

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
FEDERICO II

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

TESI DI LAUREA IN FISICA

**Funzioni di Wigner per Stati Coerenti
Puri e Misti**

Relatore
Prof. Fedele Lizzi

Candidata
Elsa Passaro
matr. 567/304

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

Sommario

Lo scopo di questo lavoro di tesi è analizzare le differenze tra gli stati puri e gli stati misti nel formalismo classico e in quello quantistico. Per rendere più immediato questo confronto utilizzeremo una visione semiclassica data dal formalismo introdotto da Weyl e Wigner. Infatti, questo formalismo permette di descrivere gli stati quantistici di un sistema mediante funzioni sullo spazio delle fasi, come avviene in meccanica classica, e in questo modo di confrontare distribuzioni di probabilità classiche e quantistiche.

Indice

0	Introduzione	5
1	Stati puri e misti nel formalismo classico e quantistico	7
1.1	Operatore densità	9
2	Mappa di Weyl-Wigner	13
3	Stati coerenti	17
4	Funzioni di Wigner di stati coerenti	21
4.1	Conclusioni	28
A	Programma	29
	Bibliografia	31

Capitolo 0

Introduzione

La meccanica classica e la meccanica quantistica sono due teorie fisiche molto diverse: la prima viene utilizzata per descrivere l'evoluzione dinamica dei sistemi macroscopici, la seconda nasce invece per rappresentare sistemi fisici di dimensioni atomiche e subatomiche, che non possono essere descritti correttamente dalla fisica classica.

In questa tesi analizziamo le differenze e le analogie che sussistono tra la descrizione quantistica dei sistemi fisici e la rappresentazione utilizzata dalla fisica classica. In particolare ci concentreremo sugli stati coerenti, che sono gli stati quantistici che più si avvicinano al concetto di particella classica. Usando la rappresentazione di Wigner, a questi stati faremo corrispondere una funzione sullo spazio delle fasi che si può interpretare come una probabilità classica, e studieremo in dettaglio le differenze fra il caso di uno stato puro e il caso di una miscela. Il vantaggio delle funzioni classiche è che esse possono essere visualizzate e interpretate. Mostriamo infatti la sovrapposizione (pura o mista) di due stati coerenti per diversi valori della differenza delle loro energie. Troveremo che nel caso di stati con energie abbastanza diverse la differenza fra lo stato puro e la miscela risiede in un termine di interferenza che oscilla rapidamente su aree di ordine \hbar . Pertanto, se si effettuano misure macroscopiche, questo termine di interferenza ha media nulla, e quindi non può essere rivelato.

Lo schema della tesi è il seguente. Nel primo capitolo introdurremo i concetti di stato puro e misto (o miscela). Nel secondo discuteremo la relazione tra stati quantistici e funzioni sullo spazio delle fasi data dalla funzione di Wigner. Nel terzo capitolo si definiscono gli stati coerenti e le loro proprietà. Nel quarto capitolo si analizzano le funzioni di Wigner della sovrapposizione di due stati coerenti per varie energie, sia nel caso puro che in quello misto. I dettagli del programma usato per generare gli stati coerenti e le loro funzioni di Wigner sono nell'appendice.

Capitolo 1

Stati puri e misti nel formalismo classico e quantistico

In meccanica classica, nel formalismo Hamiltoniano, gli stati di un sistema fisico sono rappresentati dai punti di una varietà differenziabile, lo spazio delle posizioni \vec{x} e dei momenti \vec{p} che prende il nome di *spazio delle fasi*. I punti di questo spazio rappresentano tutti i possibili stati dinamici del sistema in considerazione [1].

In questo formalismo, lo stato di un sistema fisico, quando questo è noto con precisione assoluta, viene definito da un punto dello spazio delle fasi. Più in generale, esso sarà definito da una densità di probabilità sullo stesso spazio, che è più adatta a descrivere il caso in cui lo stato del sistema sia conosciuto in maniera statistica.

L'evoluzione temporale di un sistema dinamico è descritta da una curva $(\vec{x}(t), \vec{p}(t))$ nello spazio delle fasi. Una grandezza osservabile è una funzione di \vec{x} e di \vec{p} , e per sapere come evolve nel tempo è sufficiente conoscere l'evoluzione di ogni punto dello spazio delle fasi.

La meccanica classica si basa sul presupposto che, noti i valori iniziali di posizione e impulso di un punto materiale, sia possibile conoscere con esattezza i valori di queste due grandezze ad ogni istante successivo.

Nel tentativo di applicare le leggi della meccanica classica ad atomi e particelle si ottengono però risultati che non corrispondono alla realtà. Su scala microscopica, infatti, compaiono discontinuità connesse con l'esistenza di un indivisibile quanto d'azione \hbar . Allora, per descrivere questi fenomeni bisogna ricorrere alla meccanica quantistica.

In meccanica quantistica [2] ad ogni sistema fisico è associato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Uno stato del sistema è rappresentato da un vettore in questo spazio, definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, e si postula

che questo vettore di stato contenga tutte le informazioni sullo stato dinamico del sistema in esame.

Dal punto di vista matematico, il vettore che descrive lo stato di una particella, è rappresentato nello spazio delle coordinate da una funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}, t) \in \mathcal{L}^2 \quad (1.1)$$

che viene interpretata come ampiezza di probabilità di presenza della particella. Affinché tale interpretazione abbia senso, la funzione d'onda deve essere normalizzata a 1: $\int |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^n x = 1$

Analogamente, il vettore di stato può essere rappresentato nello spazio dei momenti dalla funzione d'onda $\phi(\vec{p}, t)$, che si ottiene dalla (1.1) per trasformata di Fourier.

Ad ogni grandezza osservabile A è associato un operatore lineare e autoaggiunto \hat{A} in \mathcal{H} , e l'insieme dei valori possibili per la misura di una grandezza è dato dallo spettro dell'operatore corrispondente.

In contrasto con quanto accade in meccanica classica, le variabili dinamiche del sistema non possono in generale essere definite ad ogni istante con precisione arbitraria, ma si può soltanto prevedere la probabilità di ottenere determinati valori in seguito ad una loro misura.

Nel formalismo quantistico, il processo di misura [3] assume un'importanza fondamentale: in seguito ad esso, la funzione d'onda che descrive lo stato del sistema collassa in un autostato della variabile dinamica che si è misurata. Pertanto una misura effettuata sul sistema va in generale a modificare lo stato dinamico del sistema. Questa modifica, che viene trascurata in fisica classica, non è più irrilevante su scala microscopica, e pone dei limiti alla precisione con cui le variabili dinamiche possono essere misurate simultaneamente. Il valore minimo di incertezza introdotta nelle misure da questo effetto è dato dal *principio di indeterminazione di Heisenberg*:

$$\Delta \hat{x}^i \cdot \Delta \hat{p}_j \geq \delta_j^i \frac{\hbar}{2} \quad (1.2)$$

che afferma quindi che non è possibile conoscere simultaneamente posizione e quantità di moto di un dato oggetto con precisione arbitraria. Il principio di indeterminazione non si applica a tutte le possibili coppie di osservabili, ma soltanto a quelle rappresentate da operatori che non commutano, e che pertanto vengono chiamate non compatibili. Infatti, la relazione (1.2) è una conseguenza immediata della noncommutatività di \hat{x} e \hat{p} :

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_j^i \quad (1.3)$$

1.1 Operatore densità

Nel formalismo quantistico, un insieme di sistemi fisici preparati in modo identico, ossia caratterizzati dallo stesso vettore di stato $|\varphi\rangle$, viene detto *insieme puro*. Un insieme puro è descritto quindi da un singolo ket in un opportuno spazio di Hilbert. Nel seguito considereremo esclusivamente vettori di stato normalizzati all'unità: $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$.

Non è possibile, invece, descrivere con un unico vettore di stato un insieme di sistemi fisici i cui elementi siano caratterizzati da vettori di stato diversi tra loro. È questo il caso in cui lo stato del sistema è conosciuto in maniera probabilistica; si pensi, ad esempio, ad un fascio di atomi preparato con due differenti apparati di Stern-Gerlach, di cui il 70% abbiano spin orientato nella direzione positiva dell'asse z , e il 30% nel verso opposto. Questo sistema non può essere descritto da un singolo ket di stato $|\phi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$, che rappresenta un sistema fisico che si trova in uno stato dato dalla sovrapposizione lineare coerente dei due diversi stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$, con probabilità date rispettivamente da $|c_+|^2$ e $|c_-|^2$. Quindi, oltre al carattere probabilistico intrinseco legato al processo di misura quantistica del sistema, abbiamo in questo caso anche un aspetto probabilistico estrinseco, a causa della nostra impossibilità di conoscere sufficientemente lo stato del sistema.

Per descrivere allora un insieme di questo tipo, che prende il nome di *insieme misto* o *miscela* [4], si introduce il formalismo dell'operatore densità.

Supponiamo di avere un insieme di N sistemi fisici, di cui $w_i N$ siano caratterizzati dal vettore di stato $|\varphi_i\rangle$, con $\sum_i w_i = 1$, e di voler calcolare il valore medio di un'osservabile A su questa miscela. Poiché abbiamo a che fare con un insieme misto, questo si otterrà calcolando i valori di aspettazione dell'operatore \hat{A} sugli stati $|\varphi_i\rangle$, che devono essere pesati per le probabilità w_i , e poi sommati sui vari valori di i , cioè su tutti gli stati della miscela:

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_i w_i \langle\varphi_i|\hat{A}|\varphi_i\rangle \quad (1.4)$$

Il valore di aspettazione può essere riscritto usando una base ortonormale generica $\{|\psi_k\rangle\}$ dello spazio di Hilbert:

$$\begin{aligned} \langle\hat{A}\rangle &= \sum_i w_i \sum_k \sum_j \langle\varphi_i|\psi_k\rangle \langle\psi_k|\hat{A}|\psi_j\rangle \langle\psi_j|\varphi_i\rangle = \\ &= \sum_k \sum_j \left(\sum_i w_i \langle\psi_j|\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|\psi_k\rangle \right) \langle\psi_k|\hat{A}|\psi_j\rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

Questo porta a definire l'*operatore densità* $\hat{\rho}$ come:

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |\varphi_i\rangle \langle\varphi_i| \quad (1.6)$$

Questo operatore è utilizzato in meccanica quantistica per descrivere lo stato statistico di un sistema, ed è l'analogo quantistico della distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi in meccanica classica. Il concetto probabilistico associato ai coefficienti w_i è molto vicino a quello che si incontra nella teoria classica della probabilità, e non deve essere confuso con quello associato a $|c_+|^2$ e a $|c_-|^2$, che è invece prettamente quantistico, e che è relativo alle predizioni sull'esito delle misure sul sistema.

L'operatore densità è definito positivo, Hermitiano e gode inoltre della proprietà:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_i \sum_j w_i \langle \psi_j | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \psi_j \rangle = \sum_i w_i \langle \varphi_i | \varphi_i \rangle = 1 \quad (1.7)$$

Gli elementi della corrispondente *matrice densità* sono dati da:

$$\langle \psi_j | \hat{\rho} | \psi_k \rangle = \sum_i w_i \langle \psi_j | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \psi_k \rangle \quad (1.8)$$

L'operatore densità contiene tutta l'informazione fisica che possiamo ottenere sul sistema. Dalla (1.5) si vede che il valore di aspettazione di un'osservabile A su un insieme descritto dall'operatore densità $\hat{\rho}$ può essere espresso in modo conciso in termini della traccia:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k \sum_j \langle \psi_j | \hat{\rho} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_j \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \quad (1.9)$$

che è indipendente dalla base utilizzata.

Se il sistema considerato è in uno stato puro (sia ad esempio descritto dal ket di stato $|\varphi\rangle$, di norma unitaria), allora tutte le probabilità w_i sono nulle tranne una, che è uguale a 1, e quindi l'operatore densità si scrive come:

$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle \langle \varphi| \quad (1.10)$$

ossia è dato dall'operatore di proiezione sullo stato. In questo caso si vede facilmente che $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, per cui

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \quad (1.11)$$

Per un sistema che si trova in uno stato misto quest'ultima uguaglianza non vale, si ha invece:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_i w_i^2 < 1 \quad (1.12)$$

Pertanto è possibile, dalla conoscenza di $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$, dedurre se il sistema considerato si trova in uno stato puro o in uno stato misto.

Esempio

Consideriamo un fascio di elettroni che si trova nello stato puro $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$, a cui è associato l'operatore densità

$$\hat{\rho}_{puro} = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)(\langle+| + \langle-|)$$

ed un altro fascio non polarizzato, che può essere considerato come una miscela incoerente di un insieme di spin su e un insieme di spin giù con pesi uguali, ossia con il 50% degli elettroni che sono descritti dallo stato $|+\rangle$ e l'altro 50% dallo stato $|-\rangle$; l'operatore densità corrispondente è

$$\hat{\rho}_{misto} = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|) \quad (1.13)$$

Utilizzando il formalismo con spinori a due componenti di Pauli, per sistemi di spin $\frac{1}{2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle+| &= (1 \ 0) & \langle-| &= (0 \ 1) \end{aligned}$$

Le due matrici densità associate ai due fasci sono rispettivamente

$$\rho_{puro} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_{misto} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È facile vedere che $\text{Tr}(\rho_{puro}^2) = 1$, mentre $\text{Tr}(\rho_{misto}^2) = \frac{1}{2} < 1$, come ci aspettavamo.

In corrispondenza a stati puri e misti, abbiamo visto che in meccanica classica lo stato di un sistema puro è descritto da un punto (\vec{x}_0, \vec{p}_0) nello spazio delle fasi. Lo stato di un sistema misto, invece, è rappresentato da una funzione densità di probabilità $\rho(\vec{x}, \vec{p})$, per esempio una gaussiana centrata sul valore più probabile (\vec{x}_0, \vec{p}_0) , con $\int \rho d^n x d^n p = 1$. È importante ricordare che, mentre in meccanica quantistica l'aspetto probabilistico è intrinseco al sistema fisico, nel caso classico è dovuto soltanto alla nostra conoscenza incompleta del sistema.

Capitolo 2

Mappa di Weyl-Wigner

In questa tesi considereremo per semplicità il caso unidimensionale di una particella su una retta; la generalizzazione al caso di un sistema n -dimensionale è possibile e non presenta inconvenienti, se non nella proliferazione degli indici e nell'appesantimento delle notazioni.

Sebbene la meccanica classica e quella quantistica siano due teorie diverse, valide in due regimi diversi della realtà fisica, esse devono in qualche modo sovrapporsi in quanto la meccanica classica deve emergere come un limite di quella quantistica. Per questo è necessario introdurre un *principio di corrispondenza*, secondo cui le predizioni della teoria quantistica devono coincidere con quelle della meccanica classica nel limite in cui la costante di Planck $\hbar \rightarrow 0$.

Abbiamo visto che nel formalismo quantistico ad ogni osservabile classica A si fa corrispondere un operatore \hat{A} su \mathcal{H} ; nell'effettuare questa associazione interviene il principio di corrispondenza, il quale richiede che la parentesi di Poisson sullo spazio delle fasi classico sia sostituita dal commutatore tra gli operatori diviso per $i\hbar$:

$$\{A, B\} \mapsto \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (2.1)$$

Questa richiesta assicura che l'equazione di evoluzione temporale degli operatori

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \quad \text{equazione di Heisenberg}$$

sia identica all'equazione del moto nel formalismo Hamiltoniano della meccanica classica

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{equazione di Hamilton}$$

Si vede che per le funzioni posizione e momento, nella rappresentazione delle

coordinate, la corrispondenza è data da:

$$\begin{aligned} q &\mapsto \hat{q} = q \\ p &\mapsto \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \end{aligned}$$

Il principio di corrispondenza presenta però delle ambiguità, in quanto ad una funzione classica può far corrispondere diversi operatori quantistici; ad esempio, alla funzione classica q^2p possono essere associati diversi operatori: $\hat{q}^2\hat{p}$, $\hat{q}\hat{p}\hat{q}$, $\hat{p}\hat{q}^2$ o delle loro combinazioni lineari. L'ambiguità relativa all'ordinamento degli operatori sorge dal fatto che in meccanica quantistica essi non commutano tra loro.

Per questo motivo la quantizzazione di un sistema classico non è un processo univocamente determinato, in quanto il principio di corrispondenza ammette diverse mappe di quantizzazione che mandano osservabili classici in operatori quantistici.

Considereremo la *mappa di quantizzazione di Weyl-Wigner* [5], che risolve l'ambiguità introdotta dal principio di corrispondenza: infatti, la mappa di Weyl associa in modo univoco a una funzione $f(q, p)$ sullo spazio delle fasi classico un operatore $\hat{\Omega}(f)$ sullo spazio di Hilbert:

$$\hat{\Omega}(f)(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau d\sigma dq dp f(q, p) e^{i\sigma(\hat{q}-q)+i\tau(\hat{p}-p)} \quad (2.2)$$

e si vede che, per operatori corrispondenti a funzioni che presentano ambiguità di ordinamento, come q^2p , l'ordinamento stabilito dalla mappa di Weyl è quello simmetrico:

$$\hat{\Omega}(q^2p) = \frac{1}{3}(\hat{q}^2\hat{p} + \hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{p}\hat{q}^2)$$

Questa mappa inoltre associa operatori Hermitiani alle funzioni reali.

Il risultato dell'operazione inversa, ovvero la funzione corrispondente allo operatore \hat{A} , prende il nome di *simbolo di Weyl* dell'operatore \hat{A} , e nella rappresentazione delle coordinate è data da:

$$W_{\hat{A}}(q, p) = \hbar \int du e^{-ipu} \left\langle q + \frac{\hbar u}{2} | \hat{A} | q - \frac{\hbar u}{2} \right\rangle \quad (2.3)$$

Il simbolo di Weyl dell'operatore densità $\hat{\rho}$, in seguito a normalizzazione, viene chiamato *funzione di Wigner* [6]; questa è una funzione che descrive lo stato quantistico del sistema in esame, e tutti i valori di aspettazione delle osservabili relative al sistema possono essere calcolati a partire da essa.

Quindi la funzione di Wigner associa all' operatore densità $\hat{\rho}$ di uno stato normalizzato una funzione $W_{\hat{\rho}}(q, p)$ sullo spazio delle fasi classico:

$$W_{\hat{\rho}}(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\rho} \left(q + \frac{\hbar u}{2}, q - \frac{\hbar u}{2} \right) e^{-ipu} du \quad (2.4)$$

dove

$$\hat{\rho} \left(q + \frac{\hbar u}{2}, q - \frac{\hbar u}{2} \right) = \left\langle q + \frac{\hbar u}{2} \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{\hbar u}{2} \right\rangle \quad (2.5)$$

L'integrale della funzione di Wigner $W_{\hat{\rho}}(q, p)$ sullo spazio degli impulsi è una funzione positiva che coincide con la distribuzione di probabilità del vettore di stato nella rappresentazione delle coordinate, e analogamente il suo integrale sullo spazio delle coordinate è una funzione positiva che coincide con la distribuzione di probabilità nello spazio dei momenti:

$$\int dq W_{\hat{\rho}}(q, p) = |\phi(p)|^2 \quad (2.6)$$

$$\int dp W_{\hat{\rho}}(q, p) = |\psi(q)|^2 \quad (2.7)$$

È chiaro allora che la funzione di Wigner è normalizzata all'unità ed è reale:

$$\int \int dq dp W_{\hat{\rho}}(q, p) = 1, \quad W_{\hat{\rho}}^*(q, p) = W_{\hat{\rho}}(q, p) \quad (2.8)$$

Si può vedere anche che, in corrispondenza alle relazioni (1.11) e (1.12), per la funzione di Wigner si ha:

$$\int \int dq dp W_{\hat{\rho}}^2(q, p) \leq 1 \quad (2.9)$$

dove il segno di uguaglianza vale soltanto per uno stato puro.

Con la mappa di Wigner possiamo quindi associare in modo univoco osservabili classici a osservabili quantistici, e agli operatori densità le funzioni di Wigner sullo spazio delle fasi, che vorremmo interpretare come densità di probabilità.

Bisogna però osservare che la funzione di Wigner non è in generale definita positiva, pertanto non può rappresentare una vera e propria distribuzione di probabilità. Si dice allora che è una distribuzione di quasi-probabilità. Infatti, si può vedere che le condizioni che assicurano che i valori di aspettazione calcolati attraverso la funzione di Wigner coincidano con i valori quantistici non sempre corrispondono alle regole standard della teoria della probabilità.

È possibile dimostrare [7] che la funzione di Wigner è limitata dalla condizione:

$$|W_{\hat{\rho}}(q, p)| \leq (\pi\hbar)^{-1} \quad \forall q, p \quad (2.10)$$

La limitazione (2.10) può essere interpretata come una manifestazione delle relazioni di indeterminazione.

Si vede inoltre che le aree delle regioni in cui la funzione assume valori negativi sono più piccole di \hbar , e quindi scompaiono nel limite classico, per $\hbar \rightarrow 0$.

Introducendo queste distribuzioni congiunte di quasi-probabilità per coordinate e momenti sullo spazio delle fasi, Wigner suggerì una rappresentazione della meccanica quantistica che viene vista come una deformazione della meccanica classica, e che si riduce ad essa nel limite $\hbar \rightarrow 0$. Questa formulazione della meccanica quantistica è indipendente da quella tradizionale, ma si dimostra essere equivalente ad essa.

Capitolo 3

Stati coerenti

Abbiamo visto che la funzione di Wigner può in generale assumere valori negativi. Fa eccezione la funzione di Wigner di uno stato coerente, che è definita positiva, poiché è rappresentata da una distribuzione gaussiana sullo spazio di coordinate e momenti. In generale, si ha che condizione necessaria e sufficiente perché la funzione di Wigner di uno stato puro sia positiva è che la funzione d'onda sia una gaussiana [7].

Dato un oscillatore armonico unidimensionale descritto dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (3.1)$$

possiamo introdurre per semplicità gli operatori autoaggiunti adimensionali

$$\hat{Q} = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{q}; \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{\hbar m\omega}} \quad (3.2)$$

Si definiscono gli operatori di creazione e di distruzione \hat{a}^\dagger e \hat{a} :

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} - i\hat{P}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{P}) \quad (3.3)$$

che verificano la relazione di commutazione

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.4)$$

e in termini dei quali la (3.1) si può riscrivere come

$$H = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Uno stato coerente $|z\rangle$ è un autostato dell'operatore di distruzione \hat{a} [2]:

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \quad z \in \mathcal{C} \quad (3.5)$$

Nella rappresentazione delle coordinate esso è dato da:

$$\psi_z(q) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qz - Re[z]^2} \quad (3.6)$$

o anche:

$$\psi_z(q) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i\sqrt{2}qIm[z]} e^{-\frac{(q - \sqrt{2}Re[z])^2}{2}} \quad (3.7)$$

Uno stato coerente è rappresentato quindi da una gaussiana centrata attorno a $\sqrt{2} Re[z]$ con fase data da $\sqrt{2} Im[z]$. Analogamente, si vede che nella rappresentazione dei momenti esso è descritto da una gaussiana centrata attorno a $\sqrt{2} Im[z]$ con fase $\sqrt{2} Re[z]$:

$$\phi_z(p) = \frac{e^{2iRe[z]Im[z]}}{\pi^{1/4}} e^{-i\sqrt{2}pRe[z]} e^{-\frac{(p - \sqrt{2}Im[z])^2}{2}} \quad (3.8)$$

in quanto abbiamo visto che la funzione d'onda $\phi_z(p)$ nella rappresentazione dei momenti è data dalla trasformata di Fourier della $\psi_z(q)$.

Per ogni $z \in \mathcal{C}$ abbiamo uno stato coerente $|z\rangle$ corrispondente, ed è possibile in questo caso istituire una corrispondenza $Re[z] \rightarrow q, Im[z] \rightarrow p$ tra i punti dello spettro di \hat{a} e i punti dello spazio delle fasi classico.

Gli stati coerenti sono così chiamati poiché si dimostra che sono sovrapposizioni lineari di autostati dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico con una definita relazione di fase tra loro.

Essi inoltre sono stati a minima indeterminazione, infatti, se calcoliamo il valore di aspettazione dell'operatore \hat{Q} su uno stato coerente $|z\rangle$ si vede che esso è dato da:

$$\langle \hat{Q} \rangle_z = \langle z | \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} | z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (z + z^*) = \sqrt{2} Re[z] \quad (3.9)$$

e il valore quadratico medio è:

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q}^2 \rangle_z &= \frac{1}{2} \langle z | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | z \rangle = \frac{1}{2} \langle z | \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} | z \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (z^2 + 2zz^* + z^{*2} + 1) = \frac{1}{2} [(z + z^*)^2 + 1] = 2Re[z]^2 + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

da cui si ottiene, per la deviazione quadratica media:

$$\Rightarrow (\Delta \hat{Q})_z^2 = \frac{1}{2} \quad \forall z \quad (3.11)$$

Analogamente per l'operatore momento \hat{P} si ha:

$$\langle \hat{P} \rangle_z = \frac{1}{i\sqrt{2}} \langle z | \hat{a} - \hat{a}^\dagger | z \rangle = \sqrt{2} Im[z] \quad (3.12)$$

$$\langle \hat{P}^2 \rangle_z = 2Im[z]^2 + \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow (\Delta \hat{P})_z^2 = \frac{1}{2} \quad \forall z \quad (3.14)$$

Quindi gli operatori \hat{Q} e \hat{P} hanno la stessa deviazione quadratica media, il che vuol dire che l'indeterminazione su \hat{Q} e su \hat{P} è la stessa in uno stato coerente.

Dalle (3.11) e (3.14) segue che gli stati coerenti saturano le relazioni d'indeterminazione di Heisenberg (1.2), ossia realizzano il minimo prodotto delle indeterminazioni di \hat{q} e di \hat{p} :

$$(\Delta \hat{q})_z \cdot (\Delta \hat{p})_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\hbar m\omega} = \frac{\hbar}{2}, \quad \forall z \quad (3.15)$$

Si può inoltre vedere che uno stato coerente evolve nel tempo rimanendo stato coerente, cioè autostato di \hat{a} , ma con autovalore che differisce dall'autovalore al tempo $t = 0$ per un fattore di fase $\exp(-i\omega t)$. Poiché la struttura di stato coerente non cambia nel tempo, le relazioni di indeterminazione rimangono invariate, per cui non si ha slargamento del pacchetto d'onde.

Gli stati coerenti sono stati quantistici quasi uguali a quelli classici, almeno per un oscillatore macroscopico. La posizione, il momento e l'energia di un oscillatore armonico sono descritti in meccanica quantistica da operatori che non commutano; non è possibile, quindi, costruire uno stato in cui essi assumono valori ben definiti. Ma uno stato coerente è un vettore di stato tale che, per ogni t , i valori medi $\langle q \rangle$, $\langle p \rangle$ e $\langle H \rangle$ sono i più vicini possibili ai corrispondenti valori classici; inoltre le deviazioni quadratiche medie Δq , Δp , e ΔH sono, nel limite macroscopico, completamente trascurabili.

Questa caratteristica di essere molto simili agli stati classici rende gli stati coerenti dei candidati ideali per lo studio delle relazioni fra meccanica quantistica e classica. Infatti nel prossimo capitolo studieremo le differenze delle funzioni di Wigner per la sovrapposizione di due stati coerenti nel caso puro e in quello misto.

Capitolo 4

Funzioni di Wigner di stati coerenti

Vogliamo ora confrontare le funzioni di Wigner associate allo stato misto di due stati coerenti e allo stato puro dato dalla sovrapposizione degli stessi stati.

Siano quindi $|z_1\rangle$ e $|z_2\rangle$ i due stati coerenti considerati, di norma unitaria. Prendiamo in esame lo stato misto descritto dall'operatore densità

$$\hat{\rho}_m = \frac{1}{2}(|z_1\rangle\langle z_1| + |z_2\rangle\langle z_2|) \quad (4.1)$$

Questo stato rappresenta la somma statistica (con pesi uguali) dei due stati coerenti corrispondenti a due particelle nei punti dello spazio delle fasi rappresentati dalle parti reali e immaginarie delle z_i .

Calcoliamo la funzione di Wigner associata a questo stato¹. La funzione di Wigner, scritta per comodità in variabili adimensionali, è

$$W_{\hat{\rho}}(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\rho} \left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2} \right) e^{-ipu} du \quad (4.2)$$

dove il valore di aspettazione $\hat{\rho} \left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2} \right)$ per lo stato miscela è dato da:

$$\left\langle q + \frac{u}{2} \left| \hat{\rho}_m \right| q - \frac{u}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_1 \right\rangle \langle z_1 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle + \left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_2 \right\rangle \langle z_2 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle \right) \quad (4.3)$$

Sostituendo nella (4.2), si ottiene la funzione di Wigner associata allo stato misto:

$$W_{misto}(q, p) = \frac{1}{4\pi} \int \left[\psi_{z_1} \left(q + \frac{u}{2} \right) \psi_{z_1}^* \left(q - \frac{u}{2} \right) + \psi_{z_2} \left(q + \frac{u}{2} \right) \psi_{z_2}^* \left(q - \frac{u}{2} \right) \right] e^{-ipu} du \quad (4.4)$$

¹Alcuni aspetti delle funzioni di Wigner degli stati coerenti sono trattati in [8].

Per la linearità della funzione di Wigner, si ha che essa è data dalla somma delle funzioni di Wigner corrispondenti ai due stati puri $|z_1\rangle$ e $|z_2\rangle$.

Assegnati gli autovalori $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, e graficando la (4.4) sullo spazio delle fasi (q, p) , si ottiene infatti la sovrapposizione delle due gaussiane corrispondenti ai due stati coerenti puri, come si può vedere in figura (4.1) Consideriamo ora lo stato puro dato dalla sovrapposizione quantistica dei

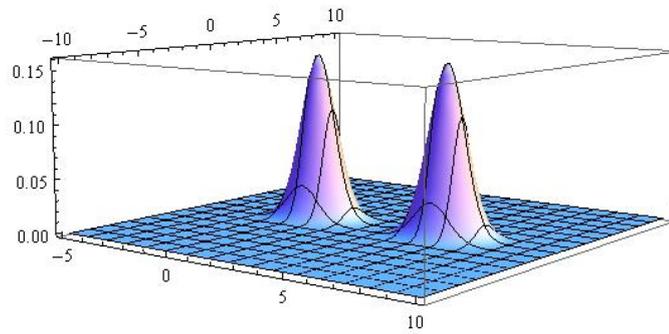


Figura 4.1: Funzione di Wigner di una miscela di due stati coerenti, per $z_1 = 0$ e $z_2 = 4$

due stati coerenti:

$$|z_1\rangle + |z_2\rangle;$$

la norma quadra di questo vettore è:

$$\begin{aligned} (|z_1\rangle + |z_2\rangle)(\langle z_1| + \langle z_2|) &= \langle z_1|z_1\rangle + \langle z_1|z_2\rangle + \langle z_2|z_1\rangle + \langle z_2|z_2\rangle = \\ &= 2 + \langle z_1|z_2\rangle + \langle z_1|z_2\rangle^* = 2 + 2\text{Re}\langle z_1|z_2\rangle \end{aligned}$$

Pertanto lo stato puro normalizzato è dato da:

$$\frac{|z_1\rangle + |z_2\rangle}{(2 + 2\text{Re}\langle z_1|z_2\rangle)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.5)$$

e l'operatore densità corrispondente è:

$$\hat{\rho}_p = \frac{(|z_1\rangle + |z_2\rangle)(\langle z_1| + \langle z_2|)}{2 + 2\text{Re}\langle z_1|z_2\rangle} \quad (4.6)$$

Questo stato è un vettore dello spazio di Hilbert, ma non è uno stato coerente, e non è neanche la sovrapposizione statistica di due stati coerenti, che come abbiamo visto è rappresentata dallo stato misto. Rappresenta comunque una particella che ha uguale probabilità di avere posizione e momento dati dalle parti reali e immaginarie di z_1 e z_2 . Risulta quindi interessante andare a investigare come la quasi-probabilità data dalla sua funzione di Wigner sia diversa da quella della miscela.

Calcoliamo quindi il valore di aspettazione $\hat{\rho}(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2})$, che è in questo caso (a meno del fattore di normalizzazione):

$$\begin{aligned} \left\langle q + \frac{u}{2} \left| \hat{\rho}_p \right| q - \frac{u}{2} \right\rangle &= \left(\left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_1 \right\rangle + \left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_2 \right\rangle \right) \left(\left\langle z_1 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle + \left\langle z_2 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle \right) \right) \\ &= \left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_1 \right\rangle \left\langle z_1 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle + \left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_2 \right\rangle \left\langle z_2 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_1 \right\rangle \left\langle z_2 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle + \left\langle q + \frac{u}{2} \left| z_2 \right\rangle \left\langle z_1 \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle \right) \right. \end{aligned} \quad (4.7)$$

I primi due termini sono identici a quelli che si ottengono per lo stato miscela, gli altri due termini sono quelli che danno luogo ad un effetto di interferenza.

Sostituendo la (4.7) nella (4.2), si ottiene la funzione di Wigner associata all'operatore densità dello stato puro (4.5):

$$\begin{aligned} W_{puro}(q, p) &= \frac{1}{4\pi(1 + \text{Re}\langle z_1 | z_2 \rangle)} \int [\psi_{z_1}(q + \frac{u}{2}) \psi_{z_1}^*(q - \frac{u}{2}) + \\ &\quad \psi_{z_2}(q + \frac{u}{2}) \psi_{z_2}^*(q - \frac{u}{2}) + \psi_{z_1}(q + \frac{u}{2}) \psi_{z_2}^*(q - \frac{u}{2}) + \\ &\quad + \psi_{z_2}(q + \frac{u}{2}) \psi_{z_1}^*(q - \frac{u}{2})] e^{-ipu} du, \end{aligned} \quad (4.8)$$

e si vede che i primi due termini sono ancora la somma delle funzioni di Wigner dei due stati puri $|z_1\rangle$ e $|z_2\rangle$; per lo stato puro, però, sono presenti anche dei termini di interferenza. Infatti, assegnando gli autovalori $z_1 = 0$, $z_2 = 4$, possiamo tracciare il grafico della (4.8) sullo spazio delle fasi (q, p) , che è mostrato in figura (4.2).

È interessante a questo punto valutare la differenza tra $W_{puro}(q, p)$ e $W_{misto}(q, p)$, graficata in figura (4.3). Si vede dalla figura (4.2) che l'effetto di interferenza che si osserva per lo stato puro è rappresentato da oscillazioni della funzione di Wigner, che assume valori sia positivi che negativi; vedremo inoltre che quando i due stati coerenti sono energeticamente più lontani tra loro questo effetto assume maggiore rilevanza e maggiore diventa la rapidità di oscillazione della funzione di Wigner per lo stato puro.

Quando invece i due stati coerenti sono più vicini, ad esempio per $z_1 = 0$ e $z_2 = i$, si ha, per la funzione di Wigner relativa alla miscela di questi due stati, una rappresentazione nello spazio delle fasi tracciata in figura (4.4),

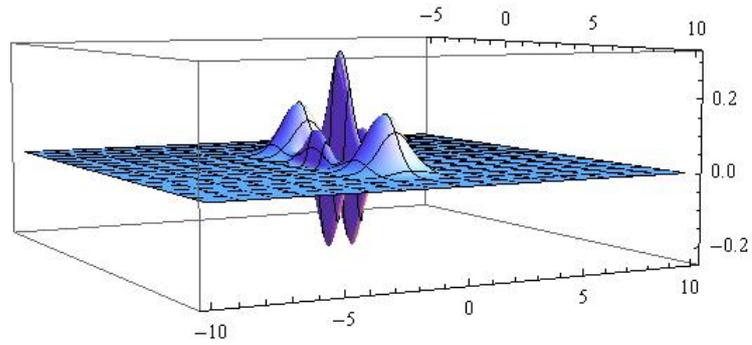


Figura 4.2: Funzione di Wigner di uno stato puro, per $z_1 = 0$ e $z_2 = 4$

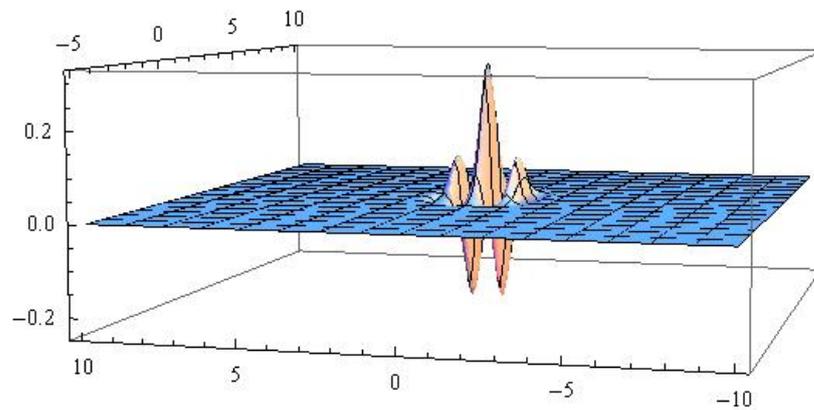


Figura 4.3: Differenza tra la funzione di Wigner dello stato puro e di quello misto, per $z_1 = 0$ e $z_2 = 4$

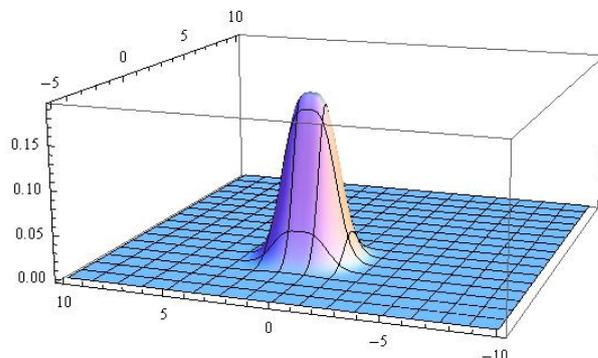


Figura 4.4: Funzione di Wigner della miscela di due stati coerenti, con $z_1 = 0$ e $z_2 = i$

ossia la funzione di Wigner corrispondente allo stato misto è rappresentata da due gaussiane quasi completamente sovrapposte.

Allo stato puro dato dalla sovrapposizione quantistica di $|z_1\rangle$ e $|z_2\rangle$ è associata la funzione di Wigner mostrata in figura (4.5) e la differenza tra le funzioni di Wigner di stato puro e misto è graficata in figura (4.6). In questo caso, come si vede dalla figura (4.6), l'effetto di interferenza è rappresentato dalle aree di valori negativi attorno al picco positivo.

Abbiamo detto che l'effetto di interferenza che si osserva nella funzione di Wigner per lo stato puro è accentuato quando consideriamo due stati coerenti più lontani in energia, a questo proposito consideriamo, ad esempio, $z_1 = 1$ e $z_2 = 10$: le figure (4.7) e (4.8) mostrano rispettivamente i grafici di $W_{puro}(q, p)$ e di $W_{puro}(q, p) - W_{misto}(q, p)$ relative a questi due stati coerenti. Si vede quindi che in questo caso il termine dovuto all'interferenza mostra delle oscillazioni molto più rapide. In generale, si osserva che quando i due stati coerenti si allontanano, la funzione di Wigner dello stato puro dato dalla sovrapposizione di questi ultimi compie oscillazioni sempre più rapide, e se si integra la $W_{puro}(q, p)$ in p , si ottiene la distribuzione di probabilità in q , ossia la sovrapposizione delle due gaussiane, in quanto l'integrale della parte oscillatoria di interferenza va a zero. Effettuando quindi una misura con uno strumento capace di apprezzare grandezze dell'ordine di svariati \hbar , l'effetto di interferenza non viene osservato.

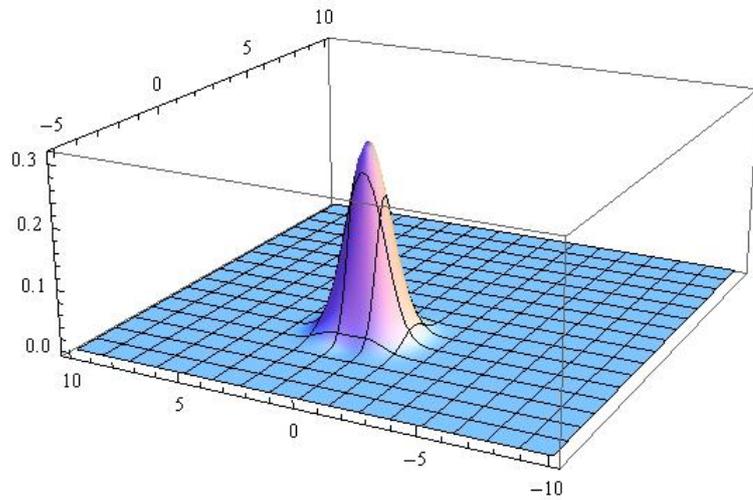


Figura 4.5: Funzione di Wigner dello stato puro, con $z_1 = 0$ e $z_2 = i$

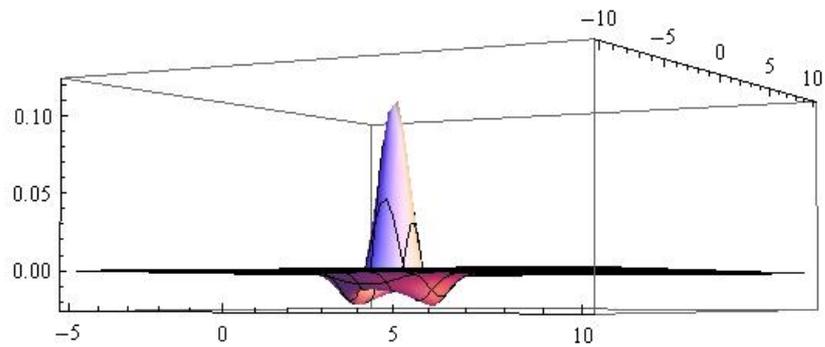


Figura 4.6: Differenza tra la funzione di Wigner dello stato puro e di quello misto, per $z_1 = 0$ e $z_2 = i$

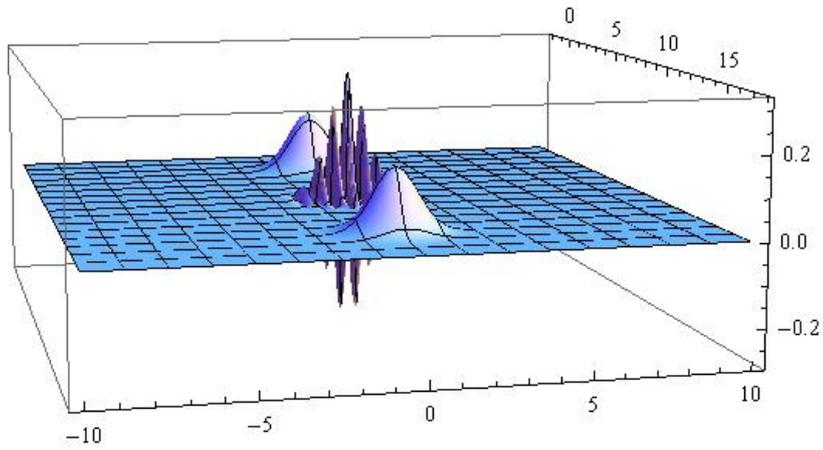


Figura 4.7: Funzione di Wigner di uno stato puro, per $z_1 = 1$ e $z_2 = 10$

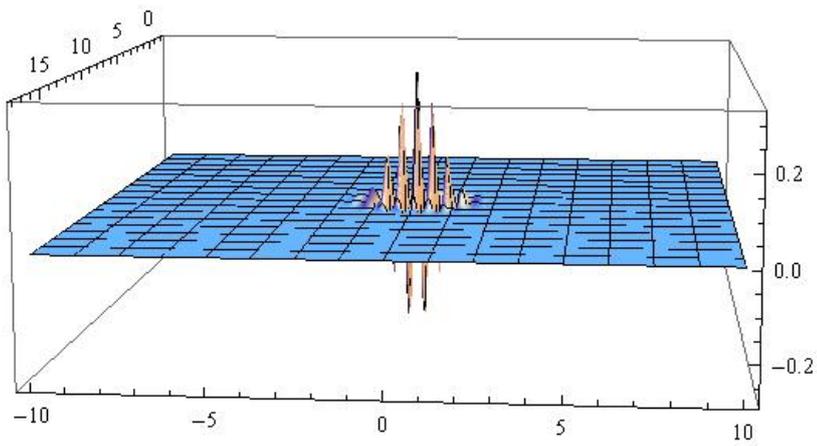


Figura 4.8: Differenza tra la funzione di Wigner dello stato puro e di quello misto, per $z_1 = 1$ e $z_2 = 10$

4.1 Conclusioni

Quindi possiamo concludere che nel caso di due stati coerenti che approssimano particelle con differenze di energia macroscopiche, lo stato misto e lo stato puro sono effettivamente indistinguibili. Quello che risulta interessante è notare che la indistinguibilità non è data dal termine di interferenza che va a zero, al contrario esso rimane con valori dell'ordine $(\pi\hbar)^{-1}$, ma il fatto che le sue oscillazioni divengono sempre più rapide lo rende nullo per tutte le misure macroscopiche. Questo è un fenomeno presente nella teoria della misura quantistica [3], dove si vede che la differenza fra stati puri e miscele è data da termini di interferenza rapidamente oscillanti.

In questo senso la formulazione di Wigner della meccanica quantistica è vista come una deformazione della meccanica classica, che si riduce ad essa quando il valore della costante \hbar diventa marginale rispetto ai valori delle altre grandezze osservabili che caratterizzano il sistema fisico in esame.

Appendice A

Programma

In questa appendice mostriamo il programma di *Mathematica* usato per costruire le figure mostrate nella tesi.

Innanzitutto, si è definita la funzione d'onda dello stato coerente $|z\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate(3.6):

$$z[q_, z0_] := E^(-(q^2/2) + Sqrt[2]*q*z0 - Re[z0]^2)/Pi^(1/4)$$

Per calcolare le espressioni in (4.4) e in (4.8) sono state dapprima valutate $\psi_{z1}(q + \frac{u}{2})$, $\psi_{z2}(q + \frac{u}{2})$, $\psi_{z1}^*(q - \frac{u}{2})$ e $\psi_{z2}^*(q - \frac{u}{2})$:

```
zu1p = z[q + u/2, z1]
zu2p = z[q + u/2, z2]
zu1m = FullSimplify[Conjugate[z[q - u/2, z1]],
  Element[q, Reals] && Element[u, Reals]]
zu2m = FullSimplify[Conjugate[z[q - u/2, z2]],
  Element[q, Reals] && Element[u, Reals]]
```

quindi abbiamo trovato una espressione per la $W_{misto}(q, p)$:

```
Subscript[W\[Rho], m] = (1/(4*Pi))*
  Integrate[(zu1p*zu1m + zu2p*zu2m)
  /E^(I*p*u), {u, -Infinity, Plus[Infinity]}]
Wm = Simplify[Subscript[W\[Rho], m],
  Element[q, Reals] && Element[p, Reals]]
```

e per la $W_{puro}(q, p)$, dopo aver valutato il prodotto scalare $\langle z_1|z_2\rangle$:

```
z1z2 = Integrate[z[q, z2]*Conjugate[z[q, z1]],
  {q, -Infinity, Plus[Infinity]}]
```

```

Subscript[W\[Rho], p] = (1/(2*Pi))*
  (1/(2 + 2*Re[z1z2]))*Integrate[
  ((zu1p + zu2p)*(zu1m + zu2m))
  /E^(I*p*u), {u, -Infinity, Plus[Infinity]}]
Wp = Simplify[Subscript[W\[Rho], p],
  Element[q, Reals] && Element[p, Reals]]

```

A questo punto, assegnando due valori a z_1 e z_2 , si sono costruiti i grafici di $W_{misto}(q, p)$, di $W_{puro}(q, p)$ e della loro differenza; ed esempio, per le figure (4.1), (4.2) e (4.3):

```

a = 0
b = 4

```

```

Plot3D[Wm /. {z1 -> a, z2 -> b}, {q, -5, 10},
  {p, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 75]

```

```

Plot3D[Chop[Wp /. {z1 -> a, z2 -> b}], {q, -5, 10},
  {p, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 75]

```

```

Plot3D[Chop[Wp - Wm /. {z1 -> a, z2 -> b}],
  {q, -5, 10}, {p, -10, 10}, PlotRange -> All,
  PlotPoints -> 75]

```

Bibliografia

- [1] Per una introduzione vedi: A. Romano, *Lezioni di Meccanica Razionale*, (Liguori, Napoli, 1990).
- [2] Per una introduzione vedi: C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, (Wiley 2000).
- [3] K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, (Benjamin 1966).
- [4] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, 1994).
- [5] H. Weyl, *The theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover, 1931).
- [6] E.P. Wigner, *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
- [7] V.I. Tatarskii, *Foundations of Quantum Group Theory*, *Sov. Phys. Usp.* **24**(4), April 1983
- [8] C. Esposito, *L'Evoluzione Classica e Quantistica nel Formalismo di Weyl-Wigner-Moyal*, Tesi si laurea, Università degli Studi di Napoli Federico II.