento era comunque prevedibile in quanto la sfera fuzzy è una approssimazione finita e quindi non è in grado di fornire soluzioni divergenti. Il secondo grado d'approssimazione è stato utilizzato per lo studio della soluzione fuzzy vicino alla singolarità utilizzando 10 sfere fuzzy di ordine 10. Tale studio ha mostrato un buon accordo tra soluzione fuzzy e soluzione analitica per distanze dell'ordine del centesimo del raggio della sfera più esterna. Inoltre è stato condotto un secondo test utilizzando come distribuzione di carica una calotta sferica. Anche in questo caso il confronto tra risultati forniti dall'algoritmo e risultati esatti, ha mostrato un buon accordo tra le due soluzioni, a patto di non trattare la regione nei pressi del bordo della calotta carica. Visti i buoni risultati derivati dal confronto tra soluzioni esatte e soluzioni fuzzy si può affermare, con un certo grado di confidenza, che la sfera fuzzy può essere impiegata come mezzo di approssimazione della soluzione di equazioni differenziali indipendenti dal tempo.

# Appendice A

## Il codice sorgente

*In questa appendice è mostrato il codice sorgente utilizzato per costruire l'algoritmo descritto e poi utilizzato nel terzo e quarto capitolo rispettivamente. Questo codice è stato scritto per l'esecuzione tramite il programma Mathematica 5.1 ([12])*

```
(* PRIMA PARTE : COSTRUZIONE DELLE ARMONICHE SFERICHE FUZZY *)
Off[General::"spell1"];
Off[ClebschGordan::"phy"];
(* Dichiarazione del numero massimo di relazioni elaborabili *)
$RecursionLimit = Infinity
(* Caricamento del pacchetto per i numeri complessi *)
<< Algebra`ReIm`
(* Ordine della rappresentazione *)
N1 = 21
(* Numero di sfere *)
N2 = 8;
(* Ordine della rappresentazione da visualizzare*)
(* l dell' armonica sferica da visualizzare *)
l = 0
(* M dell' armonica sferica da visualizzare *)
M = 0
(* Dichiarazione di realtà della variable  $\theta$  *)
 $\theta$  /: Im[ $\theta$ ] = 0;
(* Dichiarazione di realtà della variable  $\phi$  *)
 $\phi$  /: Im[ $\phi$ ] = 0 ;
(* l della rappresentazione da visualizzare *)
l = (N1 - 1) / 2
```



---

```

(* Costruzione degli stati coerenti *)
v =
Sum[
  Table[ If[i = j, Sqrt[((N1 - 1)!) / ((-i + N1)!(i - 1)!)] ((Cos[θ/2])^(-i + N1))
        ((Sin[θ/2])^(i - 1)) Exp[I φ (-i + 1 + (N1 - 1) / 2)], 0], {i, N1}, {j, N1}][[t]], {t, N1}];
(* Costruzione delle matrici di polarizzazione *)
ProtoFuzzyNLM =
Table[
  Table[Table[{{(-1)^(L1)} (Sqrt[(2 L1 + 1) / (N1)])}
            ClebschGordan[{(N1 - 1) / 2, s}, {L1, M1}, {(N1 - 1) / 2, s1}], {s, -(N1 - 1) / 2, (N1 - 1) / 2},
            {s1, -(N1 - 1) / 2, (N1 - 1) / 2}], {M1, -L1, L1}], {L1, 0, N1 - 1}];
(* Calcolo dei coefficienti per la normalizzazione delle armoniche sferiche *)
α =
N[
  Table[
    Table[(SphericalHarmonicY[L, M, Pi / 3, 0] /
          (Sum[(2 l)! / Sqrt[(l + n)! (l - n)! (l + n1)! (l - n1)!] ((Sqrt[3] / 2)^(2 l + n1 + n))
              ((1 / 2)^(2 l - n - n1)) Sqrt[(2 L + 1) / (2 l + 1)] ClebschGordan[{l, n}, {L, M}, {l, n1}],
              {n, -l, l}, {n1, -l, l}))), {M, -L, L}], {L, 0, N1 - 1}];
(* Costruzione delle armoniche fuzzy *)
FuzzyNLM = N[Table[Table[α[[L + 1, M]] ProtoFuzzyNLM[[L + 1, M]], {M, 2 L + 1}], {L, 0, N1 - 1}]];

(* Visualizzazione delle ŶLM richieste *)
MatrixForm[FuzzyNLM[[L + 1, L - M + 1]]]
(* Visualizzazione del simbolo corrispondente a ŶLM *)
Y1 = Simplify[TrigReduce[Conjugate[v]. FuzzyNLM[[L + 1, L - M + 1]]. v]]

(* Plotting del simbolo corrispondente a ŶLM *)
Plot3D[Abs[Y1], {θ, 0, Pi}, {φ, 0, 2 Pi}, PlotPoints → 100]

(* FINE PRIMA PARTE *)

(* SECONDA PARTE: RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI ELETTROSTATICA *)

(* assegnazione dei raggi per ogni sfera *)
R = Table[n1 / N2, {n, N2}]

(* FUZZIFICAZIONE delle condizioni a contorno e della distribuzione di carica *)

(* Potenziale sulla sfera più esterna *)
Pot = IdentityMatrix[N1];

(* Distribuzione di carica *)
Car =
Table[
  Chop[If[x = 1, Sum[Sqrt[2 L + 1] Integrate[LegendreP[L, 0, y], {y, 0, 1}] FuzzyNLM[[L + 1, L + 1]],
    {L, 0, 20}], Table[0, {i, N1}, {j, N1}]], {x, N2}]

```

```
(* FUZZYFICAZIONE DELLA FUNZIONE DI GREEN *)
green =
4 Pi
Table[
Table[
Sum[
(1 / (2 L + 1))
Sum[(1 / (alpha[[L + 1, L + 1 - M]]^2)) If[x1 >= x, R[[x]]^(L), ((1 / (R[[x]]^(L + 1))) - (R[[x]]^(L)))]
Table[Table[((-1)^M) FuzzyNLM[[L + 1, L + M + 1, a1, b1]]
Table[Table[If[x1 >= x, ((1 / (R[[x1]]^(L + 1))) - (R[[x1]]^(L)))] R[[x1]]^(L)]
FuzzyNLM[[L + 1, L - M + 1, a, b]], {b, N1}], {a, N1}], {b1, N1}], {a1, N1}], {M, -L, L}],
{L, 0, N1 - 1}], {x1, N2}], {x, N2}];

(* FUZZYFICAZIONE DELLA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI GREEN *)
DGreen =
4 Pi
Table[
Table[
Sum[
(1 / (2 L + 1))
Sum[
Table[
Table[If[x1 >= x, (If[L == 0, 1, R[[x]]^L), ((L + 1) (1 / (R[[x]]^(L + 2))) - L (R[[x]]^(L - 1)))]
FuzzyNLM[[L + 1, M, a1, b1]]
Table[Table[If[x1 >= x, If[L == 0, R[[x1]]^(-2), ((L + 1) (1 / (R[[x1]]^(L + 2))) -
L (R[[x1]]^(L - 1)))] R[[x1]]^(L)] FuzzyNLM[[L + 1, M, a, b]], {b, N1}], {a, N1}],
{b1, N1}], {a1, N1}], {M, -L, L}], {L, 0, N1 - 1}], {x1, N2}], {x, N2}];

(* Risoluzione del problema per la cariche interne *)
phi1 =
Table[
Simplify[Table[Sum[(4 Pi) / N1] Sum[Car[[p, i, j]] green[[t, p, a, b, i, j]], {i, N1}, {j, N1}], {p, N2}],
{b, N1}, {a, N1}], {t, N2}];

(* Risoluzione del problema per il potenziale a contorno *)
phi = Table[Table[Sum[(1 / N1) DGreen[[x, N1 - 1, A, B, a, b]] Pot[[a, b]], {a, N1}, {b, N1}], {A, N1}, {B, N1}]
{x, N1}]
```

---

(\* PASSAGGIO ALLE FUNZIONI SU OGNI SFERA (ad ogni raggio) DELLE SOLUZIONI \*)

```
g1 = Chop[N[Conjugate[v]. (phi1[[4]] + phi[[4]]) . v]
```

(\* VISUALIZZAZIONE DELLE SOLUZIONI TRAMITE PROEZIONE \*)

(\* Plot di g1 \*)

```
Plot3D[
```

```
  If[ $\sqrt{x^2 + y^2} > \pi$ , 0,
```

```
  Chop[g1 /.  $\phi \rightarrow$  If[Y > 0, ArcCos[X / Sqrt[X2 + Y2]], ArcCos[-X / Sqrt[X2 + Y2] + Pi] /.  $\theta \rightarrow$  Sqrt[X2 + Y2]],
```

```
  {X, -Pi, Pi}, {Y, -Pi, Pi}, PlotPoints  $\rightarrow$  75, PlotRange  $\rightarrow$  All]
```

```
ContourPlot[
```

```
  If[ $\sqrt{x^2 + y^2} > \pi$ , 0,
```

```
  Chop[g1 /.  $\phi \rightarrow$  If[Y > 0, ArcCos[X / Sqrt[X2 + Y2]], ArcCos[-X / Sqrt[X2 + Y2] + Pi] /.  $\theta \rightarrow$  Sqrt[X2 + Y2]],
```

```
  {X, -Pi, Pi}, {Y, -Pi, Pi}, PlotPoints  $\rightarrow$  75, PlotRange  $\rightarrow$  All]
```

# Bibliografia

- [1] J. Madore *The Fuzzy Sphere*, *Class. Quant. Grav.* 9 (1992) 142.
- [2] H. Weyl, *The theory of groups and Quantum Mechanics*, Dover (1931).
- [3] D.A. Varsalovich, A.N. Moskalev and V.K. Kernsky, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific (1988).
- [4] A. Zampini, *Applications of the Weyl-Wigner formalism to noncommutative geometry*, hep-th/0505271.(2005)
- [5] J. C. T. Pool, *Mathematical Aspects of the Weyl Correspondence*, *J. Math. Phys.* 7 (1), 66-76 (1996).
- [6] C.S. Chu, J. Madore and H. Steinacker, *Scaling Limit of the Fuzzy Sphere at one*, hep-th/0106205 (2001).
- [7] John David Jackson, *Classical Electrodynamics(3rd edition)* , John Wiley & Sons Inc (1999).
- [8] J.M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, H. Figueroa, *Elements of noncommutative geometry*, Birkhauser, (2000).
- [9] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag (1986).
- [10] J. J. Sakurai *Meccanica quantistica moderna*, Seconda edizione, Zanichelli, (2003).
- [11] K. Gottfried, *Quantum mechanics Vol. I: Fundamentals* Benjamin, New York (1966).

## BIBLIOGRAFIA

---

- [12] Stephen Wolfram, *Mathematica(Second Edition)*, Addison-Wesley Publishing Company(1992).
- [13] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Cambridge University Press (1995).
- [14] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, Inc. (1994).