

Università degli Studi di Napoli
Federico II



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Tesi di Laurea in Fisica

Oscillatori q -deformati

Relatore
Prof. Fedele Lizzi

Candidato
Luigi Parlato
matr. 60/825

Anno Accademico 2005/2006

*Ai miei genitori Maria Rosa e Giovanni,
per la loro pazienza e la loro fiducia.*

Indice

1	Introduzione	11
1.1	Indeterminazione della posizione in meccanica quantistica . . .	11
1.2	Quantum group e oscillatori deformati	14
2	Algebre bosoniche q-deformate	17
2.1	Algebra di oscillatore armonico bosonico	17
2.2	L'oscillatore di Biedenharn	26
2.2.1	Costruzione della rappresentazione di Fock nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$	28
2.2.2	Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel ca- so di $q \in \mathbb{R}^+$	32
2.3	Altri tipi di oscillatori q -deformati	38
2.3.1	Oscillatore di Arik-Coon-Lam	40
2.3.2	Oscillatore di Feinsilver	43
2.3.3	Oscillatore di Coon-Yu-Baker	45
2.4	Caratteristiche comuni degli oscillatori q -deformati e mutue trasformazioni	47
2.5	Stati coerenti degli oscillatori q -deformati	50
3	Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati	55
3.1	Sulle estensioni autoaggiunte degli operatori	56
3.1.1	Spazi, numeri e indici di difetto — trasformata di Cayley	59
3.1.2	Operatori alle differenze e matrici di Jacobi	62
3.2	L'oscillatore armonico rivisitato	65
3.3	Proprietà dell'operatore posizione nelle varie realizzazioni . . .	68
3.3.1	Costruzione di Biedenharn	68
3.3.2	Costruzione ACL per $q > 1$	71
3.3.3	Costruzione Fei per $q > 1$	73
3.3.4	Costruzione CYB ($0 < q < 1$)	74
3.4	Regole di commutazione	75
3.5	Relazioni di indeterminazione generalizzate	75

3.5.1	Costruzione di Biedenharn	76
3.5.2	Costruzione ACL	81
3.5.3	Costruzione di Feinsilver	83
3.5.4	Costruzione CYB	83
3.6	Considerazioni sullo spettro e sulle indeterminazioni dell'operatore posizione	84
4	Studio di un sistema fisico deformato: l'oscillatore armonico	89
4.1	Costruzione di Biedenharn	90
4.2	Costruzioni ACL e Fei	94
4.3	Costruzione CYB	97
4.4	Conclusioni	99
A	Appendici	101
A.1	Localizzabilità in meccanica quantistica	101
A.1.1	Indeterminazioni simultanee di operatori simmetrici	101
A.1.2	Misure della posizione come funzionali sugli stati	102
A.2	Algebra Universale di Ricoprimento (UEA)	104
A.3	Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$	105
A.4	q -Funzioni speciali	114
A.4.1	Serie ipergeometrica	114
A.4.2	q -Shifted factorials	115
A.4.3	q -Serie ipergeometrica e q -funzioni esponenziali	116
A.5	Autofunzioni degli operatori generalizzati	117
A.6	Andamento temporale del valor medio della posizione negli stati coerenti	120

Elenco delle figure

1.1	Relazioni di indeterminazioni di Heisenberg	12
1.2	Due nuove limitazioni per le indeterminazioni simultanee della posizione e del momento	15
2.1	Andamento dei q -numeri $[[n]]_q$	30
2.2	Andamento degli $[[n]]_q$ per $q < 1$	31
2.3	Andamento degli autovalori λ_n per $q > 1$	33
2.4	Andamento degli autovalori λ_n per $0 < q < 1$ (caso 2)	35
2.5	Andamento degli autovalori λ_n per $0 < q < 1$ (caso 3).	37
2.6	Andamento dei q -numeri $[n]_q$	41
2.7	Andamento degli $[n]_q$ per $q < 1$	42
2.8	Andamento dei q -numeri $\{n\}_q$	46
3.1	Andamenti dei polinomi $H_n(x)$ e $G_n(x)$	70
3.2	Andamenti dei polinomi $H_n(x)$ e $D_n(x)$	73
3.3	Indeterminazioni della posizione e del momento (costr. Bie)	79
3.4	Indeterminazioni della posizione e del momento (costr. ACL)	82
3.5	Indeterminazioni della posizione e del momento (costr. Fei)	84
3.6	Andamento di alcuni polinomi $G_n(x)$ al variare di q	86
3.7	Andamento di alcuni polinomi $D_n(x)$ al variare di q	87
4.1	Livelli energetici dell'O.A. (costruzione Bie)	91
4.2	Livelli energetici dell'O.A. (costruzioni ACL e Fei)	95
4.3	Livelli energetici dell'O.A. (costruzione CYB)	98

Ringraziamenti

E' più che doveroso ringraziare il prof. Fedele Lizzi per la competenza, il supporto ed i suggerimenti che sono stati determinanti per la stesura di questo lavoro.

Si ringrazia inoltre il prof. Luigi Cappiello per l'attenta lettura ed i preziosi commenti che ci hanno permesso di arricchirla.

Desidero anche ringraziare Patrizia Vitale, Antonella D'Avanzo, Alessandro Valentino ed Alessandro Zampini per le utili discussioni sulla geometria non commutativa, e non solo.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi ed amici Federica Sapio, Eugenio Schisano e Ciro Pistillo, ed in particolare a Raffaele De Feo, con cui è da una vita che si discute di fisica.

Si ringrazia per la cortesia e la professionalità il personale della biblioteca "R. Stroffolini" di Napoli, in particolare nelle persone di Vincenzo De Luise, e dell'ormai amico Guido Celentano.

Infine un pensiero speciale va alle piccole Maria Rosa e Cristina, grazie alle quali questo lavoro ha richiesto un tempo maggiore ma contiene molto più sentimento.

Lista dei simboli:

Operatori <i>armonici</i> :	$(\widehat{a}_0, \widehat{a}_0^\dagger)$
Operatori bosonici <i>deformati</i>	
di Biedenharn:	$(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger)$
di Arik-Coon-Lam:	$(\widehat{A}, \widehat{A}^\dagger)$
di Feinsilver:	$(\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}^\dagger)$
di Coon-Yu-Baker:	$(\widehat{b}, \widehat{b}^\dagger)$
generici:	$(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathcal{A}}^\dagger)$
Operatore numero:	$\widehat{\mathcal{N}}$
Operatori posizione e momento adimensionali:	$\widehat{x} = \frac{\widehat{x}}{L}, \widehat{p} = \frac{\widehat{p}}{K}$
Insieme dei numeri naturali <i>compreso lo zero</i> :	\mathbb{N}_0
Dominio massimale degli operatori bosonici:	\mathcal{D}_M
Base standard:	$ n\rangle$
Base canonica (normalizzata):	$ \mathbf{n}\rangle$
Stati coerenti:	$ z\rangle$
Norma degli stati coerenti:	$\langle z z \rangle = \mathcal{M}(z ^2)$
q -numeri simmetrici:	$[[n]]_q = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$
q -numeri asimmetrici:	$[n]_q = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}$
q -numeri limitati:	$\{n\}_q = 1 - q^n$
q -shifted factorial:	$(a; q)_n$
Prodotti di q -shifted factorial:	$(a_1, \dots, a_r; q)_n$
Funzione q -esponenziale:	$e_q^z \equiv \exp_q(z)$
Basic hypergeometric series:	${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle q; x \right)$

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Indeterminazione della posizione in meccanica quantistica

Una delle grandi rivoluzioni della meccanica quantistica è stata l'introduzione, ad opera di Heisenberg, del principio di indeterminazione secondo il quale esistono grandezze fisiche che non possono essere misurate simultaneamente con una precisione arbitraria; accade infatti che quanto maggiore è la precisione con cui si determina il valore di una, tanto maggiore sarà l'indeterminazione dell'altra.

Consideriamo, per esempio, le grandezze posizione e momento, rappresentate dagli operatori autoaggiunti \hat{x}_i e \hat{p}_j ($i, j = 1, 2, 3$) che come noto soddisfano la relazione di commutazione:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.1)$$

Indichiamo con $\langle \hat{x}_i \rangle$ il valor medio di una misura della posizione e con $(\Delta \hat{x}_i)^2 = (\hat{x}_i - \langle \hat{x}_i \rangle)^2$ la deviazione standard della media, che d'ora in avanti chiameremo *indeterminazione*, e sinao $\langle \hat{p}_j \rangle$ e $(\Delta \hat{p}_j)^2$ le analoghe quantità riferite al momento.

Il principio di indeterminazione implica allora che:

$$\Delta \hat{x}_i \Delta \hat{p}_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \quad (1.2)$$

Limitandoci al caso unidimensionale, se riportiamo questa relazione su un piano cartesiano di coordinate $X = \Delta \hat{x}$ e $Y = \Delta \hat{p}$, la regione permessa per le indeterminazioni simultanee nella posizione e nel momento è delimitata dall'arco d'iperbole $XY \geq \text{cost.}$ che ha per asintoti gli assi coordinati, come indicato dalla zona scura in figura 1.1.

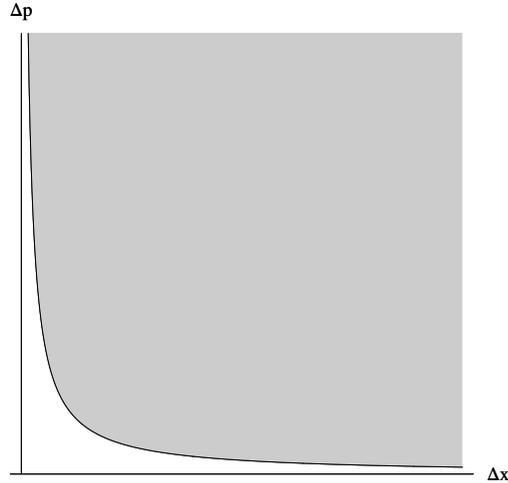


Figura 1.1: Regione permessa per relazioni di indeterminazioni di Heisenberg.

Si vede allora che la relazione (1.2) permette ancora una misurazione arbitrariamente precisa della posizione, a scapito del valore del momento che risulta completamente indeterminato ($\Delta\hat{x} \rightarrow 0$ se $\Delta\hat{p} \rightarrow \infty$).

Negli ultimi anni, invece, si è fatta strada [?] l'ipotesi dell'esistenza di una scala di lunghezza minima al di sotto della quale ogni regione spaziale diventa fisicamente inaccessibile. Essa rappresenterebbe allora una *lunghezza fondamentale* per la quale si stima un valore dell'ordine della lunghezza di Planck:

$$\lambda_P = \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} \simeq 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}$$

Come conseguenza di ciò, ogni misurazione della posizione avrebbe un'incertezza non inferiore a tale lunghezza fondamentale.

In questa ipotesi, una teoria quantistica idonea alla trattazione di fenomeni su piccole scale di lunghezza dovrebbe allora prevedere un limite minimo assoluto alle indeterminazioni della posizione.

Tale condizione potrebbe essere ottenuta sostituendo la relazione di indeterminazione di Heisenberg (1.2) con una relazione più complessa.

A questo proposito ricordiamo che la (1.2) è un caso particolare di un teorema ¹ che lega il prodotto delle indeterminazioni di due operatori \hat{u} e \hat{v} (su un opportuno dominio) al modulo del valor medio del loro commutatore,

¹Vedi appendice A.1.1

1.1 Indeterminazione della posizione in meccanica quantistica

secondo la relazione:

$$\Delta u \Delta v \geq \frac{1}{2} \left| \langle [u, v] \rangle \right| \quad (1.3)$$

Per questo motivo, se sostituiamo il commutatore (1.1) degli operatori \hat{x} e \hat{p} con una nuova relazione del tipo:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar F(\hat{x}, \hat{p}, \dots) \quad (1.4)$$

ne discenderà la relazione d'indeterminazione:

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \langle F(x, p, \dots) \rangle$$

Come mostrato da Kempf, Mangano e Mann [?], scegliendo opportunamente la F a secondo membro della (1.4) si possono ottenere nuovi vincoli per le indeterminazioni di \hat{x} e \hat{p} .

L'idea di introdurre regole di commutazione più generali della (1.1) si trova già in un lavoro di Wigner del 1950 [?], in cui l'autore espone le seguenti considerazioni: sia un sistema fisico quantistico descritto dall'hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (1.5)$$

Quantisticamente le derivate temporali di ogni operatore si esprimono in funzione del suo commutatore con l'hamiltoniana, per cui:

$$\dot{\hat{x}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}], \quad \dot{\hat{p}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}] \quad (1.6)$$

Ora, *assumendo la validità* della relazione (1.1) per questi operatori, dalla (1.6) e dalla forma (1.5) dell'hamiltoniana discende che anche nel caso quantistico si ritrovano le equazioni del moto classiche:

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\hat{p}}{m}, \quad \dot{\hat{p}} = -\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \right) \quad (1.7)$$

Tuttavia, continua Wigner, le relazioni (1.6) e (1.7) hanno un significato fisico più immediato² della (1.1). La (1.6), infatti, descrive l'evoluzione temporale di due quantità fisiche, mentre le(1.7) esprimono, rispettivamente, la velocità come funzione del momento, e la forza applicata come causa della variazione del momento.

²In verità c'è da dire che, essendo p il generatore delle traslazioni spaziali, la (1.1) esprime allora l'omogeneità dello spazio.

Sarebbe quindi auspicabile che la (1.1) potesse essere ricavata dalle due precedenti, e non viceversa.

Egli affronta tale problema considerando l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico, e trova *il risultato sorprendente* che le (1.6) e (1.7) determinano non più la (1.1) ma la più generale:

$$(i - [x, p])^2 = -(2E_0 - 1)^2$$

dove E_0 è un parametro. Nel caso $E_0 = \frac{1}{2}$ si ritrova la (1.1).

Successivamente [?, ?], le considerazioni di Wigner sono state applicate anche agli operatori di creazione e distruzione, i quali, ricordiamo, sono legati agli operatori posizione e momento dalle trasformazioni lineari:

$$\hat{a}_i^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2L}}\hat{x}_i - \frac{iL}{\sqrt{2\hbar}}\hat{p}_i \quad \text{e} \quad \hat{a}_i \equiv \frac{1}{\sqrt{2L}}\hat{x}_i + \frac{iL}{\sqrt{2\hbar}}\hat{p}_i \quad (1.8)$$

dove L è un parametro con le dimensioni di una lunghezza.

Tali operatori definiscono un'algebra che prende il nome di **algebra di Heisenberg-Weyl**, o algebra dell'**oscillatore armonico bosonico**, e agli operatori stessi ci si riferisce come **operatori bosonici**.

Il loro commutatore è legato a quello degli operatori \hat{x} e \hat{p} dalla relazione:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \quad (1.9)$$

che implica $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1^3$. Il legame (1.9) tra i due commutatori ci suggerisce che un'altra via per giungere a relazioni del tipo (1.4) è quella di modificare gli operatori bosonici, in modo che soddisfino una commutazione più complessa, e poi da questi, riportarsi agli operatori \hat{x} e \hat{p} tramite le inverse delle (1.8):

$$\hat{x} = \frac{L}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{i\hbar}{\sqrt{2L}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (1.10)$$

In questo modo gli operatori \hat{x} e \hat{p} saranno vincolati a soddisfare la nuova commutazione imposta dalla (1.9).

1.2 Quantum group e oscillatori deformati

Negli ultimi anni ha avuto un enorme sviluppo lo studio di una serie di generalizzazioni, o meglio "deformazioni", dipendenti da uno o più parametri

³Anche per questi operatori, seguendo il procedimento di Wigner, sono state trovate relazioni più generali.

1.2 Quantum group e oscillatori deformati

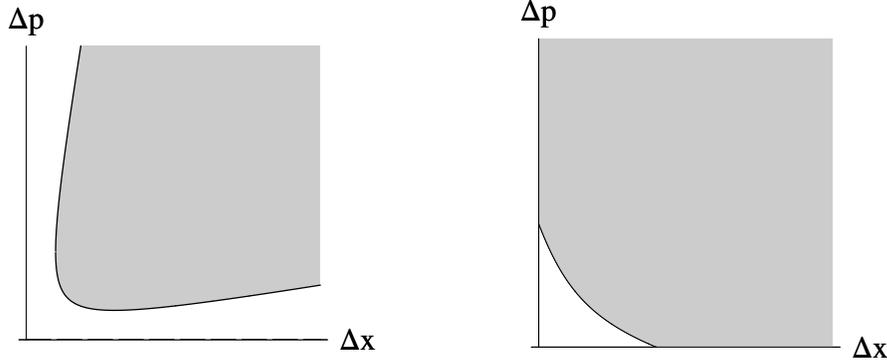


Figura 1.2: Due nuove limitazioni per le indeterminazioni simultanee della posizione e del momento

continui, delle algebre di Lie classiche, le quali si riottengono per opportuni valori dei parametri. Tali strutture prendono il nome di *quantum group* [?, ?, ?, ?, ?].

In particolare, sono state anche introdotte [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?] deformazioni dell'algebra dell'oscillatore armonico, in cui i nuovi operatori bosonici soddisfano regole di commutazione del tipo:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \dots)$$

Questi nuovi operatori bosonici sono allora il punto di partenza per costruire, tramite le (1.10), dei nuovi operatori posizione e momento con relativa relazione di commutazione (cfr. eq. (1.9)):

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \dots) \quad (1.11)$$

Vedremo che, in alcuni casi, da questa commutazione discendono nuove relazioni di indeterminazione che, graficate sul piano $(\Delta\hat{x}, \Delta\hat{p})$, individuano le zone mostrate in fig. 1.2

In particolare mostreremo che, in alcuni casi, è possibile ottenere una relazione del tipo:

$$\Delta\hat{x} \geq f(x, p, \dots)$$

cioè una indeterminazione nella sola posizione, raggiungendo così l'obiettivo che ci eravamo imposti.

Il lavoro che intendiamo svolgere sarà strutturato nel seguente modo:

Nel Capitolo 2 richiameremo le proprietà dell'algebra dell'oscillatore armonico bosonico, per poi studiare le proprietà di quattro differenti deformazioni, fornendone la classificazione delle rappresentazioni irriducibili, la costruzione esplicita dello spazio di Fock e gli stati coerenti.

Nel Capitolo 3 studieremo le proprietà degli operatori \hat{x} e \hat{p} definiti a partire dai nuovi operatori bosonici deformati, mediante le (1.10), con particolare attenzione alle loro proprietà spettrali.

Nel Capitolo 4 infine, applicheremo, i nuovi operatori posizione e momento allo studio dell'oscillatore armonico, e troveremo delle caratteristiche inusuali.

Prima di continuare, ricordiamo che l'operazione di commutazione di due operatori \hat{u} , \hat{v} , definita come:

$$[\hat{u}, \hat{v}] \equiv \hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u} \quad (1.12)$$

svolge un ruolo molto importante in meccanica quantistica. Per esempio abbiamo appena visto che il valore del commutatore determina le relazioni d'indeterminazione tra due operatori (cfr. eq.(1.3)).

Inoltre è il commutatore con l'hamoltoniana \hat{H} che determina l'evoluzione temporale degli operatori, secondo la relazione:

$$\dot{\hat{v}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{v}] \quad (1.13)$$

In molti testi la deformazione dell'algebra di Heisenberg-Weyl viene interpretata come una ridefinizione dell'operazione di commutazione, ovvero si introduce una nuova operazione del tipo:

$$[\hat{u}, \hat{v}]_q \equiv \hat{u}\hat{v} - f(q)\hat{v}\hat{u}$$

dove f è una funzione di una variabile, insieme ad una coppia di operatori \mathbf{a} , \mathbf{a}^\dagger , che soddisfano:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger]_q = \mathbf{1}$$

Tale nuova operazione $[\ ,]_q$ viene poi utilizzata dovunque compaia l'usuale commutatore (1.12).

Nel nostro lavoro intendiamo solo *deformare* gli operatori bosonici, e, tramite questi, gli operatori posizione e momento. Ogni volta che useremo un commutatore sarà sempre inteso quello usuale definito dalla (1.12).

Capitolo 2

Algebre bosoniche q -deformate

In questo capitolo richiameremo le proprietà dell'algebra bosonica classica e della sua rappresentazione nello spazio di Fock.

Presenteremo poi la sua formulazione cosiddetta “estesa”, che ne rappresenta una prima generalizzazione, e infine le principali q -deformazioni, classificandone le relative rappresentazioni, ma concentrandoci sulla costruzione dello spazio di Fock e sugli stati coerenti.

2.1 Algebra di oscillatore armonico bosonico

L'algebra di Heisenberg-Weyl, o algebra dell'oscillatore armonico, è generata dall'identità, $\mathbf{1}$, e dagli operatori \hat{a}_0^\dagger e \hat{a}_0 , detti, rispettivamente, operatore di *creazione* e di *distruzione*, che soddisfano la relazione di commutazione:

$$[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = \mathbf{1} \quad (2.1)$$

Introdotta l'operatore numero $\hat{\mathcal{N}}$ definito da:

$$\hat{\mathcal{N}} \equiv \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \quad (2.2)$$

si verifica che esso, per la (2.1), gode delle proprietà:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{N}}, \hat{a}_0^\dagger] &= \hat{a}_0^\dagger \\ [\hat{\mathcal{N}}, \hat{a}_0] &= -\hat{a}_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Gli operatori¹ \hat{a}_0 e \hat{a}_0^\dagger , saranno d'ora in poi denotati **operatori armonici**.

¹Essi vengono comunemente detti *operatori bosonici*, ma noi riserveremo questa denominazione agli operatori deformati che introdurremo in seguito.

Si noti che le (2.1)–(2.3) sono invarianti per l’involutione antilineare:

$$\begin{aligned}(\widehat{a}_0)^* &= \widehat{a}_0^\dagger \\ (\widehat{\mathcal{N}})^* &= \widehat{\mathcal{N}}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Vedremo più avanti che questa proprietà permette di introdurre un prodotto scalare nello spazio supporto delle rappresentazioni, rispetto al quale gli operatori \widehat{a}_0^\dagger e \widehat{a}_0 risultino mutuamente aggiunti, come suggerisce la notazione usata. L’operatore $\widehat{\mathcal{N}}$, a sua volta, risulta essere un operatore autoaggiunto.

La denominazione di “algebra di oscillatore armonico” discende dal fatto che gli operatori \widehat{a}_0 e \widehat{a}_0^\dagger permettono una efficace trattazione dell’oscillatore bosonico quantistico, la cui hamiltoniana:

$$\widehat{H}_{oa} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\widehat{x}^2$$

con la sostituzione (1.8), assume la forma (cfr. paragrafo 3.2):

$$\widehat{H}_{oa} = 2E_0\left(\widehat{\mathcal{N}} + \frac{1}{2}\right)\tag{2.5}$$

dove E_0 è un parametro con le dimensioni dell’energia.

L’introduzione dell’operatore numero (2.2) è allora giustificata dal fatto che **esso rappresenta l’hamiltoniana del sistema**, a meno di una costante. La potenza della trattazione con gli operatori bosonici risulterà, tra breve, in tutta la sua evidenza allorché vedremo che da considerazioni puramente algebriche trarremo informazioni sulle proprietà fisiche dell’oscillatore quantistico.

Tanto per cominciare, ad esempio, lo studio dell’operatore numero, nell’ipotesi che questi abbia **spettro discreto, semplice e non vuoto**, permette di costruire astrattamente uno spazio supporto di una rappresentazione dell’algebra (2.1)–(2.3), mediante il procedimento che andiamo ad illustrare.

Per le ipotesi fatte, l’operatore $\widehat{\mathcal{N}}$ ammette almeno un autovalore, che deve essere reale e positivo poiché esso è un operatore positivo autoaggiunto. Sia μ_0 tale autovalore, e indichiamo con $|\mu_0\rangle$ l’autovettore corrispondente:

$$\widehat{\mathcal{N}}|\mu_0\rangle = \mu_0|\mu_0\rangle$$

Indichiamo con $|\mu_{\pm 1}\rangle$ rispettivamente i due vettori:

$$\begin{aligned}|\mu_1\rangle &\equiv \widehat{a}_0^\dagger|\mu_0\rangle \\ |\mu_{-1}\rangle &\equiv \widehat{a}_0|\mu_0\rangle\end{aligned}$$

2.1 Algebra di oscillatore armonico bosonico

Usando le (2.1)–(2.2) è facile vedere che essi sono ancora autovettori di $\widehat{\mathcal{N}}$, di autovalori $(\mu + 1)$ e $(\mu - 1)$ rispettivamente; infatti:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{N}}|\mu_1\rangle &= \widehat{\mathcal{N}}\widehat{a}_0^\dagger|\mu_0\rangle = (\widehat{a}_0^\dagger\widehat{a}_0)\widehat{a}_0^\dagger|\mu_0\rangle = \widehat{a}_0^\dagger(\widehat{a}_0^\dagger\widehat{a}_0 + \mathbf{1})|\mu_0\rangle = \\ &= \widehat{a}_0^\dagger(\widehat{\mathcal{N}} + \mathbf{1})|\mu_0\rangle = \widehat{a}_0^\dagger(\mu + \mathbf{1})|\mu_0\rangle = (\mu + 1)|\mu_1\rangle\end{aligned}\quad (2.6)$$

ed analogamente per $|\mu_{-1}\rangle$.

Questo procedimento può essere iterato, dimodoché per applicazione successiva di \widehat{a}_0^\dagger e \widehat{a}_0 si genera un sistema numerabile $\{|\mu_n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$ di vettori definiti da:

$$|\mu_n\rangle = \begin{cases} (\widehat{a}_0^\dagger)^n|\mu_0\rangle & n > 0 \\ (\widehat{a}_0)^{-n}|\mu_0\rangle & n < 0 \end{cases}$$

ognuno dei quali è ancora autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ di autovalore:

$$\widehat{\mathcal{N}}|\mu_n\rangle = (\mu_0 + n)|\mu_n\rangle \quad (2.7)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Mentre la costruzione di vettori di indice $n > 0$ può proseguire indefinitamente, quella di indici negativi deve necessariamente interrompersi in quanto $\widehat{\mathcal{N}} = \widehat{a}_0^\dagger\widehat{a}_0$ è un operatore positivo e tali devono essere anche tutti gli autovalori che compaiono nella (2.7).

Ciò significa che non appena N_0 è il più piccolo intero (negativo) maggiore di $(-\mu_0)$, cioè:

$$N_0 - 1 < -\mu_0 < N_0$$

deve accadere che:

$$\widehat{a}_0|\mu_{N_0}\rangle = 0 \quad (2.8)$$

altrimenti $\widehat{a}_0|\mu_{N_0}\rangle$ sarebbe autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ relativo ad un autovalore negativo.

Un vettore che gode della proprietà (2.8) prende il nome di **stato di vuoto**² e viene indicato con $|0\rangle$.

Dalla (2.8) discende inoltre che :

$$\widehat{\mathcal{N}}|\mu_{N_0}\rangle = 0$$

e quindi $|\mu_{N_0}\rangle$ è un autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ di autovalore zero.

Si può verificare facilmente che, a partire dal vuoto, per applicazione successiva dell'operatore di creazione si ritrovano tutti gli autovettori costruiti in

²Si assume che lo stato di vuoto sia normalizzato.

precedenza a partire da $|\mu_0\rangle$.

Precisamente risulta:

$$\widehat{a}_0^\dagger |0\rangle \propto |\mu_{N_0+1}\rangle$$

e in generale:

$$(\widehat{a}_0^\dagger)^n |0\rangle \propto |\mu_{N_0+n}\rangle$$

In più stavolta, essendo partiti dall'autovalore 0, e tenendo conto della (2.6) scopriamo che tali autovettori devono corrispondere ad autovalori interi. Ciò significa che anche l'autovalore arbitrario μ da cui siamo partiti, è in realtà un intero.

Adottando per essi la nuova notazione:

$$|n\rangle \equiv (\widehat{a}_0^\dagger)^n |0\rangle \tag{2.9}$$

ne risulta la caratteristica azione dell'operatore numero:

$$\widehat{\mathcal{N}}|n\rangle = n|n\rangle$$

Determiniamo ora anche l'azione degli altri operatori.

Per costruzione \widehat{a}_0^\dagger agisce, vedi la (2.9), come:

$$\widehat{a}_0^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle$$

L'azione di \widehat{a} si ottiene invece iterando la (2.1) fino ad ottenere:

$$\widehat{a}_0(\widehat{a}_0^\dagger)^n = n(\widehat{a}_0^\dagger)^{n-1} + (\widehat{a}_0^\dagger)^n \widehat{a}_0 \tag{2.10}$$

per la quale risulta che:

$$\widehat{a}_0 |n\rangle = \widehat{a}_0(\widehat{a}_0^\dagger)^n |0\rangle = n|n-1\rangle$$

dove abbiamo usato la (2.8).

Tra i vettori $|n\rangle$ può essere definito il seguente prodotto scalare:

$$\langle n | m \rangle \equiv \langle 0 | (\widehat{a})^n (\widehat{a}^\dagger)^m |0\rangle$$

giustificato dalla relazione (2.9).

Iterando ancora la (2.10) si ottengono, allora, le relazioni:

$$\langle n | m \rangle = n! \delta_{n,m}$$

I vettori $|n\rangle$ sono quindi ortogonali, e generano uno spazio di cui essi rappresentano la base, detta **base standard**, della rappresentazione.

2.1 Algebra di oscillatore armonico bosonico

E' naturale a questo punto introdurre anche i vettori normalizzati, per i quali impieghiamo una specifica notazione:

$$|\underline{n}\rangle \equiv \frac{|n\rangle}{\sqrt{n!}}$$

La cui chiusura dello spazio generato dal sistema $\{|\underline{n}\rangle\}$ è uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , e i cui elementi sono del tipo:

$$\mathcal{H} \equiv \left\{ |f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f_n |\underline{n}\rangle : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < \infty \right\} \quad (2.11)$$

Esso prende il nome di **spazio di Fock**, ed è, per costruzione, supporto di una rappresentazione irriducibile dell'algebra (2.1)–(2.3).

Il sistema di vettori normalizzati $\{|\underline{n}\rangle\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ prende il nome di **base canonica** dello spazio di Fock.

Come abbiamo visto, a partire da un qualsiasi autovettore di \widehat{N} , è possibile ricostruire, agendo con gli operatori \widehat{a} e \widehat{a}^\dagger , tutto lo spazio di Fock. Tutti tali autovettori sono quindi dei *vettori ciclici*³.

L'azione di \widehat{a}_0 e \widehat{a}_0^\dagger sulla base canonica è data dalle:

$$\widehat{a}_0 |\underline{n}\rangle = \frac{\widehat{a}_0 |n\rangle}{\sqrt{n!}} = \frac{n|n-1\rangle}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n} |\underline{n-1}\rangle \quad (2.12)$$

$$\widehat{a}_0^\dagger |\underline{n}\rangle = \frac{\widehat{a}_0^\dagger |n\rangle}{\sqrt{n!}} = \frac{|n+1\rangle}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n+1} |\underline{n+1}\rangle \quad (2.13)$$

Essi sono operatori non limitati, i cui domini massimali sono definiti, rispettivamente, dalle condizioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\widehat{a}_0} &= \left\{ |f\rangle \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 < \infty \right\} \\ \mathcal{D}_{\widehat{a}_0^\dagger} &= \left\{ |f\rangle \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)|f_n|^2 < \infty \right\} \end{aligned}$$

dove $|f\rangle$ è dato dalla (2.11).

E' immediato verificare che i due domini coincidono, in quanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)|f_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 + \|f_n\|^2$$

³Un vettore $|v\rangle$ si dice ciclico se le combinazioni finite del tipo $\sum_{a,n} (\widehat{u}_a)^n |v\rangle$ (dove $(\widehat{u}_a$ sono operatori) risultano dense.

pertanto i due membri estremi sono contemporaneamente finiti o infiniti. Su tale dominio, che d'ora in poi denoteremo \mathcal{D}_M , i due operatori bosonici risultano *mutuamente aggiunti*, in accordo con l'invarianza (2.4).

L'operatore $\widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0 = \widehat{\mathcal{N}}$ è definito sulle combinazioni finite dei vettori della base canonica, e su tale dominio risulta *essenzialmente autoaggiunto*.

Tutto ciò esaurisce la discussione sui domini di definizione degli operatori.

L'unicità di questa rappresentazione è garantita dall'analogo del teorema di Von Neumann sull'unicità della rappresentazione delle regole di commutazione di Heisenberg $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar$.

Abbiamo in questo senso costruito **l'unica rappresentazione** dell'algebra dell'oscillatore armonico bosonico.

Riportandoci al sistema fisico dell'oscillatore armonico descritto dalla (2.5), con semplici considerazioni algebriche abbiamo scoperto che l'hamiltoniana ammette un sistema numerabile di autostati, rappresentati dai vettori della base canonica $|\mathbf{n}\rangle$, ognuno di autovalore (vedi eq. (2.1)):

$$\mathcal{H}_{oa} |\mathbf{n}\rangle = 2E_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) |\mathbf{n}\rangle \equiv E_n |\mathbf{n}\rangle$$

Abbiamo inoltre determinato l'azione e il dominio di definizione degli operatori non limitati \widehat{a}_0 e \widehat{a}_0^\dagger , a partire dai quali, mediante le (1.8) si costruiscono gli operatori posizione e momento, anch'essi non limitati.

Più avanti, nel paragrafo 3.2, daremo un'altra trattazione dell'oscillatore armonico.

Poiché vogliamo costruire versioni più generali dell'algebra di Heisenberg-Weyl, dovremo necessariamente "rilassare" alcune delle relazioni definitorie (2.1)–(2.3). Per questo motivo è bene soffermarsi con più attenzione a valutare il ruolo svolto da ognuna di esse nel procedimento che abbiamo appena descritto. Si scopre così che, sempre nell'ipotesi che $\widehat{\mathcal{N}}$ abbia spettro semplice, discreto e non vuoto:

1. la relazione (2.6) per $\widehat{a}_0^\dagger |\mu\rangle$ (e l'analoga per $\widehat{a}_0 |\mu\rangle$), fondamentale nel procedimento di costruzione iterativa della base canonica, in realtà *pre-scinde dalla forma esplicita dell'operatore numero* (2.2), ma discende solo dalle relazioni (2.3).

Dalla prima di esse discende, infatti, che se $|\lambda\rangle$ è un autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ di autovalore λ , allora:

$$\widehat{\mathcal{N}} \widehat{a}_0^\dagger |\lambda\rangle = (\widehat{a}_0^\dagger \widehat{\mathcal{N}} + \widehat{a}_0^\dagger) |\lambda\rangle = (\lambda + 1) \widehat{a}_0^\dagger |\lambda\rangle \quad (2.14)$$

2.1 Algebra di oscillatore armonico bosonico

cosicché $\widehat{a}_0^\dagger |\lambda\rangle$ è autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ di autovalore $\lambda + 1$.

Analogamente $\widehat{a}_0 |\lambda\rangle$ è autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ di autovalore $(\lambda - 1)$.

Iterando queste relazioni si costruisce il sistema di autovettori di $\widehat{\mathcal{N}}$:

$$|\lambda\rangle_n \equiv \begin{cases} (\widehat{a}_0^\dagger)^n |\lambda\rangle & n > 0 \\ (\widehat{a}_0)^n |\lambda\rangle & n < 0 \end{cases}$$

base dello spazio di Fock supporto di una rappresentazione irriducibile dell'algebra.

- per quanto riguarda, invece, la relazione (2.1), procedendo con le nostre considerazioni vediamo che essa è **responsabile della norma** dei vettori $|n\rangle$, poiché interviene nella valutazione delle quantità $\widehat{a}_0(\widehat{a}_0^\dagger)^n$ che compaiono nelle formule:

$$\langle n | n \rangle = \langle 0 | (\widehat{a}_0)^n (\widehat{a}_0^\dagger)^n | 0 \rangle \quad (2.15)$$

In conseguenza di ciò potrebbe accadere che, sostituendo la (2.1) con una diversa relazione, i relativi nuovi operatori di creazione e distruzione che, a differenza di quelli armonici, risultino limitati (si vedano le algebre del paragrafo 2.3).

Come primo passo verso le generalizzazioni dell'algebra di Heisenberg-Weyl, possiamo provare a rinunciare al vincolo rappresentato dalla (2.2). Consideriamo perciò la seguente formulazione dell'algebra di Heisenberg, comunemente detta *algebra bosonica estesa* e indicata col simbolo \mathcal{H}_4 , generata dai quattro elementi indipendenti $(\mathbf{1}, \widehat{a}_0, \widehat{a}_0^\dagger, \widehat{\mathcal{N}})$:

$$\widehat{a}_0 \widehat{a}_0^\dagger - \widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0 = \mathbf{1} \quad (2.16)$$

$$[\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{a}_0^\dagger] = \widehat{a}_0^\dagger \quad (2.17)$$

$$[\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{a}_0] = -\widehat{a}_0$$

con tutti gli altri commutatori che si annullano, e senza ulteriori vincoli tra gli operatori.

Proviamo a vedere di quanto cambia la costruzione delle rappresentazioni.

Innanzitutto notiamo che le (2.17) implicano che, anche se adesso sono due operatori differenti, $\widehat{\mathcal{N}}$ e $\widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0$ devono commutare:

$$[\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0] = 0 = [\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{a}_0 \widehat{a}_0^\dagger] \quad (2.18)$$

Consideriamo dapprima l'operatore $\widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0$: la costruzione delle autofunzioni e dei relativi autovalori è *la stessa che nel caso precedente*:

$$\begin{aligned} |n\rangle &= (\widehat{a}_0^\dagger)^n |0\rangle \\ \widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0 |n\rangle &= n |n\rangle \end{aligned}$$

Resta da determinare, però, l'azione del nuovo operatore $\widehat{\mathcal{N}}$: per la (2.18), esso commuta con $\widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0$ e quindi ammette lo stesso sistema di autovettori. La valutazione del commutatore sul vuoto:

$$0 = [\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0] |0\rangle = (\widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0) \widehat{\mathcal{N}} |0\rangle$$

permette solo le due possibilità:

- $\widehat{\mathcal{N}} |0\rangle = 0$;
- $\widehat{\mathcal{N}} |0\rangle = \alpha |0\rangle (\alpha \neq 0)$

Nel primo caso il vuoto è autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ di autovalore 0, e per la (2.14) risulta anche:

$$\widehat{\mathcal{N}} |n\rangle = n |n\rangle$$

Coincidendo i due operatori sulla base, abbiamo ottenuto una rappresentazione degenera in cui $\widehat{\mathcal{N}} \equiv \widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0$, che restituisce anche per l'algebra estesa, la rappresentazione di Fock già vista per la formulazione classica dell'algebra di Heisenberg-Weyl.

Considerando invece il caso (2.1), si ha una famiglia di rappresentazioni, parametrizzate dal valore di $\alpha \in \mathbb{R}$, dove $\widehat{\mathcal{N}}$ ha la seguente azione sulla base:

$$\widehat{\mathcal{N}} |n\rangle = (n + \alpha) |n\rangle$$

A questo proposito è facile verificare che l'elemento:

$$C = \widehat{\mathcal{N}} - \widehat{a}_0^\dagger \widehat{a}_0$$

commuta con tutti gli elementi dell'algebra ed è quindi un *operatore di Casimir*⁴.

⁴Un altro operatore di Casimir è dato da $e^{2\pi i \widehat{\mathcal{N}}}$.

2.1 Algebra di oscillatore armonico bosonico

In ogni rappresentazione irriducibile esso è un multiplo dell'identità, e il suo valore caratterizza la rappresentazione.

Ed infatti è immediato verificare che:

$$C|\phi\rangle = \alpha|\phi\rangle \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$$

dove α è lo stesso della (2.1).

Il valore $\alpha = 0$ individua la rappresentazione di Fock.

Abbiamo quindi scoperto che l'algebra bosonica estesa non è poi così diversa da quella classica. Ma questo era da aspettarsi poiché non abbiamo modificato il commutatore di \hat{a}_0 e \hat{a}_0^\dagger . Il prossimo passo sarà allora quello di sostituire la (2.1) con una relazione del tipo:

$$\widehat{a\hat{a}^\dagger} - \widehat{a^\dagger\hat{a}} = f(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{\mathcal{N}}) \quad (2.19)$$

Questo è ciò che faremo a partire dal prossimo paragrafo.

Osservazione 1 Si noti che con la soppressione della (2.2), viene meno la positività dell'operatore numero, che pertanto potrà ammettere autovalori negativi anche arbitrariamente grandi.

Ne consegue che la generazione di autovettori a partire da un vettore ciclico $|\mu\rangle$ col procedimento descritto potrebbe essere illimitata anche inferiormente, cioè per applicazione successiva dell'operatore di distruzione su $|\mu\rangle$.

Si vengono così a prospettare tre classi di rappresentazioni possibili:

1. **rappresentazioni di Fock:** lo spettro di $\widehat{\mathcal{N}}$ è non negativo, limitato inferiormente dall'autovalore zero, in corrispondenza allo stato di vuoto $|0\rangle$. Lo spazio di Hilbert è generato dal sistema di vettori $\{|\mathbf{n}\rangle\}_{n=0}^\infty$;
2. **rappresentazioni di tipo pseudo-Fock:** lo spettro di $\widehat{\mathcal{N}}$ è ancora inferiormente limitato, ma il minimo autovalore può essere un qualsiasi reale, anche negativo. Lo spazio di Hilbert è generato dal sistema di vettori $\{|\mathbf{n}\rangle\}_{n=0}^\infty$;
3. **rappresentazioni non di Fock:** lo spettro di $\widehat{\mathcal{N}}$ non è inferiormente limitato. Lo spazio di Hilbert è generato dal sistema di vettori $\{|\mathbf{n}\rangle\}_{n=-\infty}^\infty$.

Per mantenere quanto più possibile l'analogia con l'algebra di Heisenberg (e con la meccanica quantistica classica), nel seguito saremo interessati solo alle rappresentazioni di tipo Fock.

Nel seguito vedremo che, nel caso di algebre con rappresentazioni di tipo pseudo-Fock, esistono degli automorfismi che permettono di ridefinire l'operatore numero in modo che lo stato di vuoto corrisponda all'autovalore zero, e quindi *permettono di ricondursi ad un rappresentazione di Fock*.

Osservazione 2 In generale, i nuovi operatori \widehat{a} e \widehat{a}^\dagger generatori dell'algebra potrebbero non essere piú mutuamente aggiunti, e quindi, a rigore, andrebbero indicati con una notazione diversa (per esempio nella (2.19) avremmo dovuto scrivere $[\widehat{a}, \widehat{b}] = f(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{\mathcal{N}})$). Il fatto che continueremo ad indicarli con \widehat{a} e \widehat{a}^\dagger presuppone che le strutture algebriche che prenderemo in esame saranno tali che \widehat{a} e \widehat{a}^\dagger , definiti su un opportuno dominio, risulteranno ancora mutuamente aggiunti.

2.2 Il prototipo di algebra bosonica q -deformata: l'oscillatore di Biedenharn

Nel 1989 Biedenharn [?] introdusse l'algebra generata dai tre elementi $(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{\mathcal{N}})$ tali che :

$$\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - q^{1/2}\widehat{a}^\dagger\widehat{a} = q^{-\widehat{\mathcal{N}}/2} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{a}^\dagger] &= \widehat{a}^\dagger \\ [\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{a}] &= -\widehat{a} \end{aligned} \quad (2.20b)$$

mediante la quale è possibile ottenere la quantum algebra $\mathfrak{su}_q(2)$, con una costruzione analoga a quella di Jordan-Schwinger dei momenti angolari. Analizziamo subito alcune proprietà delle (2.20):

1. essa è una deformazione ad un parametro dell'algebra bosonica classica, la quale si riottiene per $q = 1$;
2. l'esponenziale a secondo membro delle (2.20a) è definito dallo sviluppo in serie di potenze:

$$q^{-\widehat{\mathcal{N}}/2} = e^{-\kappa\widehat{\mathcal{N}}/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-\kappa\widehat{\mathcal{N}}}{2} \right)^n \quad (\kappa = \ln q)$$

L'algebra (2.20), è quindi un'algebra associativa, deformazione dell'*algebra universale di ricoprimento* (UEA) di \mathcal{H}_4 (vedi appendice A.2). A rigore viene pertanto indicata con $U_q(\mathcal{H}_4)$;

2.2 L'oscillatore di Biedenharn

3. in linea di principio potremmo considerare $q \in \mathbb{C}$; ma noi ci limiteremo a considerare $q \in \mathbb{R}^+$ perché in questo caso⁵ l'algebra è invariante per l'involuzione:

$$\begin{aligned}(\widehat{a})^* &= \widehat{a}^\dagger \\ \widehat{\mathcal{N}}^* &= \widehat{\mathcal{N}}\end{aligned}$$

che ci permette di considerare $\widehat{\mathcal{N}}$ autoaggiunto, ed \widehat{a} e \widehat{a}^\dagger mutuamente aggiunti. A sua volta questo permette di introdurre un prodotto che sia definito positivo, e quindi di generare uno spazio di Hilbert;

4. l'algebra è invariante per i seguenti automorfismi:

$$\begin{aligned}\text{trasformazioni } U(1): & \quad \begin{cases} \widehat{a} \rightarrow e^{i\theta}\widehat{a} \\ \widehat{a}^\dagger \rightarrow e^{-i\theta}\widehat{a}^\dagger \end{cases} \\ \\ \text{dilatazione } (\alpha \in \mathbb{R}): & \quad \begin{cases} \widehat{a} \rightarrow q^{\frac{\alpha}{4}}\widehat{a} \\ \widehat{a}^\dagger \rightarrow q^{\frac{\alpha}{4}}\widehat{a}^\dagger \\ \widehat{\mathcal{N}} \rightarrow \widehat{\mathcal{N}} - \alpha \end{cases} \quad (2.21)\end{aligned}$$

In particolare, quest'ultimo automorfismo permette di riorganizzare gli autovalori di $\widehat{\mathcal{N}}$, nel senso indicato nell'osservazione a pag.25 alla fine del paragrafo precedente, in modo che dalle rappresentazioni di tipo pseudo-Fock ci si riconduca alla rappresentazione di Fock;

5. in letteratura l'algebra di Biedenharn viene molto spesso riportata con la (2.20a) nella forma:

$$\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - q\widehat{a}^\dagger\widehat{a} = q^{-\widehat{\mathcal{N}}}$$

che si ottiene con la sostituzione $q^{1/2} \rightarrow q$. Tutti le proprietà dell'algebra rimangono invariate, ed i risultati che troveremo sono ancora applicabili con solo una lieve modificazione di alcune formule.

6. è stato mostrato in [?] (Man'ko, Marmo, Solimeno, Zaccaria, 1993) che l'oscillatore di Biedenharn può essere interpretato come un oscillatore anarmonico. Il motivo di ciò risulterà chiaro nel Capitolo 4.

⁵Non prendiamo in considerazione il caso di q reale negativo che equivale all'introduzione dell'unità immaginaria nella relazione (2.20a).

Per quanto detto in precedenza, le (2.20b) ci permettono di costruire algebricamente delle rappresentazioni dell'algebra, che non necessariamente sono di tipo Fock.

Possiamo però anticipare che la rappresentazione di Fock esiste, e andremo a costruirla nel prossimo paragrafo.

Rimandiamo al seguito la ricerca e la classificazione di tutte le altre rappresentazioni.

2.2.1 Costruzione della rappresentazione di Fock nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

In questo caso assumiamo l'esistenza dello stato di vuoto $|0\rangle$, annichilito dall'operatore \hat{a} , e autovettore di $\hat{\mathcal{N}}$ di autovalore zero. A partire dal vuoto si costruisce la base $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ costituita dai vettori:

$$|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

Iterando la (2.20a) è facile verificare che:

$$\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n = \sum_{k=0}^{n-1} q^{k/2} (\hat{a}^\dagger)^k q^{-\hat{\mathcal{N}}/2} (\hat{a}^\dagger)^{n-k-1} + q^{n/2} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a} \quad (2.22)$$

Questa relazione ci dà l'azione di \hat{a} sui vettori della base:

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} q^{k/2} (\hat{a}^\dagger)^k q^{-\hat{\mathcal{N}}/2} (\hat{a}^\dagger)^{n-k-1} |0\rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} q^{k/2} (\hat{a}^\dagger)^k q^{-\frac{n-k-1}{2}} (\hat{a}^\dagger)^{n-k-1} |0\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} q^{\frac{k-(n-k-1)}{2}} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} |0\rangle = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} q^{\frac{2k-(n-1)}{2}} \right) (\hat{a}^\dagger)^{n-1} |0\rangle = [[n]]_q |n-1\rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\hat{\mathcal{N}}$, sui vettori di base, è un operatore di moltiplicazione.

I q -numeri $[[n]]_q$ sono definiti dalla relazione:

$$[[n]]_q \equiv \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = \frac{\sinh\left(\frac{\kappa n}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\kappa}{2}\right)} \quad (\kappa = \ln q)$$

2.2 L'oscillatore di Biedenharn

1) invarianza per lo scambio $q \rightarrow q^{-1}$:	$[[n]]_q = [[n]]_{1/q}$
2) crescita monotona:	$[[n+1]]_q > [[n]]_q$
3) Limite classico per $q \rightarrow 1$:	$\lim_{q \rightarrow 1} [[n]]_q = n$
4) Due relazioni algebriche:	$[[n+1]]_q - q^{1/2}[[n]]_q = q^{-\frac{n}{2}}$ $[[n+1]]_q - q^{-1/2}[[n]]_q = q^{\frac{n}{2}}$

Tabella 2.1: Alcune proprietà dei *quantum numbers* $[[n]]_q$.

e sono pari alla somma della serie finita nel penultimo membro della (2.23). Essi vengono detti anche *quantum numbers* oppure *basic numbers*.

In figura 2.1 è mostrato l'andamento di alcuni q -numeri al variare del parametro q , mentre in figura 2.2 è evidenziato l'andamento degli stessi in prossimità dello zero.

In tabella 2.1 sono riportate alcune delle loro proprietà.

Utilizzando la (2.22) si ottiene la norma (quadra) dei vettori di base:

$$\langle n | n \rangle = \langle 0 | (\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n | 0 \rangle = [[n]]_q!$$

dove il fattoriale è, come sempre, definito da:

$$[[n]]_q! \equiv \prod_{k=1}^n [[k]]_q (n > 0), \quad [[0]]_q! \equiv 1$$

Esso si può esprimere in forma compatta mediante i *q-shifted factorial* (vedi Appendice A.4.2) nella forma:

$$[[n]]_q! = \frac{q^{-\frac{1}{2}\binom{n}{2}}}{(1-q)^n} (q; q)_n \quad (2.24)$$

Nota la norma, introduciamo la base canonica:

$$|\mathbf{n}\rangle \equiv \frac{|n\rangle}{\sqrt{[[n]]_q!}}$$

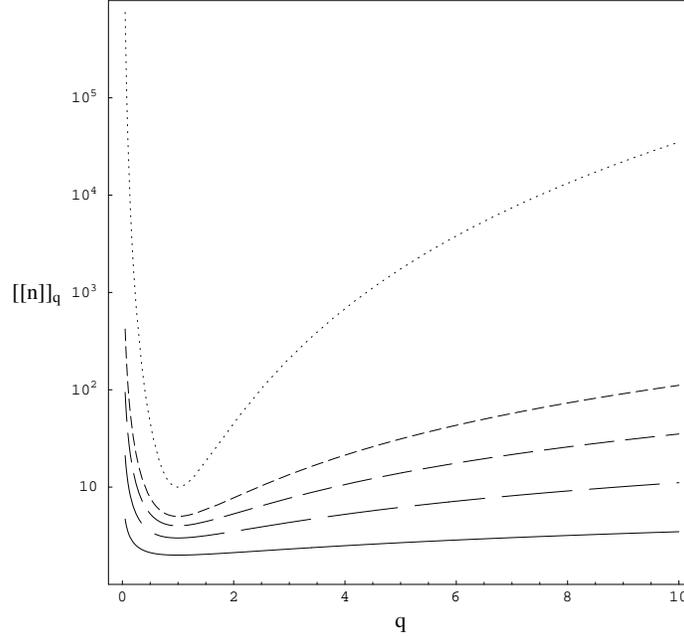


Figura 2.1: Andamento degli $[[n]]_q$ ($n = 2, 3, 4, 5, 10$) per $q \in [0.05, 10]$.

sulla quale gli operatori \hat{a} e \hat{a}^\dagger agiscono come:

$$\begin{aligned}\hat{a} | \underline{n} \rangle &= \frac{\hat{a} | n \rangle}{\sqrt{[[n]]_q!}} = \frac{[[n]]_q | n-1 \rangle}{\sqrt{[[n]]_q!}} = \sqrt{[[n]]_q} | \underline{n-1} \rangle \\ \hat{a}^\dagger | \underline{n} \rangle &= \frac{\hat{a}^\dagger | n \rangle}{\sqrt{[[n]]_q!}} = \frac{| n+1 \rangle}{\sqrt{[[n]]_q!}} = \sqrt{[[n+1]]_q} | \underline{n+1} \rangle\end{aligned}$$

Proprio come i loro analoghi classici, anche gli operatori bosonici q -deformati sono non limitati.

Sullo spazio di Hilbert:

$$\mathcal{H} = \left\{ | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n | \underline{n} \rangle : \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right\}$$

2.2 L'oscillatore di Biedenharn

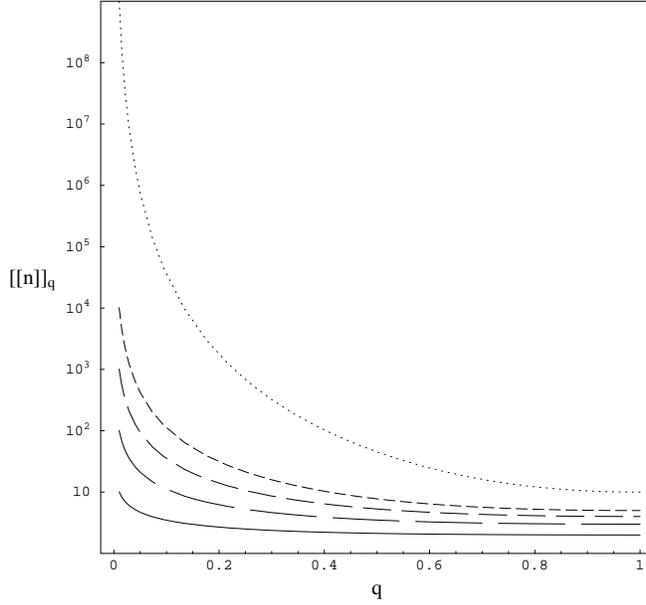


Figura 2.2: Andamento degli $[[n]]_q$ ($n = 2, 3, 4, 5, 10$) in prossimità dello zero ($q \in [0.01, 1]$).

i rispettivi domini sono individuati da una delle ulteriori condizioni :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 [[n]]_q < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 [[n+1]]_q < \infty$$

In virtù della proprietà 4 (Tabella 2.1) le due somme sono entrambe o finite o infinite:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 [[n+1]]_q &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (q^{-n/2} + q^{1/2} [[n]]_q) = \\ &= \text{cost.} + q^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 [[n]]_q \end{aligned}$$

per cui individuano lo stesso dominio che d'ora in poi sarà denotato con \mathcal{D}_M .

Per comodità, in tabella 2.2 riportiamo l'azione sulla base canonica dei principali operatori della rappresentazione.

Osservazione: Tutta la costruzione fin qui fatta, risulta, a posteriori, invariante per lo scambio $q \rightarrow q^{-1}$. Bisogna però riconoscere che questa non è una proprietà dell'algebra così come definita dalle (2.20)

In effetti questa particolarità discende dalla proprietà 1, tabella 2.1, dei quantum numbers che sono apparsi nella costruzione della rappresentazione, ma nel prossimo paragrafo, trattando le diverse rappresentazioni dell'algebra di Biedenharn, vedremo che questa invarianza è una proprietà caratteristica della sola rappresentazione di Fock.

<p>Azione dei principali operatori sulla base canonica:</p> $\widehat{a} \underline{n} \rangle = \sqrt{[[n]]_q} \underline{n-1} \rangle$ $\widehat{a}^\dagger \underline{n} \rangle = \sqrt{[[n+1]]_q} \underline{n+1} \rangle$ $\widehat{\mathcal{N}} \underline{n} \rangle = n \underline{n} \rangle$ $\widehat{a}\widehat{a}^\dagger \underline{n} \rangle = [[n+1]]_q \underline{n} \rangle$ $\widehat{a}^\dagger\widehat{a} \underline{n} \rangle = [[n]]_q \underline{n} \rangle$

Tabella 2.2: Rappresentazione di Fock dell'algebra di Biedenharn.

2.2.2 Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

Per l'algebra di Biedenharn sono possibili rappresentazioni di tutte le classi prospettate in precedenza (*Osservazione 1*, pag. 25).

La loro classificazione [?] si basa sulla caratterizzazione degli autovalori dell'operatore positivo $\widehat{a}^\dagger\widehat{a}$, che a sua volta, come sappiamo dalla (2.18), commuta con $\widehat{a}\widehat{a}^\dagger$ e con $\widehat{\mathcal{N}}$.

E' utile inoltre servirsi dei due operatori di Casimir:

$$\widehat{C} = q^{-\widehat{\mathcal{N}}/2} ([[\widehat{\mathcal{N}}]]_q - \widehat{a}^\dagger\widehat{a}), \quad \widehat{C}_e = e^{2\pi i \widehat{\mathcal{N}}}$$

e dell'operatore [?] (si noti il segno dell'esponente di q):

$$\widehat{K} = \widehat{a}\widehat{a}^\dagger - q^{-1/2}\widehat{a}^\dagger\widehat{a}$$

2.2 L'oscillatore di Biedenharn

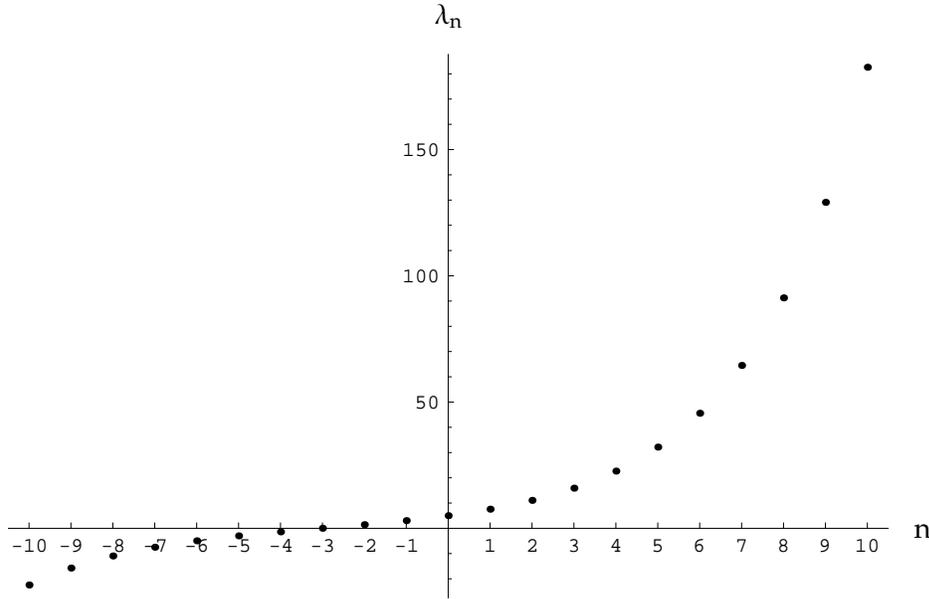


Figura 2.3: Andamento degli autovalori λ_n per $q = 2$, $\lambda_0 = 5$, $\mu_0 = 2$.

poiché vedremo che assume un'azione caratteristica.

Le possibili rappresentazioni dell'algebra si costruiscono a partire da un vettore ciclico che sia autovettore comune di $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$, $\widehat{a} \widehat{a}^\dagger$ e $\widehat{\mathcal{N}}$.

Si può dimostrare inoltre che gli autovalori di $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ devono essere del tipo:

$$\lambda_n = q^{n/2} \lambda_0 + q^{-(\mu_0)/2} [[n]]_q \quad (2.25)$$

dove λ_0 e μ_0 sono due parametri per ora arbitrari. I λ_n sono sempre positivi per indici $n > 0$. Per indici negativi bisogna invece distinguere⁶ da caso a caso.

- Per $q > 1$ l'andamento dei λ_n è del tipo mostrato in figura 2.3. Per quanto visto a proposito dell'algebra \mathcal{H}_4 , ciò comporta l'esistenza di uno stato di vuoto $|0\rangle$ tale che:

$$\widehat{a}|0\rangle = 0$$

a partire dal quale si costruisce la base canonica ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$|\underline{n}\rangle = \left[q^{-\frac{(n\mu_0)}{2}} [[n]]_q! \right]^{-1/2} (\widehat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

⁶Come anticipato alla fine del paragrafo precedente, l'invarianza $q \leftrightarrow q^{-1}$ è una caratteristica dei q -numeri che compaiono in quella rappresentazione, ma non è una prerogativa dell'algebra di Biedenharn definita dalle (2.20)

(la quantità in parentesi quadre è un fattore di normalizzazione) sulla quale l'azione dei generatori dell'algebra è:

$$\begin{aligned}\widehat{a}|\underline{n}\rangle &= (q^{-\mu_0/2}[[n]]_q)^{1/2} |\underline{n}-1\rangle \\ \widehat{a}^\dagger|\underline{n}\rangle &= (q^{-\mu_0/2}[[n+1]]_q)^{1/2} |\underline{n}+1\rangle \\ \widehat{\mathcal{N}}|\underline{n}\rangle &= (\mu_0 + n) |\underline{n}\rangle\end{aligned}\tag{2.26}$$

Lo spettro di $\widehat{\mathcal{N}}$ risulta limitato inferiormente dal valore μ_0 .

I parametri λ_0 e μ_0 sono in questo caso legati dalla relazione $\lambda_0 = q^{-\frac{(\mu_0+r)}{2}}[[r]]_q$, dove r è un intero fissato.

Esiste così **una famiglia ad un parametro** $\Pi_{\mu_0}(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{\mathcal{N}})$ di **rappresentazioni di tipo pseudo-Fock** dell'algebra di Biedenharn, unicamente individuate dal valore μ_0 .

Ridefinendo gli operatori mediante la dilatazione (2.21) di pag. 27, con $\alpha = \mu_0$, ci si può sempre ricondurre a rappresentazioni di Fock.

In ogni rappresentazione l'operatore di Casimir \widehat{C} assume il valore:

$$\widehat{C} = q^{-\mu_0/2}[[\mu_0]]_q$$

che identifica univocamente la rappresentazione.

L'azione dell'operatore \widehat{K} è:

$$\widehat{K}|\underline{n}\rangle = q^{n/2} |\underline{n}\rangle$$

(indipendentemente dal valore di μ_0) e pertanto in ogni rappresentazione risulta sempre positiva.

Sostituendo l'azione (2.26) degli operatori nella (2.20a), si verifica che **solo nella rappresentazione di Fock** ($\mu_0 = 0$) è verificata l'ulteriore relazione:

$$q^{\widehat{\mathcal{N}}/2} = \widehat{K} = \widehat{a}\widehat{a}^\dagger - q^{-1/2}\widehat{a}^\dagger\widehat{a}$$

che indica l'invarianza $q \leftrightarrow q^{-1}$ (confronta con la proprietà 1 a pag. 29 e con l'osservazione a pag. 32) che come già anticipato non è una caratteristica dell'algebra di Biedenharn, ma solo una peculiarità di una delle sue possibili rappresentazioni.

Nel limite di $q \rightarrow 1$ queste rappresentazioni si riducono a quelle dell'algebra bosonica estesa \mathcal{H}_4 .

- per $0 < q < 1$ possiamo porre la (2.25) nella forma:

$$\lambda_n = q^{n/2} \left[\lambda_0 - q^{-\frac{\mu_0+1}{2}} \frac{1 - q^{-n}}{q^{-1} - 1} \right]\tag{2.27}$$

2.2 L'oscillatore di Biedenharn

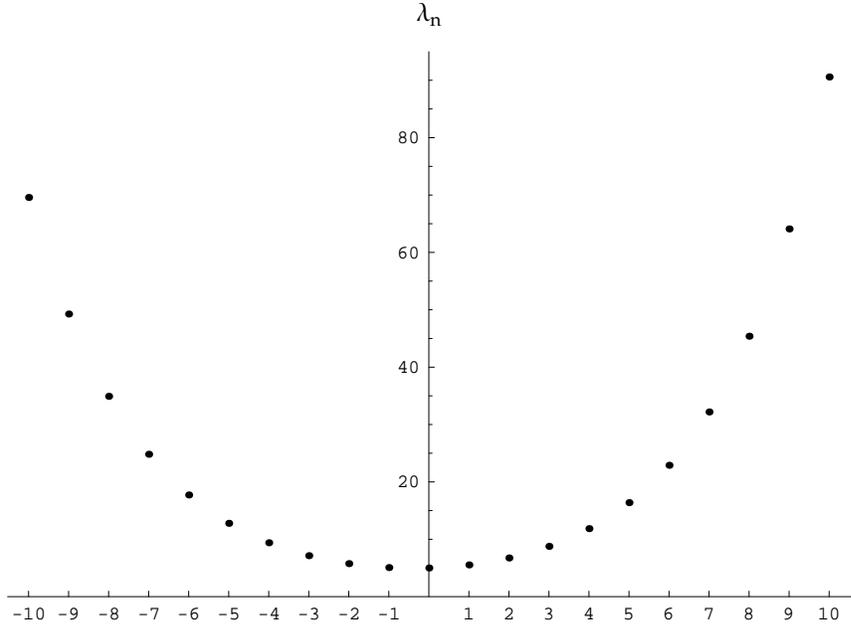


Figura 2.4: Andamento degli autovalori λ_n per $q = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = 5$, $\mu_0 = 2$.

dove abbiamo riscritto in modo che il sottraendo nella parentesi quadra sia una quantità positiva.

L'andamento degli autovalori λ_n per $n < 0$ dipende allora dal segno della parentesi quadra.

Possiamo allora distinguere le tre possibilità:

1. $\lambda_0 < \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$ In questo caso:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = -\infty$$

e quindi siamo in una situazione analoga a quella già descritta per $q > 1$. Esiste così **una famiglia di rappresentazioni pseudo-Fock**, parametrizzate dal minimo autovalore $\tilde{\mu}_0$ dell'operatore numero, e riconducibili alla rappresentazione di Fock per un'opportuna ridefinizione degli operatori.

2. $\lambda_0 > \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$ l'andamento dei λ_n in questo caso è mostrato in figura 2.4. Indicando con $|0\rangle$ il vettore di autovalore minimo,

e con $\lambda_0 (\neq 0)$ il corrispondente autovalore, si costruisce la base canonica ($n \in \mathbb{Z}$):

$$|\underline{n}\rangle = \begin{cases} M_n^{1/2} (\widehat{a}^\dagger)^n |0\rangle & n > 0 \\ M_n^{1/2} (\widehat{a})^n |0\rangle & n < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

dove M_n sono opportuni fattori di normalizzazione (cfr. eq. (A.26), Appendice A.3).

Stavolta λ_0 e μ_0 sono parametri indipendenti, con il solo vincolo che λ_0 appartenga all'intervallo individuato da:

$$0 < q^{1/2} \frac{q^{-\mu_0/2}}{1 - q^{1/2}} < \lambda_0 < \frac{q^{-\mu_0/2}}{1 - q^{1/2}} \quad (2.29)$$

Sulla base canonica l'azione dei generatori si riscrive:

$$\begin{aligned} \widehat{a} |\underline{n}\rangle &= \lambda_n^{1/2} |n-1\rangle \\ \widehat{a}^\dagger |\underline{n}\rangle &= \lambda_{n+1}^{1/2} |n+1\rangle \\ \widehat{\mathcal{N}} |\underline{n}\rangle &= (\mu_0 + n) |\underline{n}\rangle \end{aligned}$$

Si noti che lo spettro di $\widehat{\mathcal{N}}$ non è inferiormente limitato poiché $n \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo così trovato **una famiglia a due parametri** $\Pi_{\mu_0, \lambda_0}(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{\mathcal{N}})$ **di rappresentazioni non di tipo Fock** dell'algebra di Biedenharn.

Il casimir \widehat{C} assume, in ogni rappresentazione, il valore caratteristico:

$$\widehat{C} = q^{-\mu_0/2} ([[\mu_0]]_q - \lambda_0)$$

Per l'operatore \widehat{K} è possibile dimostrare, tenendo conto del vincolo (2.29), che in ogni rappresentazione assume valori negativi.

Tutte queste rappresentazioni sono singolari nel limite di $q \rightarrow 1$. A riprova di ciò basti verificare che in questo limite, la (2.29) impone:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \lambda_0 = \infty$$

3. $\lambda_0 = \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$ In questo caso la (2.27) si può riscrivere:

$$\lambda_n = q^{-n/2} \frac{q^{-(\mu_0+1)/2}}{q^{-1} - 1} \quad (2.30)$$

2.2 L'oscillatore di Biedenharn

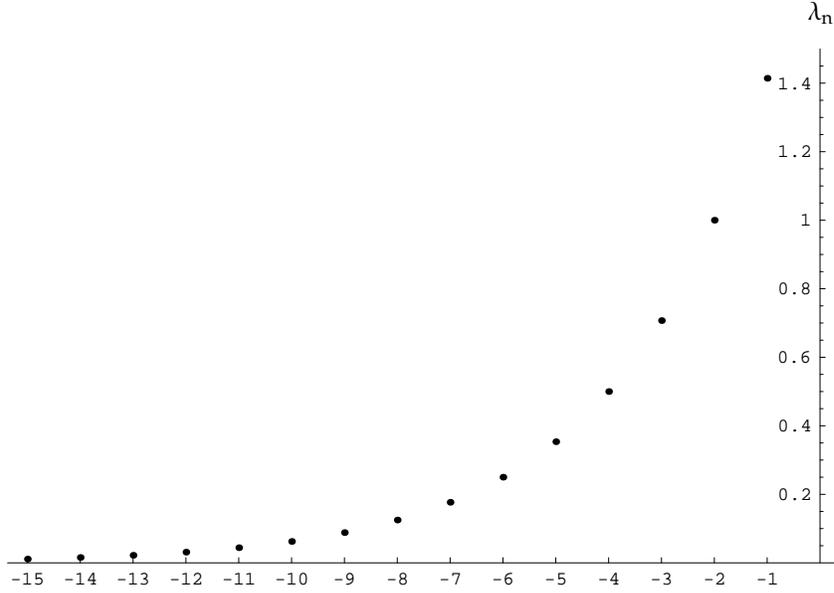


Figura 2.5: Andamento degli autovalori λ_n per $q = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = 2$, $\mu_0 = 1$.

e l'andamento degli autovalori è mostrato in figura 2.5. A partire da un qualsiasi autovettore che è possibile denotare con $|0\rangle$ si genera la stessa base (2.28) come nel caso precedente.

I due parametri sono però vincolati dalla condizione $\lambda_0 = \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$, per cui l'azione dei generatori è:

$$\begin{aligned}\widehat{a}|\underline{n}\rangle &= \lambda_n^{1/2}|\underline{n}-1\rangle \\ \widehat{a}^\dagger|\underline{n}\rangle &= \lambda_{n+1}^{1/2}|\underline{n}+1\rangle \\ \widehat{\mathcal{N}}|\underline{n}\rangle &= (\mu_0 + n)|\underline{n}\rangle\end{aligned}$$

Le rappresentazioni sono individuate dal solo parametro libero $\mu_0 \in [0, 1)$, poiché rappresentazioni con μ'_0 tale che $\mu'_0 = \mu_0 + n$, ($n \in \mathbb{Z}$) sono equivalenti tramite una rinumerazione dei vettori di base.

Abbiamo così **una famiglia ad un parametro** $\Pi_{\mu_0}(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{\mathcal{N}})$ **di rappresentazioni di tipo non Fock**.

Queste rappresentazioni sono propriamente individuate dal valore

del Casimir:

$$\widehat{C}_e = e^{2\pi i \widehat{N}} = e^{2\pi i \mu_0}$$

in quanto l'operatore \widehat{C} , in ogni rappresentazione, vale:

$$\widehat{C} = (q^{1/2} - q^{-1/2})^{-1}$$

Dalla (2.30) per $n = 0$ discende la relazione:

$$\widehat{a} \widehat{a}^\dagger - q^{-1/2} \widehat{a}^\dagger \widehat{a} = 0 \tag{2.31}$$

il che vuol dire che, in questo caso, l'operatore \widehat{K} si annulla identicamente.

Queste relazioni sono singolari nel limite $q \rightarrow 1$, e lo dimostra il fatto evidente che, in questo limite, la (2.31) contrasta con la (2.20a).

Riepilogando abbiamo scoperto che per ogni valore di $q \in \mathbb{R}^+$ **esistono rappresentazioni di tipo pseudo-Fock**, riconducibili a rappresentazioni di Fock con una trasformazione di dilatazione opportuna. Tutte queste, nel limite classico ($q \rightarrow 1$) restituiscono rappresentazioni dell'algebra dell'oscillatore armonico.

In più, per $0 < q < 1$, **esistono anche rappresentazioni non di tipo Fock**, che diventano singolari nel limite classico.

2.3 Altri tipi di oscillatori q -deformati

Quella di Biedenharn non è stata la prima versione deformata dell'algebra bosonica classica a comparire in letteratura: altre deformazioni degli operatori bosonici erano già state introdotte in [?, ?, ?, ?, ?] riguardanti i più disparati ambiti della fisica.

Ma il lavoro di Biedenharn e quello contemporaneo di Macfarlane [?], hanno avuto, tra gli altri meriti, quello di mostrare, per la prima volta, il profondo legame esistente tra oscillatori deformati e quantum group.

Questo ha fatto sì che, sull'onda dell'enorme entusiasmo nei confronti dei secondi, un medesimo impulso si riversasse nello studio, fino ad allora sporadico, dei primi. Impulso che per fortuna ancora non accenna a diminuire, come è ampiamente testimoniato dalla letteratura che si produce in materia e degli enormi progressi che continuamente si raggiungono.

La notevole mole di lavoro in questo ambito ha portato anche allo studio delle deformazioni bosoniche “*di per sé*”, e non legate a qualche specifico problema fisico (come nei lavori succitati) o matematico (come in Biedenharn e

2.3 Altri tipi di oscillatori q -deformati

Macfarlane).

Sono così state introdotte tali e tante varianti, per cui si può parlare, attualmente, di un vero e proprio zoo di deformazioni bosoniche, come quelle trattate in [?, ?].

In realtà tutte le q -deformazioni sono essenzialmente riconducibili a tre grandi famiglie fondamentali, cioè a tre diversi approcci alla generalizzazione dell'algebra bosonica classica, in cui la relazione generica (2.19) assume una delle seguenti forme:

- deformazione di tipo I: $\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \xi\widehat{a}^\dagger\widehat{a} = \mathbf{1}$
E' il caso in cui il commutatore nella (2.1) viene sostituito da un *commutatore deformato*;
- deformazione di tipo II: $\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}^\dagger\widehat{a} = \widehat{B}$
In questo caso l'operatore identità della (2.1) viene sostituito da un operatore più generale;
- deformazione di tipo III: $\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \xi\widehat{a}^\dagger\widehat{a} = \widehat{B}$
E' il caso più generale dove si introducono entrambe le generalizzazioni precedenti;

L'algebra di Biedenharn è un esempio di deformazione del terzo tipo. In questo paragrafo presenteremo degli importanti esempi di deformazioni relative anche alle altre famiglie, mostrandone, per i possibili valori del parametro di deformazione, le proprietà dello spazio di Fock, e la classificazione delle rappresentazioni. Un metodo di classificazione molto generale, ma che non comprende tutte le possibili deformazioni, si trova in [?].

In più mostreremo che tutte queste algebre, a dispetto della loro diversità, si trasformano le une nelle altre con una opportuna ridefinizione dei rispettivi operatori di creazione e distruzione, e daremo esplicitamente un procedimento di carattere generale che permette di passare agevolmente dalle une alle altre.

Per motivi di chiarezza, nel seguito impiegheremo una specifica notazione degli operatori per ognuna delle diverse algebre. Inoltre, per alleggerire l'esposizione, nella definizione delle strutture algebriche non riporteremo le (2.20b) la cui validità è implicitamente assunta.

2.3.1 Oscillatore di Arik-Coon-Lam (ACL)

Quest'algebra appare per la prima volta in [?, ?], ed è generata dagli operatori \widehat{A} e \widehat{A}^\dagger che soddisfano :

$$\widehat{A}\widehat{A}^\dagger - q^2\widehat{A}^\dagger\widehat{A} = \mathbf{1} \quad (2.32)$$

iterando la quale si ottiene la relazione:

$$\widehat{A}(\widehat{A}^\dagger)^n = [n]_q(\widehat{A}^\dagger)^{n-1} + q^{2n}(\widehat{A}^\dagger)^n\widehat{A} \quad (2.33)$$

dove $[n]_q$ sono i q -numeri *asimmetrici* definiti da:

$$[n]_q = \sum_{k=0}^{n-1} q^{2k} = \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} \quad (2.34)$$

L'azione di \widehat{A} , sulla base di Fock $|n\rangle$, risulta essere la seguente:

$$\widehat{A}|n\rangle = [n]_q|n-1\rangle \quad (2.35)$$

mentre la norma quadra dei vettori di base è:

$$\langle n | n \rangle = [n]_q! = \frac{(q^2; q^2)_n}{(1 - q^2)^n} \quad (2.36)$$

dove abbiamo ancora fatto uso dei q -shifted factorial (vedi pag. A.4.2).

E' da notare che i basic numbers $[n]_q$, diversamente dai q -numeri simmetrici, non sono invarianti per lo scambio $q \leftrightarrow q^{-1}$, e quindi ci aspettiamo proprietà diverse a seconda che imponiamo a q di essere maggiore o minore di uno.

Nelle figure 2.6 e 2.7 è mostrato l'andamento degli $[n]_q$ rispettivamente per $q > 1$ e $0 < q < 1$.

In particolare, nonostante la successione dei $[n]_q$, *indipendentemente dal valore di q* , sia crescente con n :

$$[n+1]_q > [n]_q \quad \forall q \in \mathbb{R}^+ \quad (2.37)$$

per $q < 1$ accade che essi non crescono indefinitamente, ma approssimano per difetto la somma della serie geometrica di ragione q^2 :

$$[n]_q < \frac{1}{1 - q^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.38)$$

2.3 Altri tipi di oscillatori q -deformati

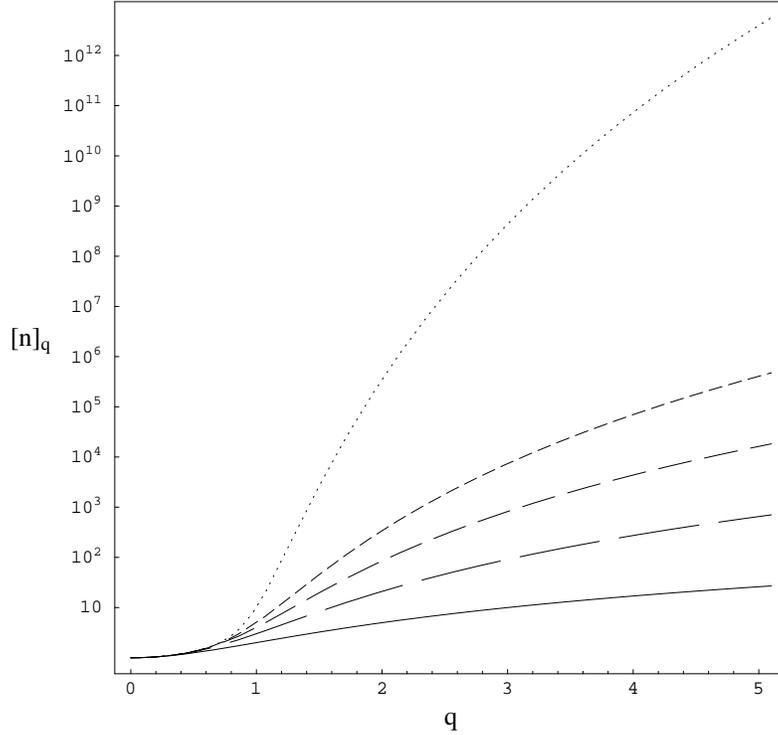


Figura 2.6: Andamento degli $[n]_q$ ($n = 2, 3, 4, 5, 10$) per $q \in [0, 5]$.

Introdotta la base normalizzata $|\underline{n}\rangle = [[n]_q!]^{-1/2}|n\rangle$, su di essi l'azione degli operatori si riscrive:

$$\widehat{A}|\underline{n}\rangle = \sqrt{[n]_q}|\underline{n-1}\rangle \quad (2.39)$$

$$\widehat{A}^\dagger|\underline{n}\rangle = \sqrt{[n+1]_q}|\underline{n+1}\rangle \quad (2.40)$$

Essi ammettono lo stesso dominio massimale \mathcal{D}_M definito in maniera analoga a quanto già visto per l'oscillatore di Biedenharn, e su di esso risultano mutuamente aggiunti.

In più, per la (2.38), essi sono operatori limitati per $q < 1$, di norma:

$$\|\widehat{A}\| = \|\widehat{A}^\dagger\| = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \quad (2.41)$$

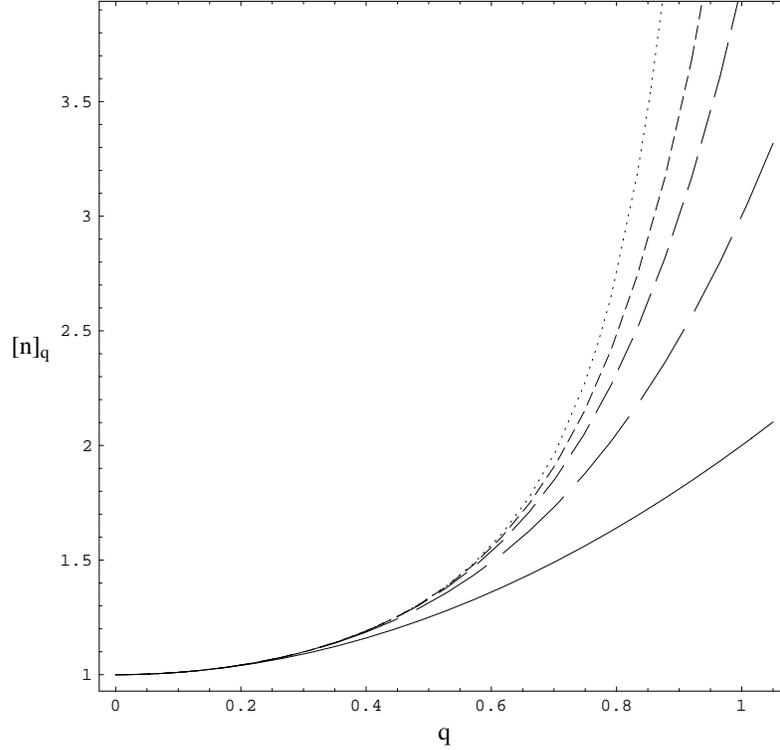


Figura 2.7: Andamento degli $[n]_q$ ($n = 2, 3, 4, 5, 10$) per $q \in [0, 1]$.

(cfr. discussione a pag. 23). In questo caso possono essere estesi per continuità a tutto lo spazio di Hilbert.

Per quanto riguarda la classificazione delle rappresentazioni, i possibili autovalori λ_n dell'operatore $\widehat{A}^\dagger \widehat{A}$ devono essere del tipo ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\lambda_n = q^{2n} \lambda_0 + [n]_q = q^{2n} \left(\lambda_0 + \frac{1}{q^2 - 1} \right) - \frac{1}{q^2 - 1} \quad (2.42)$$

che sono sempre positivi per $n > 0$. Per indici n negativi accade che:

- se è $q > 1$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = -\frac{1}{q^2 - 1} < \infty$$

che corrisponde a rappresentazioni di tipo pseudo-Fock.

2.3 Altri tipi di oscillatori q -deformati

- invece per $0 < q < 1$ risulta:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = \pm\infty$$

concordemente col segno di $\left(\lambda_0 - \frac{1}{1-q^2}\right)$.

Se tale quantità è negativa si ottengono ancora rappresentazioni pseudo-Fock, che quindi sono possibili per ogni valore di $q \in \mathbb{R}^\dagger$. Altrimenti si trovano rappresentazioni di tipo non Fock.

Infine, nel caso in cui $\lambda_0 = \frac{1}{1-q^2}$, si ha la rappresentazione degenera in cui gli operatori $\widehat{A}^\dagger \widehat{A}$ e $\widehat{A} \widehat{A}^\dagger$ coincidono e ammettono l'unico autovalore degenera λ_0 , concordemente con la relazione di commutazione (2.32):

$$\widehat{A} \widehat{A}^\dagger - q^2 \widehat{A}^\dagger \widehat{A} = \frac{1}{1-q^2} (1 - q^2) = \mathbf{1}$$

La rappresentazione, in questo caso, è di tipo non Fock.

2.3.2 Oscillatore di Feinsilver (Fei)

Questi operatori⁷ [?, ?, ?, ?, ?] sono definiti soddisfare la commutazione:

$$[\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}^\dagger] = q^{\widehat{N}} \quad (2.43)$$

Da questa si ricava:

$$\widehat{\alpha}(\widehat{\alpha}^\dagger)^n = \sum_{i=0}^{n-1} (\widehat{\alpha}^\dagger)^i q^{\widehat{N}} (\widehat{\alpha}^\dagger)^{n-1-i} + (\widehat{\alpha}^\dagger)^n \widehat{\alpha} \quad (2.44)$$

Da cui l'azione di $\widehat{\alpha}$ sulla base risulta:

$$\widehat{\alpha}|n\rangle = \widehat{\alpha}(\widehat{\alpha}^\dagger)^n|0\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} (\widehat{\alpha}^\dagger)^i q^{\widehat{N}} (\widehat{\alpha}^\dagger)^{n-1-i}|0\rangle = \quad (2.45)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} q^{n-1-i} (\widehat{\alpha}^\dagger)^{n-i}|0\rangle = q^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} q^{-i}|n-1\rangle = [n]_{q^{1/2}}|n-1\rangle \quad (2.46)$$

dove abbiamo usato il fatto (confronta con la (2.34)) che:

$$q^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} q^{-i} = q^{n-1} [n]_{q^{-1/2}} = q^{n-1} \frac{q^{-n} - 1}{q^{-1} - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = [n]_{q^{1/2}} \quad (2.47)$$

⁷In [?] c'è un refuso: il commutatore corretto tra $\widehat{\alpha}_-$ e $\widehat{\alpha}_+$ è $[\widehat{\alpha}_-, \widehat{\alpha}_+] = q^{\widehat{N}}$.

L'andamento dei q -numeri $[n]_{q^{1/2}}$ è, qualitativamente, quello mostrato nelle figure 2.6 e 2.7 precedenti.

I vettori $|n\rangle$ hanno norma (quadra):

$$\langle n | n \rangle = [n]_{q^{1/2}}! = \frac{(q; q)_n}{(1 - q)^n} \quad (2.48)$$

dove all'ultimo membro abbiamo introdotto i q -shifted factorial (vedi Appendice A.4.2).

Sulla base canonica $|\underline{n}\rangle$ l'azione di $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}^\dagger$ si scrive:

$$\hat{\alpha} |\underline{n}\rangle = \sqrt{[n]_{q^{1/2}}} |\underline{n-1}\rangle \quad (2.49)$$

$$\hat{\alpha}^\dagger |\underline{n}\rangle = \sqrt{[n+1]_{q^{1/2}}} |\underline{n+1}\rangle \quad (2.50)$$

E' chiaro che anche in questo caso, per $q < 1$, gli operatori bosonici sono limitati, in quanto:

$$[n]_{q^{1/2}} < \frac{1}{1 - q}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Risulta così:

$$\|\hat{\alpha}\| = \|\hat{\alpha}^\dagger\| = \frac{1}{\sqrt{1 - q}} \quad (2.51)$$

La classificazione delle rappresentazioni mostra una situazione invertita rispetto al caso precedente, a dispetto del fatto che i quantum numbers che intervengono nell'azione degli operatori siano fondamentalmente gli stessi. Questa è una ulteriore conferma del fatto che l'essenza dell'algebra risiede nelle relazioni definitorie (nel nostro caso la (2.43)) e non nella sua realizzazione esplicita (si confronti con l'osservazione fatta a proposito dell'algebra di Biedenharn, a pag.32).

Gli autovalori λ_n dell'operatore $\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha}$ possono assumere i seguenti valori:

$$\lambda_n = \lambda_0 + q^{\mu_0} [n]_{q^{1/2}} = \lambda_0 + q^{\mu_0} \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (2.52)$$

Gli autovalori sono positivi se n è maggiore di zero; per $n < 0$ dobbiamo distinguere i due casi:

2.3 Altri tipi di oscillatori q -deformati

- Per $q > 1$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = \lambda_0 - \frac{q^{\mu_0}}{q-1} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

Se il limite di cui sopra è maggiore o uguale a zero, la costruzione di autovettori di $\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}$, e di conseguenza di $\widehat{\mathcal{N}}$, non si interrompe mai, portando alla costruzione di rappresentazioni di tipo non Fock.

Al contrario, se tale limite è negativo, la rappresentazione che ne risulta è di tipo pseudo-Fock.

In nessun caso si hanno rappresentazioni degeneri.

- Nel caso di $0 < q < 1$ vale che:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = \lambda_0 - q^{\mu_0} \frac{q^n - 1}{1 - q} = -\infty$$

per cui le rappresentazioni possibili sono di tipo pseudo Fock.

2.3.3 Oscillatore di Coon-Yu-Baker (CYB)

Contemporaneamente alla comparsa dell'algebra di Biedenharn, Macfarlane [?] ne considerò la seguente “variante”:

$$\mu^2 \widehat{b} \widehat{b}^\dagger - \widehat{b}^\dagger \widehat{b} = \mu^2 - 1 \quad (2.53)$$

a sua volta equivalente, a meno della ridefinizione $\mu^{-2} = q$ del parametro di deformazione, all'algebra introdotta nel 1972 da Coon, Yu e Baker [?], e definita da:

$$\widehat{b} \widehat{b}^\dagger - q \widehat{b}^\dagger \widehat{b} = 1 - q \quad (2.54)$$

Questa è ancora una deformazione di tipo III, ma che non rientra nello schema introdotto in [?].

Iterando la (2.54) si perviene alla:

$$\widehat{b} (\widehat{b}^\dagger)^n = \{n\}_q (\widehat{b}^\dagger)^{n-1} + q^n (\widehat{b}^\dagger)^n \widehat{b} \quad (2.55)$$

dove abbiamo introdotto i q -numeri *limitati*:

$$\{n\}_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i (1 - q) = (1 - q^n) \quad (2.56)$$

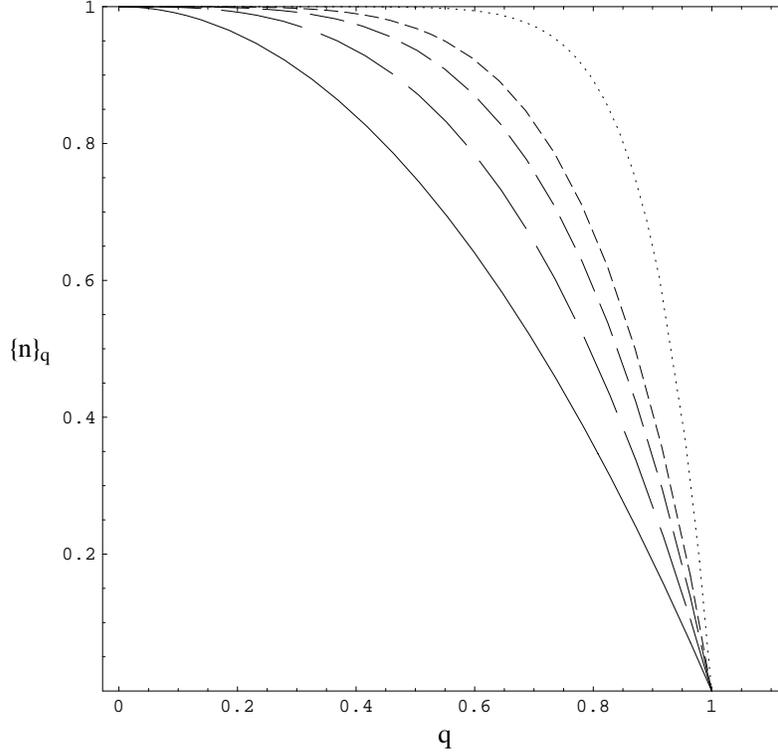


Figura 2.8: Andamento degli $\{n\}_q$ corrispondenti a $n = 2, 3, 4, 5, 10$ per $q \in [0, 1]$.

Si noti che gli $\{n\}_q$ sono negativi per $q > 1$ e quindi per questo nuovo oscillatore è inevitabile la restrizione $0 < q < 1$. Questo è il motivo della definizione “limitati”.

Sulla base non normalizzata l’operatore di distruzione \widehat{b} agisce come:

$$\widehat{b}|n\rangle = \widehat{b}(\widehat{b}^\dagger)^n|0\rangle = \{n\}_q(\widehat{b}^\dagger)^{n-1}|0\rangle = \{n\}_q|n-1\rangle \quad (2.57)$$

mentre le norme quadre dei vettori di base sono date da:

$$\langle n|n\rangle = \{n\}_q! = (q; q)_n \quad (2.58)$$

dove nell’ultimo membro abbiamo ancora una volta fatto uso dei q -shifted

2.4 Caratteristiche comuni degli oscillatori q -deformati e mutue trasformazioni

factorial (Appendice A.4.2).

In figura 2.8 è mostrato l'andamento dei q -numeri $\{n\}_q$, per $n = 2, 3, 4, 5, 10$ al variare di q .

Sulla base canonica risulta infine:

$$\widehat{b}|\underline{n}\rangle = \sqrt{\{n\}_q}|\underline{n}-\underline{1}\rangle \quad (2.59)$$

$$\widehat{b}^\dagger|\underline{n}\rangle = \sqrt{\{n+1\}_q}|\underline{n}+\underline{1}\rangle \quad (2.60)$$

Gli operatori bosonici, a causa della restrizione $0 < q < 1$, sono limitati:

$$\|\widehat{b}\| = \|\widehat{b}^\dagger\| = 1 \quad (2.61)$$

Gli autovalori λ_n di $\widehat{b}^\dagger\widehat{b}$ possono assumere i valori ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\lambda_n = q^n\lambda_0 + (1 - q^n) = q^n(\lambda_0 - 1) + 1 \quad (2.62)$$

che sono sempre positivi per n positivo. Nel limite di $n \rightarrow -\infty$, invece, si vede immediatamente che gli autovalori tendono a più o meno infinito, a seconda che λ_0 sia maggiore o minore di uno.

Nel primo caso si hanno rappresentazioni non di Fock, nel secondo rappresentazioni pseudo Fock.

Infine se $\lambda_0 = 1$, si ha la rappresentazione degenere in cui $\widehat{b}^\dagger\widehat{b} = \widehat{b}\widehat{b}^\dagger$ che ammettono 1 come unico autovalore degenere in accordo con la (2.54).

2.4 Caratteristiche comuni degli oscillatori q -deformati e mutue trasformazioni

Nonostante le notevoli differenze che, come abbiamo appena visto, le varie deformazioni dell'algebra bosonica presentano, tutti questi oscillatori generalizzati, quando rappresentati sullo spazio di Fock, condividono una serie di caratteristiche comuni.

Specificamente, se indichiamo con \mathfrak{F} i differenti tipi di oscillatori deformati, e introduciamo le seguenti notazioni rappresentative⁸:

Operatore di distruzione di tipo \mathfrak{F} :	$\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$
Operatore di creazione di tipo \mathfrak{F} :	$\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^\dagger$
Operatore numero:	$\widehat{\mathcal{N}}$
Quantum number di tipo \mathfrak{F} :	$\mathcal{Q}_{\mathfrak{F}}(n)$
Vettore della base canonica di tipo \mathfrak{F} :	$ \underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}}$

⁸L'operatore numero è lo stesso per ogni tipo di deformazione.

allora, l'azione dei vari operatori è data dalle:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}} &= \mathcal{Q}_{\mathfrak{F}}^{1/2}(n)|\underline{n-1}\rangle_{\mathfrak{F}} \\ \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger}|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}} &= \mathcal{Q}_{\mathfrak{F}}^{1/2}(n+1)|\underline{n+1}\rangle_{\mathfrak{F}} \\ \widehat{\mathcal{N}}|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}} &= n|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}} \\ \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger}|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}} &= \mathcal{Q}_{\mathfrak{F}}(n+1)|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}} \\ \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}} &= \mathcal{Q}_{\mathfrak{F}}(n)|\underline{n}\rangle_{\mathfrak{F}}\end{aligned}$$

dove si vede che l'unica differenza sta nel quantum number caratteristico del tipo di oscillatore cui essi corrispondono.

A partire da queste è possibile verificare altre proprietà algebriche comuni, come le seguenti:

$$\begin{aligned}[\widehat{\mathcal{N}}^K, \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}] &= -(2\widehat{\mathcal{N}} + 1)^{K-1}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}} \\ [\widehat{\mathcal{N}}^K, \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger}] &= (2\widehat{\mathcal{N}} - 1)^{K-1}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger} \\ f(\widehat{\mathcal{N}})\mathcal{A}_{\mathfrak{F}} &= \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}f(\widehat{\mathcal{N}} - 1)\end{aligned}\tag{2.63a}$$

$$f(\widehat{\mathcal{N}})\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger} = \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger}f(\widehat{\mathcal{N}} + 1)\tag{2.63b}$$

dove $K \in \mathbb{N}$ e f è una funzione (continua) dell'operatore $\widehat{\mathcal{N}}$.

Un caso particolare delle ultime due relazioni è dato da ($\gamma \in \mathbb{R}$):

$$q^{\gamma\widehat{\mathcal{N}}}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}q^{-\gamma\widehat{\mathcal{N}}} = q^{-\gamma}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}\tag{2.64a}$$

$$q^{\gamma\widehat{\mathcal{N}}}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger}q^{-\gamma\widehat{\mathcal{N}}} = q^{\gamma}\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}^{\dagger}\tag{2.64b}$$

che useremo tra breve.

Consideriamo l'oscillatore di Biedenharn che qui riscriviamo per comodità:

$$\widehat{a}\widehat{a}^{\dagger} - q^{1/2}\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} = q^{-\widehat{\mathcal{N}}/2}\tag{2.65}$$

e poniamo ($\eta \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}\widehat{a} &= \eta\widehat{C}q^{\gamma\widehat{\mathcal{N}}} \\ \widehat{a}^{\dagger} &= \bar{\eta}q^{\gamma\widehat{\mathcal{N}}}\widehat{C}^{\dagger}\end{aligned}$$

2.4 Caratteristiche comuni degli oscillatori q -deformati e mutue trasformazioni

che andiamo a sostituire nella (2.65) ($\chi = |\eta|^2$):

$$\widehat{C}q^{\gamma\widehat{N}}q^{\gamma\widehat{N}}\widehat{C}^\dagger - q^{1/2}q^{\gamma\widehat{N}}\widehat{C}^\dagger\widehat{C}q^{\gamma\widehat{N}} = \chi^{-1}q^{-\widehat{N}/2}$$

E' facile verificare che anche \widehat{C} e \widehat{C}^\dagger soddisfano le (2.64a) e (2.64b) mediante le quali portiamo, nel primo addendo, i $q^{\gamma\widehat{N}}$ all'esterno di \widehat{C} e \widehat{C}^\dagger :

$$q^{\gamma\widehat{N}}(q^{2\gamma}\widehat{C}\widehat{C}^\dagger - q^{1/2}\widehat{C}^\dagger\widehat{C})q^{\gamma\widehat{N}} = \chi^{-1}q^{-\widehat{N}/2}$$

e moltiplichiamo ambo i membri a destra e sinistra per $q^{-\gamma\widehat{N}}$ fino a ottenere:

$$q^{(2\gamma-\frac{1}{2})}\widehat{C}\widehat{C}^\dagger - \widehat{C}^\dagger\widehat{C} = \chi^{-1}q^{-[(2\gamma+\frac{1}{2})\widehat{N}+\frac{1}{2}]} \quad (2.66)$$

E' facile vedere adesso che quest'ultima forma comprende le tre classi di oscillatori incontrate finora:

1. Oscillatore ACL:

da $\gamma = -\frac{1}{4}$ e $\chi^{-1} = q^{-1/2}$ si ha:

$$q^{-1}\widehat{C}\widehat{C}^\dagger - \widehat{C}^\dagger\widehat{C} = q^{-1} \quad (2.67)$$

da cui la discende la (2.32) moltiplicando per q e sostituendo $q = p^2$;

2. Oscillatore Fei:

per $\gamma = \frac{1}{4}$ e $\chi^{-1} = q^{1/2}$ la (2.66) assume la forma:

$$\widehat{C}\widehat{C}^\dagger - \widehat{C}^\dagger\widehat{C} = q^{-\widehat{N}} \quad (2.68)$$

che diventa la (2.43) per ridefinizione: $q \rightarrow q^{-1}$;

3. Oscillatore CYB:

$\gamma = -\frac{1}{4}$ e $\chi^{-1} = (q^{-1/2} - q^{1/2})$ forniscono:

$$q^{-1}\widehat{C}\widehat{C}^\dagger - \widehat{C}^\dagger\widehat{C} = q^{-1} - 1 \quad (2.69)$$

che è la stessa della (2.54).

Si noti che le precedenti condizioni sul coefficiente χ significano condizioni sul modulo quadro di η , e ciò lascia un'arbitrarietà di fase nella ridefinizione degli operatori.

Per quanto fatto, dunque, proprio come avevamo anticipato, tutte le varianti sono legate all'algebra di Biedenharn (e quindi tra loro), da opportune trasformazioni, che riassumiamo (riverificare!!!) in tabella 2.4.

In più la (2.66) è il punto di partenza per la costruzione di ulteriori q -deformazioni dell'algebra bosonica, utilizzando nuovi arbitrari valori di $\gamma, \chi \in \mathbb{R}$.

Operatori bosonici delle varie q -deformazioni	
ACL: $\hat{A} = e^{i\phi} q^{1/4} \hat{a} q^{\hat{N}/4}$	$\hat{A}^\dagger = e^{-i\phi} q^{1/4} q^{\hat{N}/4} \hat{a}^\dagger$
Fei: $\alpha = e^{i\phi} q^{1/4} \hat{a} q^{-\hat{N}/4}$	$\alpha^\dagger = e^{-i\phi} q^{1/4} q^{-\hat{N}/4} \hat{a}^\dagger$
CYB: $\hat{b} = e^{i\phi} (q^{-1/2} - q^{1/2})^{-1/2} \hat{a} q^{\hat{N}/4}$ $\hat{b}^\dagger = e^{-i\phi} (q^{-1/2} - q^{1/2})^{-1/2} q^{\hat{N}/4} \hat{a}$	

Tabella 2.3: Trasformazioni tra le principali q -deformazioni delle algebre bosoniche a partire dall'algebra di Biedenharn ($\phi \in \mathbb{R}$).

2.5 Stati coerenti degli oscillatori q -deformati

Anche in questo paragrafo conviene servirci della notazione precedente per trattare in maniera unificata i vari tipi di oscillatori, ma per semplicità di notazione, d'ora in poi ometteremo il pedice \mathfrak{F} . Solo nel seguito distingueremo le proprietà degli stati coerenti dei singoli casi.

Gli stati coerenti sono definiti come gli autostati dell'operatore di distruzione $\hat{\mathcal{A}}$:

$$\hat{\mathcal{A}}|z\rangle = z|z\rangle \tag{2.70}$$

Sviluppando tali stati sulla base canonica $|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) |\underline{n}\rangle$ si ottiene la relazione di ricorrenza dei coefficienti $c_n(z)$:

$$\sqrt{\mathcal{Q}(n+1)} c_{n+1}(z) = z c_n(z) \tag{2.71}$$

2.5 Stati coerenti degli oscillatori q -deformati

che ha come soluzione:

$$c_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{\mathcal{Q}(n)!}} \quad (2.72)$$

da cui:

$$|z\rangle = \mathcal{M}^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\mathcal{Q}(n)!}} |\mathbf{n}\rangle \quad (2.73)$$

dove $\mathcal{M}^{-1/2}$ è un coefficiente di normalizzazione.

Ricorrendo alla funzione q -esponenziale (appendice A.4.3) che possiamo scrivere come:

$$e_q^z \equiv \exp_q(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\mathcal{Q}(n)!} \quad (2.74)$$

le norme degli stati coerenti risultano:

$$\langle z | z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n z^n}{\mathcal{Q}(n)!} = e_q^{|z|^2} \quad (2.75)$$

e non rimane che valutare il raggio di convergenza di queste serie, a seconda dei vari casi.

- **Oscillatore Bie:** sostituendo la (2.24) di pag. 29, la norma degli stati coerenti è data dalla serie:

$$e_q^{|z|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}\binom{n}{2}} (1-q)^n}{(q; q)_n} |z|^{2n} = {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} 0 \\ -q^{1/2} \end{matrix} \middle| q^{1/2}; (q-1)|z|^2 \right)$$

dove l'ultima uguaglianza è dimostrata in appendice A.4.3.

Il rapporto tra due coefficienti successivi di questa serie va come:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \propto \begin{cases} q^{-n/2} & q > 1 \\ q^{n/2} & 0 < q < 1 \end{cases}$$

pertanto va a zero in entrambi i casi. La serie converge su tutto il piano complesso $z \in \mathbb{C}$.

- **Oscillatore ACL:** utilizzando la (2.36) di pag. 40, il q -esponenziale assume la forma:

$$e_q^{|z|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(q^2; q^2)_n} (1-q^2)^n = {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q^2; (1-q^2)|z|^2 \right) \quad (2.76)$$

Stavolta il rapporto tra due coefficienti successivi è:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \propto \begin{cases} q^{-2n} & q > 1 \\ (1 - q^2)|z|^2 & 0 < q < 1 \end{cases}$$

Mentre per $q > 1$ la serie converge su tutto il piano complesso, per $0 < q < 1$ converge solo all'interno⁹ del cerchio di raggio:

$$|z|^2 < \frac{1}{1 - q^2} = \|\widehat{A}\|^2$$

dove abbiamo utilizzato la (2.41).

- **Oscillatore Fei:** utilizzando la (2.48) la norma si scrive:

$$e_q^{|z|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(q; q)_n} (1 - q)^n = {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; (1 - q)|z|^2 \right) \quad (2.77)$$

I coefficienti, in questo caso, vanno come:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \propto \begin{cases} q^{-n} & q > 1 \\ (1 - q)|z|^2 & 0 < q < 1 \end{cases}$$

Vale praticamente quanto detto nel caso precedente: convergenza su tutto il piano complesso per $q > 1$, e all'interno del cerchio (cfr. eq. (2.51)) $|z|^2 < (1 - q)^{-1} < \|\widehat{\alpha}\|^2$ per $0 < q < 1$.

- **Oscillatore CYB:** utilizzando la (2.58) otteniamo, per la norma, la:

$$e_q^{|z|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(q^2; q^2)_n} = {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; |z|^2 \right) \quad (2.78)$$

Stavolta dobbiamo valutare la convergenza solo per $0 < q < 1$, nel qual caso si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |z|^2$$

per cui la serie converge all'interno del cerchio di raggio $|z| = 1 = \|\widehat{b}\|$, (cfr. eq. (2.61)).

⁹Sulla circonferenza in generale non si può affermare niente, bisogna valutare direttamente.

2.5 Stati coerenti degli oscillatori q -deformati

Per quanto visto gli *stati coerenti normalizzati* sono dati dagli sviluppi:

$$|z\rangle = (\exp_q(|z|^2))^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\mathcal{Q}(n)!}} |\underline{n}\rangle \quad (2.79)$$

e d'ora in poi essi **saranno sempre considerati normalizzati**.

Nel seguito, il coefficiente di normalizzazione sarà indicato come $\mathcal{M}(|z|^2)^{-1/2}$.

Sugli stati coerenti è ben definito anche l'operatore di creazione, poiché come sappiamo i domini massimali di $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{S}}$ e $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{S}}^\dagger$ coincidono. A differenza della (2.70) l'azione di quest'ultimo non è semplicemente esprimibile, ma gode della notevole proprietà:

$$\langle z_1 | \widehat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{S}}^\dagger z_2 \rangle = \bar{z}_1 \langle z_1 | z_2 \rangle$$

che discende dalla mutua aggiuntezza degli operatori bosonici.

Notiamo infine che, esplicitando la forma dei vettori della base canonica, gli stati coerenti si possono scrivere simbolicamente:

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \mathcal{M}(|z|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\mathcal{Q}(n)!}} (\widehat{\mathcal{A}}^\dagger)^n |0\rangle = \\ &= \mathcal{M}(|z|^2)^{-1/2} \exp_q(z\widehat{\mathcal{A}}^\dagger) |0\rangle \end{aligned}$$

Capitolo 3

Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

Abbiamo già visto, nel primo capitolo, che gli operatori \hat{x} e \hat{p} si esprimono, in funzione degli operatori bosonici, mediante le seguenti combinazioni lineari:

$$\hat{x} = \frac{L}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{p} = i\frac{K}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (3.1)$$

dove, per consentirci una maggiore generalità, abbiamo rinunciato al vincolo $K = \frac{\hbar}{L}$ (cfr. eq.(1.10)). L'unica restrizione rimane, ovviamente, quella sulle dimensioni fisiche di L e K , rispettivamente una lunghezza e un momento. Le relazioni inverse sono:

$$\hat{a} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (3.2)$$

dove, per semplicità, abbiamo fatto uso degli operatori posizione e momento adimensionali $\hat{x} \equiv \frac{\hat{x}}{L}$ e $\hat{p} \equiv \frac{\hat{p}}{K}$.

Noi assumeremo che tale dipendenza lineare rimanga invariata anche adesso che andiamo a sostituire, nella (3.1), gli operatori deformati introdotti nel capitolo precedente. Vedremo quindi che gli operatori posizione e momento così costruiti presentano delle nuove proprietà, soprattutto per quanto riguarda l'autoaggiuntezza e le proprietà spettrali

Ovviamente queste proprietà potranno variare a seconda di quale set di operatori bosonici andiamo, di volta in volta, ad utilizzare, dimodochè arriveremo alla costruzione di teorie abbastanza diverse: ad esse ci riferiremo come *realizzazioni o costruzioni*, di Biedenharn, di Feinsilver, ACL o CYB.

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

Prima di proseguire, notiamo che introdotto il cambiamento di base:

$$|\underline{n}\rangle^{\otimes} \equiv i^n |\underline{n}\rangle$$

descritto dalla trasformazione unitaria:

$$U_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & i^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

le matrici rappresentative di \hat{x} e \hat{p} (adimensionali) si trasformano l'una nell'altra, cioè:

$$\hat{p} = U_{\mathcal{F}} \hat{x} U_{\mathcal{F}}^{\dagger} \quad (3.3)$$

come è facile verificare, riferendosi all'azione di \hat{a} e \hat{a}^{\dagger} (tabella 2.2, pag. 32). La $U_{\mathcal{F}}$ può essere considerata come una trasformata di Fourier generalizzata. Data l'equivalenza dei due operatori, nel seguito ci possiamo limitare allo studio di uno solo dei due, specificamente l'operatore posizione, citando, laddove opportuno, gli analoghi risultati per l'operatore momento.

D'ora in poi trattando i vari operatori ci riferiremo sempre alle loro chiusure.

3.1 Sulle estensioni autoaggiunte degli operatori, in particolare di \hat{x} e \hat{p}

Ricordiamo che si chiama *aggiunto* di un operatore densamente definito \hat{A} , e si denota con \hat{A}^{\dagger} , l'operatore che gode della proprietà:

$$\langle g | \hat{A}f \rangle = \langle \hat{A}^{\dagger}g | f \rangle \quad (3.4)$$

$\forall g \in D_{\hat{A}^{\dagger}}$. Tutti i vettori g per cui vale tale relazione individuano il dominio di definizione di \hat{A}^{\dagger} .

Un operatore viene allora detto *simmetrico* se è contenuto nel suo aggiunto, cioè se accade che $\hat{A} \subset \hat{A}^{\dagger}$.

Ciò significa che $D_{\hat{A}} \subset D_{\hat{A}^{\dagger}}$ ma che l'azione di \hat{A}^{\dagger} coincide con quella di \hat{A} sui vettori appartenenti a $D_{\hat{A}}$.

In particolare da ciò discende che:

$$\langle g | \hat{A}f \rangle = \langle \hat{A}g | f \rangle \quad (3.5)$$

3.1 Sulle estensioni autoaggiunte degli operatori

$\forall f, g \in D_{\widehat{A}}$.

Più in particolare, un operatore simmetrico è detto *autoaggiunto* se, invece della precedente inclusione, vale l'uguaglianza $\widehat{A} = \widehat{A}^\dagger$.

Ciò significa che i vettori g per cui vale la (3.4) sono **solo** i vettori di $D_{\widehat{A}}$.

Un operatore simmetrico può godere della proprietà che, estendendo il suo dominio, diventi autoaggiunto.

Anche se la differenza tra il concetto di simmetria e quella di autoaggiuntezza sembra molto debole, è ben noto che essi comportano proprietà molto differenti, ed è altrettanto ben noto che **le grandezze fisiche, in meccanica quantistica, possono essere rappresentate solo da operatori autoaggiunti**. Solo questi ultimi infatti garantiscono una serie di caratteristiche che un osservabile fisico deve necessariamente avere [?].

Per esempio uno dei postulati della meccanica quantistica è che i possibili risultati di una misura di una grandezza fisica appartengono allo spettro dell'operatore che la rappresenta. Ebbene, lo spettro di un operatore autoaggiunto è sempre un sottoinsieme della retta, gli operatori simmetrici possono avere come spettro anche l'intero piano complesso, ed è chiaro che aspettarsi un valore immaginario di una grandezza fisica è una inaccettabile contraddizione!

Inoltre alcune grandezze fisiche sono associate a simmetrie dello spazio e del tempo: ad esempio l'energia è quella grandezza che si conserva nel tempo, mentre il momento lineare è quella che si conserva nelle traslazioni spaziali. In meccanica quantistica le simmetrie sono rappresentate da gruppi di trasformazioni unitarie, e le corrispondenti grandezze fisiche conservate sono i generatori di tali trasformazioni. Il teorema di Von Neumann [?, ?] ci assicura allora che solo gli operatori autoaggiunti generano gruppi di trasformazioni unitarie.

D'altra parte accade spesso che per gli operatori che rappresentano delle grandezze fisiche si riesca a definire solo un dominio di simmetria, e non ad individuare esplicitamente un dominio di autoaggiuntezza. E' utile allora disporre di strumenti che permettano di evincere l'esistenza di estensioni autoaggiunte di operatori di cui è verificata solo la simmetria.

Per la precisione, dato un operatore simmetrico, sono possibili le tre alternative:

1. l'operatore simmetrico ammette un'unica estensione autoaggiunta. In questo caso l'operatore di partenza viene detto *essenzialmente autoaggiunto* e la sua estensione rappresenta un idoneo osservabile fisico;
2. l'operatore simmetrico ammette una famiglia di estensioni autoaggiunte. E' ancora possibile costruire un idoneo osservabile scegliendo una

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

opportuna estensione, in generale dipendente dal problema fisico in esame;

3. l'operatore simmetrico non ammette estensioni autoaggiunte. Non è possibile, in questo caso, costruire un osservabile corrispondente alla grandezza fisica che si vuole descrivere.

Un tipico esempio di queste tre situazioni lo si ritrova in meccanica quantistica descrivendo il sistema unidimensionale di una particella libera a seconda che essa si muova su un segmento, una semiretta o una retta.

Tornando allo studio degli operatori posizione e momento corrispondenti alle algebre bosoniche q -deformate, la discussione precedente ci avverte che è fondamentale che essi risultino essere autoaggiunti (o almeno ammettano estensioni autoaggiunte), affinché possano rappresentare degli osservabili.

Questi operatori, in quanto espressi mediante le (3.1) a partire dagli operatori bosonici, sono inizialmente definiti sul dominio \mathcal{D}_M (vedi pag.31), sul quale, per la mutua aggiuntezza di \hat{a} e \hat{a}^\dagger , risultano simmetrici. Tuttavia la condizione di appartenenza al dominio di \hat{x} o \hat{p} di un generico vettore $f \in \mathcal{H}$ è meno stringente dell'appartenenza al dominio \mathcal{D}_M , cioè:

$$\|\hat{x}f\|^2 \leq \|\hat{a}f\|^2 + \|\hat{a}^\dagger f\|^2$$

come si vede dal confronto delle rispettive condizioni sui coefficienti f_n dello sviluppo $|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |\mathbf{n}\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{k+1} \sqrt{[[k+1]]_q} + f_{k-1} \sqrt{[[k]]_q} \right|^2 &\leq \\ &\leq \frac{L^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}|^2 [[k+1]]_q + |f_{k-1}|^2 [[k]]_q \end{aligned}$$

Ciò vuol dire che entrambi gli operatori posizione e momento possono essere estesi a domini più ampi.

Inoltre se proviamo a valutare *formalmente* le autofunzioni di questi operatori, e cioè senza preoccuparci della loro appartenenza ai domini di definizione, troviamo che l'equazione agli autovalori:

$$\hat{x}|f_\lambda\rangle = \lambda|f_\lambda\rangle \tag{3.6}$$

in genere ammette soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ (vedi appendice A.5).

Tali soluzioni, pur appartenendo allo spazio di Hilbert, non appartengono

3.1 Sulle estensioni autoaggiunte degli operatori

al dominio \mathcal{D}_M di definizione dei singoli operatori bosonici. Questo può essere verificato con una stima diretta delle norme di $\hat{a}|f_\lambda\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|f_\lambda\rangle$, ma è molto più importante riconoscere che concettualmente tali vettori (almeno quelli corrispondenti ad autovalori complessi), non possono appartenere a \mathcal{D}_M perchè questo è un *dominio di simmetria* per \hat{x} , sul quale esso non può ammettere autovalori non reali.

Cosicché abbiamo dei vettori su cui è ben definita l'azione (3.6) di \hat{x} , ma che sono al di fuori del dominio \mathcal{D}_M .

Il modo più rapido per estendere l'operatore \hat{x} è allora quello di aggiungere tutta la famiglia di autofunzioni $|f_\lambda\rangle$; ma in questo modo avremmo costruito un operatore non autoaggiunto per il motivo addotto poc'anzi.

Queste semplici considerazioni ci danno un'idea della cautela che dovremo impiegare, partendo dal *dominio di simmetria* \mathcal{D}_M , per arrivare a costruire un idoneo osservabile per l'operatore posizione.

Per fortuna, come auspicato in precedenza, esistono strumenti molto efficaci per lo studio dell'esistenza di estensioni autoaggiunte di operatori simmetrici, e per la loro costruzione. Tali strumenti sono la teoria degli *indici di difetto* e della *trasformata di Cayley*; inoltre scopriremo tra breve che gli operatori posizione associati ad algebre bosoniche appartengono ad una classe particolare, quella degli operatori rappresentati da *matrici di Jacobi*, per i quali esiste una ben sviluppata teoria riguardo la loro autoaggiuntezza e le loro proprietà spettrali.

E' opportuno allora richiamare i concetti essenziali sia dell'una che dell'altra teoria, prima di proseguire nello studio dell'operatore posizione.

3.1.1 Spazi, numeri e indici di difetto — trasformata di Cayley

Dato un operatore chiuso T :

$$T : D_T \subset \mathcal{H} \longrightarrow \Delta_T \subset \mathcal{H}$$

si chiama [?, Cap. VII]-[?, Cap. X] **spazio di difetto** $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(T)$ il sottospazio ortogonale al suo codominio:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(T) \equiv \Delta_T^\perp$$

La dimensione dello spazio di difetto, $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(T)$, viene detta **numero di difetto** di T .

Consideriamo adesso i due peculiari operatori $(T+i)$ e $(T-i)$: i rispettivi numeri di difetto, che si denotano \mathbf{m}_+ ed \mathbf{m}_- , prendono il nome di **indici di**

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

difetto dell'operatore T :

$$\mathbf{m}_{\pm} \equiv \dim \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(T \pm i)$$

L'importanza degli indici di difetto nello studio dell'autoaggiuntezza è legata alla successiva costruzione.

Sia T un operatore simmetrico oltreché chiuso; l'operatore definito da:

$$V = (T - i)(T + i)^{-1}$$

è un operatore isometrico¹ definito in Δ_{T+i} e a valori in Δ_{T-i} , detto *trasformata di Cayley di T* [?, Cap. VI].

Inoltre, se l'operatore T è autoaggiunto, e solo in quel caso, V risulta unitario.

In termini di V , l'operatore T si riscrive:

$$T = i(\mathbf{1} + V)(\mathbf{1} - V)^{-1} \tag{3.7}$$

Ogni estensione isometrica di V fornisce, mediante la (3.7), un'estensione simmetrica di T : in particolare ogni estensione unitaria di V fornisce un'estensione autoaggiunta di T .

E' chiaro allora che l'operatore V è unitario se è definito (ed ha valori) in tutto \mathcal{H} , e cioè se e solo se gli spazi di difetto di $T \pm i$ hanno dimensione zero, ovvero se gli indici di difetto di T sono entrambi nulli: $(\mathbf{m}_+, \mathbf{m}_-) = (0, 0)$.

Viceversa l'operatore isometrico V :

$$V : \mathcal{H} \ominus \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(T + i) \longrightarrow \mathcal{H} \ominus \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(T - i)$$

potrà essere unitariamente esteso a (e avere valori in) tutto \mathcal{H} se e solo se la dimensione degli spazi di difetto di $(T + i)$ e $(T - i)$ coincide, e cioè se $\mathbf{m}_+ = \mathbf{m}_-$.

In tal caso esistono infinite estensioni unitarie di V , e quindi autoaggiunte di T .

Infine se uno solo dei due indici si annulla, non è possibile estendere V , e di

¹Un operatore \widehat{V} , definito in $D_V \subset \mathcal{H}$, si dice *isometrico* se, $\forall u, v \in D_V$ accade:

$$\langle u | v \rangle = \langle Vu | Vv \rangle$$

Nel caso in cui sia $D_V = \mathcal{H}$, esso è detto *unitario*.

3.1 Sulle estensioni autoaggiunte degli operatori

conseguenza neanche T , che pertanto risulta massimale.

La valutazione degli indici di difetto si riconduce alle considerazioni che andiamo ad esporre.

Perché un vettore $g \in \mathcal{H}$ appartenga allo spazio di difetto di $(T + i)$ deve accadere che:

$$(g, (T + i)f) = 0$$

$\forall f \in D_T$. Sviluppando il primo membro:

$$(g, (T + i)f) = (g, Tf) + (g, if) = (g, Tf) - (ig, f)$$

la condizione di appartenenza si riscrive:

$$(g, Tf) = (ig, f) \quad \forall f \in D_T$$

per cui siamo arrivati al seguente:

Teorema 3.1 *Un vettore $g \in \mathcal{H}$ appartiene allo spazio di difetto dell'operatore $(T + i)$ se e solo se:*

- g appartiene al dominio dell'aggiunto: $g \in D_{T^\dagger}$
- g è autovettore di T^\dagger di autovalore i : $T^\dagger g = ig$

Analogamente si dimostra che lo spazio di difetto di $(T - i)$ è dato dagli autovettori di T^\dagger di autovalore $-i$.

Pertanto gli indici di difetto di un operatore chiuso T sono uguali alla dimensione degli autospazi (se esistono) di T^\dagger relativi, rispettivamente, agli autovalori $\pm i$.

Riassumendo quanto appena visto, dato un operatore simmetrico T possono darsi i seguenti casi:

$\boxed{m_+ = m_- = 0}$: la chiusura di T è un operatore autoaggiunto;

$\boxed{m_+ = m_- \neq 0}$: T non è autoaggiunto ma ammette infinite estensioni autoaggiunte;

$\boxed{m_+ \neq m_-}$: T non ammette estensioni autoaggiunte. Nel caso in cui uno dei due indici si annulli, l'operatore è massimale.

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

La costruzione esplicita delle estensioni autoaggiunte procede nel modo seguente.

Indichiamo con E_{+i} ed E_{-i} gli autospazi di \hat{x}^\dagger relativi agli autovalori $\pm i$, ovvero gli spazi di difetto di $(T \pm i)$, e con e_+ ed e_- i rispettivi autovettori normalizzati.

La trasformata di Cayley V di \hat{x} agisce come:

$$V : \Delta_{\hat{x}+i} \longrightarrow \Delta_{\hat{x}-i}$$

Le possibili estensioni unitarie $V_e(\phi)$ sono definite dall'azione:

$$V_e(\phi) : f \oplus e_+ \in \Delta_{\hat{x}+i} \oplus E_{+i} \longrightarrow g \oplus e^{i\phi}e_- \in \Delta_{\hat{x}-i} \oplus E_{-i}$$

dove il vettore g è dato da:

$$g = (\hat{x} - i)(\hat{x} + i)^{-1}f$$

mentre ϕ è un fase. Abbiamo così individuato una famiglia a un parametro di estensioni autoaggiunte parametrizzate dall'angolo $\phi \in [0, 2\pi)$.

3.1.2 Operatori alle differenze e matrici di Jacobi

Consideriamo uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ed una base ortonormale $|\underline{n}\rangle$: un operatore A definito dalla seguente azione:

$$A|\underline{n}\rangle = a_n|\underline{n+1}\rangle + b_n|\underline{n}\rangle + c_n|\underline{n-1}\rangle$$

viene detto [?, ?] *operatore alle differenze del secondo ordine*.

Consideriamo in particolare il caso $c_n = a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$; in questa situazione l'operatore è simmetrico e la sua matrice rappresentativa assume la forma:

$$A = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

che è detta **matrice di Jacobi**.

3.1 Sulle estensioni autoaggiunte degli operatori

L'equazione agli autovalori per A :

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

dove:

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda) |\underline{n}\rangle$$

fornisce la seguente relazione di ricorrenza per i coefficienti $P_n(\lambda)$:

$$a_n P_{n+1}(\lambda) + b_n P_n(\lambda) + a_{n-1} P_{n-1}(\lambda) = z P_n(\lambda) \quad (3.9)$$

che possono essere visti come funzioni della variabile complessa λ . In questa ottica la (3.9) è una relazione che determina due sistemi linearmente indipendenti di polinomi $P_n(\lambda)$ e $Q_n(\lambda)$, associati alla matrice di Jacobi (3.8), e univocamente determinati da una delle condizioni:

- polinomi di tipo-I: $P_0(\lambda) = 1, P_{-1}(\lambda) = 0$
- polinomi di tipo-II: $Q_0(z) = 0, Q_{-1}(z) = \frac{1}{a_0}$

Il grado dei polinomi risulta essere rispettivamente:

$$\begin{aligned} \deg P_n(\lambda) &= n \\ \deg Q_n(\lambda) &= n - 1 \end{aligned}$$

ed i due tipi di polinomi sono legati dalla relazione:

$$P_{n-1}(\lambda)Q_n(\lambda) - P_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda) = \frac{1}{a_{n-1}}$$

E' chiaro che solo i polinomi di tipo-I rappresentano un valido sistema di coefficienti nello spazio di Fock, per questo nel seguito ci interesseremo solo ai $P_n(\lambda)$. Per essi è inoltre garantita l'ortogonalità rispetto ad una opportuna misura di Borel positiva su \mathbb{R} :

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x) d\sigma(x) = \delta_{n,m}$$

non necessariamente univocamente determinata [?, ?, ?, ?].

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

Consideriamo adesso le proprietà dell'operatore simmetrico A (più precisamente della sua chiusura), definito dalla matrice di Jacobi (3.8): quest'ultima è una matrice reale il che ci garantisce che se $f \in \mathcal{H}$ è autofunzione di A relativa all'autovalore i , f^* lo è di autovalore $-i$ e quindi gli indici di difetto dell'operatore A coincidono per cui ammette in ogni caso estensioni autoaggiunte.

Inoltre, per ogni valore fissato di λ (e quindi anche per $\lambda = \pm i$), la (3.1.2) può non avere soluzione, o ammetterne al massimo una², a seconda che la serie dei coefficienti $P_n(\lambda)$ converga oppure no nello spazio di Hilbert \mathcal{H} . Pertanto per gli indici di difetto sono ammesse le due sole alternative indicate dai seguenti teoremi³:

Teorema 3.2 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. gli indici di difetto di A sono $(0, 0)$;
2. la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2$ diverge per tutti i valori complessi di z ;
3. vale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-1} = \infty$ (i coefficienti b_n possono essere qualsiasi);
4. la misura ortogonale per i polinomi è univocamente determinata;

E chiaro che nel caso banale in cui i coefficienti della matrice (3.8) siano limitati, l'operatore stesso è limitato e quindi autoaggiunto.

Teorema 3.3 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. gli indici di difetto di A sono $(1, 1)$;
2. la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2$ converge per tutti i valori di $z \in \mathbb{C}$;
3. vale che $|b_n| < C$ e, almeno a partire da un certo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n-1}a_{n+1} \leq a_n^2 \tag{3.10a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-1} < \infty \tag{3.10b}$$

4. la misura ortogonale per i polinomi non è univocamente determinata;

In questo secondo caso vale anche il seguente:

²Perché univocamente determinata dalla (3.9).

³Teoremi 1.1–1.5, Lemma 1.5 e Teorema 1.9 di [?].

3.2 L'oscillatore armonico rivisitato

Teorema 3.4 *Lo spettro delle estensioni autoaggiunte di A è sempre discreto e non ammette punti di accumulazione finiti.*

Due condizioni utili perché ci si trovi nel caso del teorema 3.3 sono:

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2$ converge per *almeno* un valore complesso z ;
- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2$ converge per un insieme *non numerabile* di valori *reali*;

Prima di cimentarci con le possibili estensioni autoaggiunte dell'operatore posizione generalizzato \hat{x} , riteniamo istruttivo applicare preliminarmente le nozioni di questo paragrafo allo studio dell'oscillatore armonico ordinario.

3.2 L'oscillatore armonico rivisitato

L'hamiltoniana di una particella di massa m soggetta ad una forza di richiamo elastica di costante k si scrive:

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$$

Mettendo in evidenza il fattore $\hbar\omega$ che ha le dimensioni di un'energia:

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{\hbar\omega m} + \frac{m\omega}{\hbar} \hat{x}^2 \right)$$

le quantità in parentesi devono essere adimensionali. Abbiamo così ottenuto, in maniera naturale, un parametro $L = (\frac{\hbar}{m\omega})^{1/2}$ delle dimensioni di una lunghezza che andiamo ad inserire nella definizione (1.8) degli operatori bosonici:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega m}} \hat{p} \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega m}} \hat{p} \quad (3.11)$$

in termini dei quali l'hamiltoniana si riscrive (cfr. pag. 18):

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

La base canonica $\{ |\mathbf{n}\rangle \}_{n \in \mathbb{N}_0}$ della rappresentazione di Fock (paragrafo 2.1), è

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

un sistema di autovettori dell'operatore $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, e quindi dell'hamiltoniana (3.2), i cui autovalori risultano:

$$\hat{H}_{oa} |\mathbf{n}\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |\mathbf{n}\rangle$$

Tenendo conto dell'azione di \hat{a}_0 e \hat{a}_0^\dagger , eq. (2.12)–(2.13), è chiaro che l'operatore \hat{x} , definito dalle inverse delle (3.11):

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

è rappresentato, sulla base canonica, dalla matrice di Jacobi:

$$\hat{x} = \frac{L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} = \infty$, siamo nelle condizioni del teorema 3.2, pag. 64, che ci assicura che l'operatore \hat{x} è autoaggiunto.

L'equazione agli autovalori per \hat{x} ($x \in \mathbb{R}$):

$$\hat{x} |f_x\rangle = x |f_x\rangle$$

induce (vedi eq. (3.9)) la relazione di ricorrenza :

$$\sqrt{n+1}P_{n+1}(x) + \sqrt{n}P_{n-1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{L}xP_n(x) \quad (3.12)$$

per i coefficienti $P_n(x)$ dello sviluppo di $|f_x\rangle$ nella base canonica. Ponendo $y = (x/L)$ e definendo:

$$H_n(y) = \sqrt{n!}2^n P_n(x)$$

la (3.12) assume la forma:

$$H_{n+1}(y) + 2nH_{n-1}(y) = 2yH_n(y)$$

3.2 L'oscillatore armonico rivisitato

che è la relazione di ricorrenza dei polinomi di Hermite[?]:

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

I coefficienti $P_n(x)$ sono quindi ed espressi dalle:

$$P_n(x) = \frac{H_n\left(\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{n!} 2^n}$$

Il teorema 3.2 ci assicura inoltre che esiste un'unica misura di Borel positiva rispetto alla quale i polinomi risultano ortogonali.

A conferma di ciò è noto che i polinomi di Hermite sono ortogonali⁴ rispetto alla misura di peso e^{-x^2} sull'asse reale; sostituendo a quelli i polinomi $P_n(x)$ si ottiene la relazione:

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x) P_m(x) d\mu(x) = \delta_{nm}$$

dove la misura, univocamente determinata, è:

$$d\mu(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{L^2}}}{L\pi^{1/2}}$$

I polinomi di Hermite si possono esprimere a partire dalla *funzione generatrice*:

$$\psi(x, t) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

utilizzando la quale è possibile scrivere simbolicamente le autofunzioni come:

$$\begin{aligned} |f_x\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) |\mathbf{n}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{x}{L}\right)}{\sqrt{n!}} 2^{-n/2} |\mathbf{n}\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{x}{L}\right)}{n!} (2^{-1/2} \hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \psi\left(\frac{x}{L}, \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\right) |0\rangle \end{aligned}$$

⁴Per la precisione vale che:

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = n! 2^n \pi^{1/2} \delta_{nm}$$

3.3 Proprietà dell'operatore posizione nelle varie realizzazioni

Ora che abbiamo introdotto i necessari strumenti matematici, ritorniamo allo studio dell'operatore posizione. In ogni costruzione si avrà $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$, e quindi l'operatore sarà rappresentato dalla stessa matrice di Jacobi (3.2), ma con i q -numeri che sostituiscono gli interi n .

L'annullarsi dei $b_n = 0$, inoltre, fa sì che i polinomi definiti dalle (3.9) (ovvero i coefficienti degli autostati della posizione) risultino alternativamente funzioni pari o dispari della variabile λ . Più precisamente i coefficienti di indice pari conterranno solo potenze pari di λ (compreso il termine noto), quelli di indice dispari conterranno solo potenze dispari.

In questo paragrafo la nostra attenzione sarà rivolta essenzialmente alle caratteristiche di autoaggiuntezza di \hat{x} , e allo studio dei coefficienti (o meglio polinomi) dello sviluppo delle autofunzioni.

E' chiaro che nei casi in cui gli operatori bosonici risultano limitati, anche i corrispondenti operatori posizione e momento risulteranno tali, in particolare è possibile dimostrare che $\|\hat{x}\| = \sqrt{2} L \|\hat{\mathcal{A}}\|$ cosicchè nei vari casi si ha ($q < 1$):

$$\|\hat{x}\| = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{1-q^2}} L & \text{(ACL)} \\ \sqrt{\frac{2}{1-q}} L & \text{(Fei)} \\ \sqrt{2} L & \text{(CYB)} \end{cases} \quad (3.13)$$

E' allora superfluo indagare le proprietà di autoaggiuntezza in tali casi, poiché gli operatori si possono estendere per continuità a tutto lo spazio di Hilbert, e su di esso risultano necessariamente autoaggiunti. In questi casi valgono i risultati del Teorema 3.2.

3.3.1 Costruzione di Biedenharn

In questo caso gli elementi della matrice di Jacobi sono:

$$a_n = \frac{L}{\sqrt{2}} [[n+1]]_q^{1/2}$$

Per essi è soddisfatta la:

$$[[n-1]]_q [[n+1]]_q \leq [[n]]_q^2 \quad (3.14)$$

3.3 Proprietà dell'operatore posizione nelle varie realizzazioni

che, sostituendo ai q -numeri la loro forma esplicita, si riduce alla richiesta:

$$q + q^{-1} \geq 2 \quad (3.15)$$

che è vera per ogni valore reale di q (l'uguaglianza si ha per $q = 1$). Per l'arbitrarietà di n resta quindi dimostrata la condizione (3.10a). Inoltre, utilizzando il criterio del rapporto per la convergenza delle serie, è semplice verificare che:

$$\frac{\sqrt{2}}{L} \sum_{n=0}^{\infty} [[n+1]]_q^{-1/2} < \infty \quad (3.16)$$

e quindi che è vera anche la (3.10b). Pertanto ci troviamo nelle condizioni del Teorema 3.3, e l'operatore posizione, ammettendo gli indici di difetto $(1, 1)$, non è autoaggiunto, ma ammette infinite estensioni autoaggiunte, individuate da un parametro continuo $\phi \in [0, 2\pi)$ (vedi pag. 62). La condizione 2 di questo teorema conferma, inoltre, quanto avevamo affermato nel paragrafo sull'esistenza di autofunzioni di \hat{x} per ogni autovalore complesso.

La relazione di ricorrenza per i coefficienti delle autofunzioni, che in questo caso, per evitare confusioni, indicheremo con $F_n(\lambda)$, prende la forma:

$$\frac{\lambda}{\Lambda} F_n(\lambda) = \sqrt{[[n+1]]_q} F_{n+1}(\lambda) + \sqrt{[[n]]_q} F_{n-1}(\lambda) \quad (3.17)$$

dove abbiamo posto $\Lambda = \frac{L}{\sqrt{2}}$. Esplicitando la forma degli $[[n]]_q = \frac{q^{-n/2} - q^{n/2}}{q^{-1/2} - q^{1/2}}$ possiamo scrivere, dopo qualche passaggio:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\Lambda} (1-q)^{1/2} F_n(\lambda) &= q^{-\frac{n}{4}} (1-q^{n+1})^{1/2} F_{n+1}(\lambda) + \\ &+ q^{-\frac{n-1}{4}} (1-q^n)^{1/2} F_{n-1}(\lambda) \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri⁵ per $q^{-\frac{1}{2}\binom{n}{2}}(q; q)_n^{1/2}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\Lambda} (1-q)^{1/2} q^{-\frac{1}{2}\binom{n}{2}}(q; q)_n^{1/2} F_n(\lambda) &= q^{-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}}(q; q)_{n+1}^{1/2} F_{n+1}(\lambda) + \\ &+ q^{-\frac{n-1}{2}}(1-q^n) q^{-\frac{1}{2}\binom{n-1}{2}}(q; q)_{n-1}^{1/2} F_{n-1}(\lambda) \end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $z = \frac{(1-q)^{1/2}}{\Lambda} \lambda$, e ponendo:

⁵Dove: $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

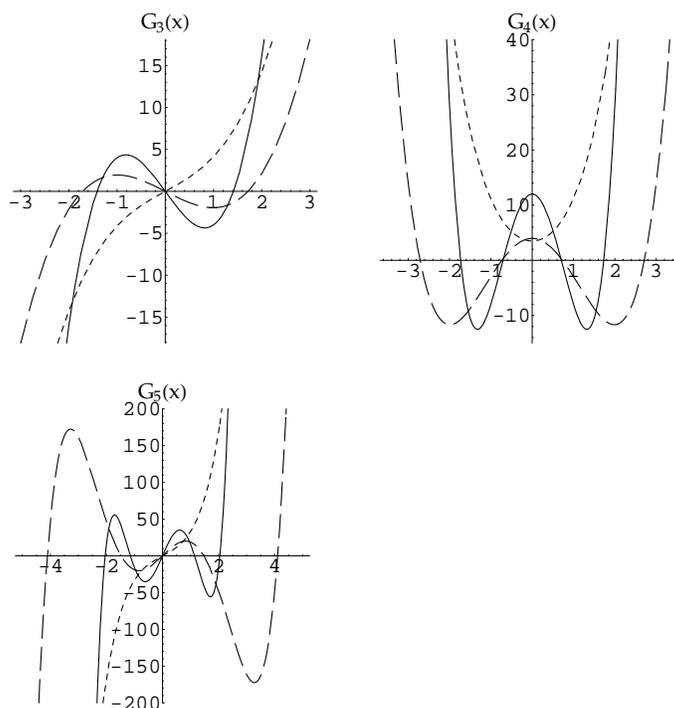


Figura 3.1: Confronto tra gli andamenti di $H_n(x)$ (tratto continuo) e $G_n(x | q)$ ($n = 3, 4, 5$) per $q = 0.2$ (tratto lungo) e $q = 2$ (tratto corto).

$$G_n(z | q) = q^{-\frac{1}{2} \binom{n}{2}} (q; q)_n^{1/2} F_n(\lambda)$$

la (3.17) si riscrive:

$$zG_n(z | q) = G_{n+1}(z | q) + q^{-\frac{n-1}{2}} (1 - q^n) G_{n-1}(z | q) \quad (3.18)$$

dove abbiamo voluto evidenziare la dipendenza dei polinomi dal parametro q che compare nella (3.18). Si noti che le funzioni $G_n(z | q)$ non sono invarianti $q \rightarrow q^{-1}$, a differenza delle $F_n(\lambda)$.

Limitiamoci in particolare al caso di variabile reale.

In figura 3.1 l'andamento dei primi $G_n(z | q)$ è confrontato con i corrispondenti polinomi di Hermite sulla retta.

Il termine $q^{-\frac{n-1}{2}} (1 - q^n)$ nella (3.18) è positivo per $q > 1$. In questo caso,

3.3 Proprietà dell'operatore posizione nelle varie realizzazioni

allora, tutti i coefficienti dei polinomi sono positivi. Ciò significa che i polinomi G_n di indice pari⁶ non hanno radici reali. I polinomi di indice dispari, invece, hanno l'unica radice nell'origine. Questo lo si vede in figura 3.1 con i $G_n(x|2)$.

In figura 3.6 è graficata la forma di alcuni G_n al variare di q , ed anche qui si vede che le oscillazioni dei vari polinomi si smorzano fino a scomparire per $q = 1$.

I coefficienti F_n sono dati dalle:

$$F_n(\lambda) = \frac{q^{\frac{1}{2}\binom{n}{2}}}{(q; q)_n^{1/2}} G_n\left(\frac{\sqrt{2}(1-q)^{1/2}}{L} \lambda \mid q\right)$$

3.3.2 Costruzione ACL per $q > 1$

Stavolta gli elementi di matrice sono:

$$a_n = \frac{L}{\sqrt{2}} [n+1]_q^{1/2}$$

La (3.10a) si può scrivere equivalentemente:

$$[n-1]_q [n+1]_q \leq [n]_q^2 \quad (3.19)$$

Sviluppando i q -numeri essa diventa:

$$(1 - q^2)^2 \geq 0$$

che è sempre vera.

Si può inoltre verificare facilmente che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q} < 1 \quad (3.20)$$

e quindi, per il criterio del rapporto, la serie:

$$\frac{\sqrt{2}}{L} \sum_{n=0}^{\infty} [n+1]_q^{-1/2} \quad (3.21)$$

è convergente.

Anche in questa costruzione sono soddisfatte le condizioni del Teorema 3.3 e

⁶In questo caso, come ribadito precedentemente, sono presenti solo potenze pari di z , ed il termine noto com'è facile verificare è sempre diverso da zero.

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

valgono le stesse considerazioni fatte per la costruzione di Biedenharn.

I coefficienti, che indicheremo C_n , delle autofunzioni di \hat{x} soddisfano la relazione di ricorrenza:

$$\frac{\lambda}{\Lambda} C_n(\lambda) = \sqrt{[n+1]_q} C_{n+1}(\lambda) + \sqrt{[n]_q} C_{n-1}(\lambda) \quad (3.22)$$

dove abbiamo posto $\Lambda = \frac{L}{\sqrt{2}}$. Sostituendo la forma esplicita degli $[[n]]_q = \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$ essa diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\Lambda} (1-q^2)^{1/2} C_n(\lambda) &= (1-q^{2(n+1)})^{1/2} C_{n+1}(\lambda) + \\ &+ (1-q^{2n})^{1/2} C_{n-1}(\lambda) \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per $(q^2; q^2)_n^{1/2}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\Lambda} (1-q^2)^{1/2} (q^2; q^2)_n^{1/2} C_n(\lambda) &= (q^2; q^2)_{n+1}^{1/2} C_{n+1}(\lambda) + \\ &+ (1-q^{2n}) (q^2; q^2)_{n-1}^{1/2} C_{n-1}(\lambda) \end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $2z = \frac{(1-q^2)^{1/2}}{\Lambda} \lambda$, e ponendo:

$$D_n(z | q^2) = (q^2; q^2)_n^{1/2} C_n(\lambda)$$

la (3.22) si riscrive finalmente:

$$2z D_n(z | q^2) = D_{n+1}(z | q^2) + (1-q^{2n}) D_{n-1}(z | q^2)$$

In figura 3.2 alcuni dei primi polinomi $D_n(z | q^2)$ sono confrontati con i corrispondenti polinomi di Hermite sulla retta.

Come nel caso precedente, se ci limitiamo al caso di variabile reale, accade che il coefficiente $(1-q^{2n})$ è positivo per $q > 1$. Ciò comporta che i polinomi di grado pari non abbiano radici reali, mentre quelli di grado dispari hanno la sola radice nell'origine. Ciò si evince anche dall'andamento in figura 3.7, dove si vede che le oscillazioni delle D_n si stemperano fino a scomparire per $q = 1$.

I coefficienti C_n sono dati da:

$$C_n(\lambda) = \frac{1}{(q^2; q^2)_n^{1/2}} G_n \left(\frac{(1-q^2)^{1/2}}{\sqrt{2}L} \lambda \middle| q^2 \right)$$

3.3 Proprietà dell'operatore posizione nelle varie realizzazioni

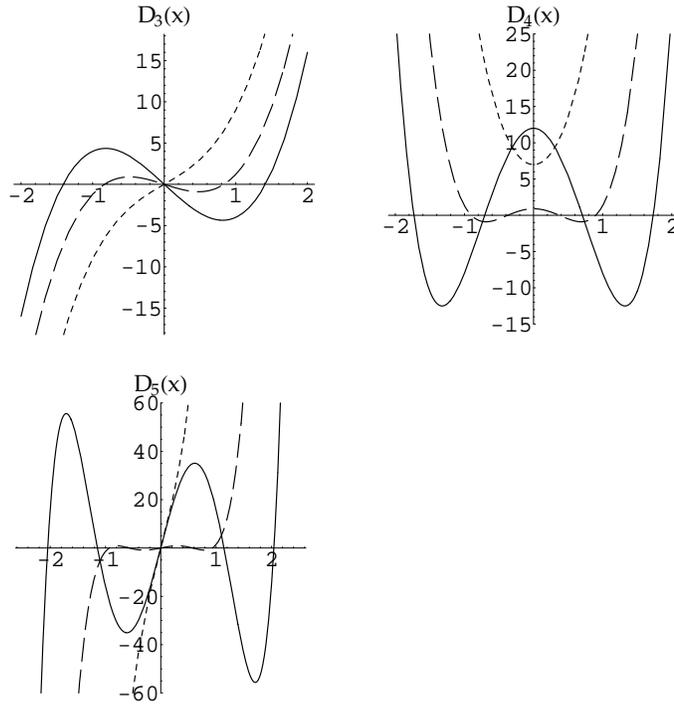


Figura 3.2: Confronto tra gli andamenti di $H_n(x)$ (tratto continuo) e $D_n(x|q^2)$ ($n = 3, 4, 5$) per $q^2 = 0.1$ (tratto lungo) e $q^2 = 2$ (tratto corto).

3.3.3 Costruzione Fei per $q > 1$

Possiamo utilmente riferirci al caso precedente, visto che l'operatore posizione, in questo caso, è rappresentato dalla stessa matrice, però con i q -numeri di base $q^{1/2}$ piuttosto che q , ma ciò comporta solo lievi cambiamenti nei risultati già visti.

I coefficienti $a_n = \frac{L}{\sqrt{2}}[n+1]_{q^{1/2}}^{1/2}$ soddisfano ancora la relazione (3.10a) che equivale alla:

$$(1 - q)^2 \geq 0$$

che è sempre vera.

Inoltre la serie $\frac{\sqrt{2}}{L} \sum_{n=0}^{\infty} [n+1]_{q^{1/2}}^{-1/2}$ converge per ogni valore di $q > 1$, ed è quindi verificato che l'operatore posizione ammette infinite estensioni autoaggiunte.

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

La ricerca dei coefficienti (che stavolta indicheremo $R_n(\lambda)$) delle autofunzioni della posizione procede come nel caso precedente, per cui si arriva alla relazione:

$$R_n(\lambda) = \frac{1}{(q; q)_n^{1/2}} D_n \left(\frac{(1-q)^{1/2}}{\sqrt{2L}} \lambda \middle| q \right)$$

dove la D_n è la stessa del caso precedente (ma si noti q al posto di q^2).

3.3.4 Costruzione CYB ($0 < q < 1$)

Stavolta dobbiamo necessariamente trattare il caso di $0 < q < 1$. Sappiamo che gli operatori bosonici sono continui e, a loro volta, gli operatori posizione e momento sono autoaggiunti. E' superfluo verificare la validità delle condizioni del teorema 3.2 per cui ci dedichiamo direttamente alla costruzione delle autofunzioni.

La relazione di ricorrenza (3.9) per i coefficienti, che in questo caso indichiamo con $T_n(\lambda)$, si scrive:

$$\frac{\sqrt{2}}{L} \lambda T_n(\lambda) = \sqrt{(1-q^{n+1})} T_{n+1}(\lambda) + \sqrt{(1-q^n)} T_{n-1}(\lambda) \quad (3.23)$$

Effettuando il cambio di variabile $2z = \frac{\sqrt{2}}{L} \lambda$ e ponendo:

$$T_n(\lambda) = (q; q)_n^{-1/2} D_n(z | q)$$

si arriva alla relazione:

$$2z D_n(z | q) = D_{n+1}(z | q) + (1-q^n) D_{n-1}(z | q) \quad (3.24)$$

che è la (3.3.2) (a meno della sostituzione $q^2 \rightarrow q$) la cui soluzione sono appunto le $D_n(z | q)$.

In funzione di esse, i coefficienti T_n si esprimono:

$$T_n(\lambda) = \frac{1}{(q; q)_n^{1/2}} D_n \left(\frac{1}{\sqrt{2L}} \lambda \middle| q \right)$$

Si noti che, poichè in questo caso l'operatore posizione è autoaggiunto, per il teorema 3.2 la serie dei coefficienti delle autofunzioni non può convergere per nessun valore complesso di λ .

Ma tali coefficienti, a meno di fattori in q equivalenti ad un cambiamento di scala della variabile, sono gli stessi dell'operatore posizione non limitato delle costruzioni ACL e Fei, per i quali la somma della serie converge **per tutti i valori complessi di λ** ! La spiegazione di ciò sta nel valore del parametro

3.4 Regole di commutazione

q , e precisamente nel fatto che stavolta stiamo considerando $0 < q < 1$. A conferma di ciò, imponendo questa restrizione anche ai due casi precedenti i relativi operatori posizione diventano limitati, quindi autoaggiunti e quindi le relative serie dei coefficienti non possono convergere.

3.4 Regole di commutazione

Abbiamo già visto che gli operatori bosonici deformati soddisfano una relazione che, in generale, può essere posta nella forma (cfr. pag. 39):

$$\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - \xi\widehat{a}^\dagger\widehat{a} = B$$

dove ξ e B caratterizzano la deformazione in esame.

Basta sostituire in questa nuova relazione gli sviluppi (3.2), che dopo qualche passaggio si ottiene:

$$[\widehat{x}, \widehat{p}] = \frac{2iLK}{\xi + 1} \left[B + (\xi - 1) \left(\frac{\widehat{x}^2}{2L^2} + \frac{\widehat{p}^2}{2K^2} \right) \right] \quad (3.25)$$

da cui risulta che, in linea generale, *il commutatore tra le posizioni e i momenti contiene dei termini quadratici in \widehat{x} e \widehat{p}* . E' solo nel caso in cui $\xi = 1$ che essi scompaiono, per cui il semplice commutatore di Heisenberg della meccanica quantistica classica (indeformata), è in realtà sono un caso speciale di una situazione più generale.

Abbiamo già ricordato, nell'introduzione, che il valore del commutatore di due operatori simmetrici determina le relazioni d'indeterminazione che gli stessi operatori devono soddisfare.

Nel prossimo paragrafo determineremo tali indeterminazioni introducendo, di volta in volta, le ξ e B opportune.

3.5 Relazioni di indeterminazione generalizzate

Prima di cominciare questa indagine è opportuno ribadire che le relazioni d'indeterminazione non valgono su tutti gli stati dello spazio di Hilbert, nè tantomeno sui domini degli operatori in esame, ma solo sull'insieme di vettori su cui è ben definito il loro commutatore. Nel caso che stiamo considerando, i nostri risultati varranno solo sugli stati f tali che:

$$f \in \mathcal{D}_{\widehat{x}\widehat{p}} \cap \mathcal{D}_{\widehat{p}\widehat{x}} \quad (3.26)$$

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

Si può dimostrare, per esempio, che gli autostati $|f_\lambda\rangle$ di \hat{x} non appartengono al dominio di \hat{p} , e viceversa. Se così non fosse, infatti, poichè ovviamente è $(\Delta\hat{x})_{f_\lambda} = 0$, si avrebbe:

$$0 = (\Delta\hat{x})_{f_\lambda}(\Delta\hat{p})_{f_\lambda} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle \right|$$

che può essere soddisfatta solo se il commutatore, su tali stati, si annulla e cioè se:

$$\hat{x}\hat{p}|f_\lambda\rangle = \hat{p}\hat{x}|f_\lambda\rangle = \lambda\hat{p}|f_\lambda\rangle$$

ovvero, data l'unicità delle autofunzioni, se $|f_\lambda\rangle$ è autofunzione di \hat{p} di autovalore uno. Data l'arbitrarietà di λ , ciò significherebbe che tutte le $|f_\lambda\rangle$ sono autofunzioni di \hat{p} di autovalore uno, ma questa è una contraddizione poichè \hat{p} , al pari di \hat{x} , ha solo autovalori di molteplicità uno.

Tornando ai vettori che soddisfano la (3.26), ad essi possono essere associate le quattro quantità:

$$a = \langle \hat{x} \rangle_f, \quad b = \langle \hat{p} \rangle_f, \quad c = (\Delta\hat{x})_f, \quad d = (\Delta\hat{p})_f$$

che sono,rispettivamente, il valor medio della posizione e del momento, e le loro indeterminazioni. Tali quattro quantità, nello spazio delle fasi bidimensionale di coordinate $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$, individuano un rettangolo di centro (a, b) e lati di lunghezza c e d rispettivamente. Le relazioni di indeterminazione, in questa interpretazione, possono essere viste come un vincolo al valore minimo dell'area A_f di questo rettangolo, definita come:

$$A_f = (\Delta\hat{x})_f(\Delta\hat{p})_f \tag{3.27}$$

e quindi ad un limite nella localizzabilità dello stato f nello spazio delle fasi. Di questa interpretazione faremo uso nel seguito.

Infine, per rendere più scorrevole la trattazione dei risultati che troveremo, ci sia consentito definire *stati di alta energia* i vettori della base canonica di indici maggiori, e *stati di bassa energia* quelli di indici minori, dove le nozioni di maggiore e minore sono lasciate volutamente vaghe.

Nel prossimo capitolo vedremo che questa licenza, nel caso dell'oscillatore armonico, corrisponde alla realtà fisica. Ma ciò potrebbe non essere vero nello studio di altri sistemi fisici.

3.5.1 Costruzione di Biedenharn

Sostituendo gli opportuni valori a ξ e B nella (3.25), il commutatore assume la forma:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{2iLK}{q^{1/2} + 1} \left[q^{-\hat{N}/2} + (q^{1/2} - 1) \left(\frac{\hat{x}^2}{2L^2} + \frac{\hat{p}^2}{2K^2} \right) \right] \tag{3.28}$$

3.5 Relazioni di indeterminazione generalizzate

Da questa discende la *relazione di indeterminazione generalizzata*:

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{LK}{q^{1/2} + 1} \left[\langle q^{-\hat{\mathcal{N}}/2} \rangle + (q^{1/2} - 1) \left(\frac{\langle \hat{x}^2 \rangle}{2L^2} + \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2K^2} \right) \right] \quad (3.29)$$

Notiamo subito che questa relazione sembra aver perso l'invarianza nello scambio $q \leftrightarrow q^{-1}$ che era stata una caratteristica della rappresentazione di Fock dell'algebra di Biedenharn (vedi discussione a pag. 32).

Che in realtà la (3.29) sia ancora invariante lo si può vedere facilmente a monte: infatti l'ultima parentesi a secondo membro del commutatore (3.28), può risciversi, usando le relazioni definitorie (3.1) a pag.55:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hat{x}^2}{2L^2} + \frac{\hat{p}^2}{2K^2} \right) &= \frac{1}{2} \left[(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \right] = \\ &= (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \left([[\hat{\mathcal{N}} + 1]]_q + [[\hat{\mathcal{N}}]]_q \right) \end{aligned}$$

Sostituendo questa nella (3.28), e utilizzando la proprietà 2.2.1 (tabella 2.2.1, pag. 29), tutti i fattori espliciti in q scompaiono e si ottiene, finalmente:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = iLK \left([[\hat{\mathcal{N}} + 1]]_q - [[\hat{\mathcal{N}}]]_q \right) \quad (3.30)$$

che è manifestamente invariante $q \leftrightarrow q^{-1}$ per la proprietà 2.2.1 (tabella 2.2.1) dei q -numeri simmetrici. Dalla (3.30) si ottengono immediatamente le indeterminazioni simultanee sulla base canonica:

$$(\Delta\hat{x})_n (\Delta\hat{p})_n \geq \frac{LK}{2} \left([[n + 1]]_q - [[n]]_q \right) \quad (3.31)$$

che implicano che la localizzazione, sullo spazio delle fasi, diventa sempre meno precisa al crescere dell'*energia*. L'area minima $A_0 = \frac{LK}{2}$ corrisponde allo stato fondamentale.

Invece ritrasformando la (3.30) utilizzando la seconda forma della proprietà 2.2.1, si perviene alla (3.28) con q^{-1} al posto di q .

Gli stessi risultati valgono, ovviamente, anche per le indeterminazioni generalizzate (3.29).

Questo dimostra l'invarianza suddetta, e di conseguenza la validità dei risultati cui perverremo sia nel caso di $q > 1$ che di $0 < q < 1$: l'uso di una piuttosto che dell'altra della (3.30) o della (3.28) nella forma con q oppure q^{-1} , diventa solo un fatto di comodità di calcoli o di opportunità di ragionamenti, come vedremo tra breve.

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

In particolare nel seguito assumiamo che sia $q > 1$ e lavoreremo con la forma (3.28), che ci permette di considerare il fattore $(q^{1/2} - 1) > 0$.

Ricordando il legame tra i valori di aspettazione di un operatore \hat{v} e del suo quadrato:

$$(\Delta\hat{v})^2 = \langle \hat{v}^2 \rangle - \langle \hat{v} \rangle^2$$

possiamo riscrivere la (3.29) nella forma:

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{x})(\Delta\hat{p}) &\geq \frac{LK}{q^{1/2} + 1} \left[\langle q^{-\hat{N}/2} \rangle + (q^{1/2} - 1) \left(\frac{\langle \hat{x} \rangle^2 + (\Delta\hat{x})^2}{2L^2} + \frac{\langle \hat{p} \rangle^2 + (\Delta\hat{p})^2}{2K^2} \right) \right] = \\ &= \frac{LK}{q^{1/2} + 1} \left[\langle q^{-\hat{N}/2} \rangle + (q^{1/2} - 1) \left(\Phi + \frac{(\Delta\hat{x})^2}{2L^2} + \frac{(\Delta\hat{p})^2}{2K^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

dove abbiamo posto:

$$\left(\frac{\langle \hat{x} \rangle^2}{2L^2} + \frac{\langle \hat{p} \rangle^2}{2K^2} \right) = \Phi \quad (3.33)$$

che è un funzionale (non lineare) positivo:

$$\Phi : \mathcal{D}_M \rightarrow \mathbb{C}$$

ed è facile verificare che agisce in questo modo:

$$\Phi(f) = \langle \hat{a} \rangle_f \langle \hat{a}^\dagger \rangle_f \quad (3.34)$$

Torniamo adesso allo studio delle implicazioni dovute alla (1.3). Nel caso classico la relazione di Heisenberg, graficata sul piano (X, Y) , con $X = \Delta\hat{x}$ e $Y = \Delta\hat{p}$, individua, come insieme degli stati fisici con indeterminazioni compatibili, una regione di spazio nella concavità di un ramo di iperbole che ha per asintoti gli assi coordinati (figura 1.1, pag. 12).

Nel caso attuale la regione permessa è ancora delimitata da un arco di iperbole, che ha l'andamento graficato in figura 3.3.

In coordinate polari:

$$\frac{\Delta\hat{x}}{\sqrt{2}L} = r \cos \theta \quad \frac{\Delta\hat{p}}{\sqrt{2}K} = r \sin \theta \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.35)$$

essa ha la forma implicita:

$$r^2 \geq \frac{\langle q^{-\hat{N}/2} \rangle + (q^{1/2} - 1)\Phi}{(q^{1/2} + 1) \sin 2\theta - (q^{1/2} - 1)} \quad (3.36)$$

3.5 Relazioni di indeterminazione generalizzate

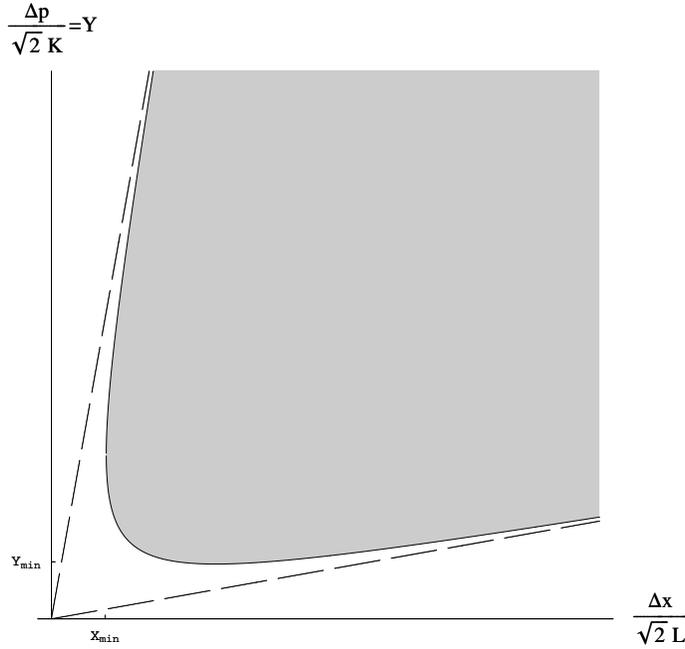


Figura 3.3: La regione permessa per i valori dell'indeterminazione simultanea della posizione e del momento, nella costruzione Bie, è individuata dalla colorazione scura (le due rette tratteggiate sono gli asintoti dell'iperbole).

Poiché stiamo considerando $q > 1$ il denominatore è sempre positivo, l'unico vincolo affinché r sia ben definito è che sia:

$$\sin 2\theta \geq \frac{q^{1/2} - 1}{q^{1/2} + 1} \equiv \gamma \quad (3.37)$$

Si noti che questa è ancora un'espressione invariante $q \leftrightarrow q^{-1}$.

Ciò significa che l'angolo θ deve essere compreso tra:

$$\arcsin \gamma \leq 2\theta \leq (\pi - \arcsin \gamma) \quad (3.38)$$

Questi due angoli estremi, che indichiamo rispettivamente con θ_- e θ_+ , individuano i due asintoti, poiché $r \rightarrow +\infty$ per $\theta \rightarrow \theta_{\pm}$.

Si noti anche che l' "apertura" dell'arco di iperbole diminuisce all'aumentare di q , e cioè quanto più ci si discosta dal limite classico $q \rightarrow 1$.

Come si vede dalla figura, l'esistenza dei due asintoti non paralleli agli assi coordinati comporta l'esistenza di un valore minimo della sola indeterminazione sulla posizione (così come del momento), che adesso cerchiamo di

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

determinare.

Poniamo:

$$\frac{\Delta\hat{x}}{\sqrt{2}L} = X \quad \frac{\Delta\hat{p}}{\sqrt{2}K} = Y \quad (3.39)$$

nella (3.32), e osserviamo che Y è una funzione a due valori di X , i cui rami corrispondono, al variare di X , alle due radici dell'equazione di secondo grado in Y :

$$(q^{1/2} - 1)Y^2 - 2(q^{1/2} + 1)YX + \left(\langle q^{-\hat{\mathcal{N}}/2} \rangle + (q^{1/2} - 1)(\Phi + X^2) \right) = 0 \quad (3.40)$$

Il punto di minimo di X è quello in cui le due radici coincidono, e pertanto è individuato dalla condizione che vi si annulli il discriminante della precedente equazione, e cioè:

$$(q^{1/2} + 1)^2 X_0^2 = (q^{1/2} - 1) \left(\langle q^{-\hat{\mathcal{N}}/2} \rangle + (q^{1/2} - 1)(\Phi + X_0^2) \right) \quad (3.41)$$

da cui:

$$\Delta\hat{x}_{min} = \sqrt{2}LX_0 = L\sqrt{\frac{q^{1/2} - 1}{2q^{1/2}} \left(\langle q^{-\hat{\mathcal{N}}/2} \rangle + (q^{1/2} - 1)\Phi \right)} \quad (3.42)$$

Tale risultato coincide con quello determinabile col metodo illustrato in [?]. Purtroppo nella (3.42) c'è una dipendenza esplicita (mediante l'operatore $\hat{\mathcal{N}}$), nei vettori $f \in \mathcal{H}$ su cui andiamo a valutare la minima indeterminazione della posizione. Pertanto non si riesce a determinare un valore di lunghezza assoluto. Poichè sulla base canonica $|\underline{n}\rangle$ si ha $\Phi(n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, valutando $\Delta\hat{x}_{min}$ si ottengono le stime:

$$\Delta\hat{x}_{min}|_{|\underline{0}\rangle} = L\sqrt{\frac{q^{1/2} - 1}{2q^{1/2}}}, \quad \Delta\hat{x}_{min}|_{|\underline{n}\rangle} = L\sqrt{\frac{q^{1/2} - 1}{2q^{1/2}}} q^{-n/4}$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta\hat{x}_{min}|_{|\underline{n}\rangle} = 0$. I vettori della base hanno così la strana caratteristica che la posizione può essere determinata con precisione crescente all'aumentare dell'energia, nonostante l'area A_n debba aumentare altrettanto velocemente con n (cfr. eq. (3.31)).

Infine è possibile valutare $\Delta\hat{x}_{min}$ sugli stati coerenti trovando che:

$$\Delta\hat{x}_{min}|_{|z\rangle} = L\sqrt{\frac{q^{1/2} - 1}{2q^{1/2}} \left(\frac{\exp_q(q^{-1/2}|z|^2)}{\exp_q(|z|^2)} + (q^{1/2} - 1)|z|^2 \right)}$$

3.5 Relazioni di indeterminazione generalizzate

3.5.2 Costruzione ACL

Stavolta la (3.25) assume la forma:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{2iLK}{q^2 + 1} \left[\mathbf{1} + (q^2 - 1) \left(\frac{\hat{x}^2}{2L^2} + \frac{\hat{p}^2}{2K^2} \right) \right]$$

che impone la relazione di indeterminazione generalizzata:

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{LK}{q^2 + 1} \left[\mathbf{1} + (q^2 - 1) \left(\frac{\langle \hat{x}^2 \rangle}{2L^2} + \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2K^2} \right) \right] \quad (3.43)$$

Utilizzando la relazione:

$$[n + 1]_q - q^2[n]_q = 1$$

si ottiene la forma alternativa:

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{LK}{2} ([\hat{\mathcal{N}} + 1]_q - [\hat{\mathcal{N}}]_q)$$

Le aree necessarie a localizzare la base canonica nello spazio delle fasi risultano immediatamente pari a:

$$A_n = \Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{LK}{2} ([n + 1]_q - [n]_q) = \frac{LK}{2} q^{2n}$$

Per $q > 1$ esse aumentano esponenzialmente con l'energia. La situazione è completamente invertita nel caso di $q < 1$, in cui l'area massima A_0 corrisponde allo stato fondamentale, e diminuisce esponenzialmente con n .

Introducendo le coordinate polari:

$$\frac{\Delta\hat{x}}{\sqrt{2}L} = r \cos \theta \quad \frac{\Delta\hat{p}}{\sqrt{2}K} = r \sin \theta \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.44)$$

la (3.43) diventa:

$$r^2 \geq \frac{1 + (q^2 - 1)\Phi}{(q^2 + 1) \sin 2\theta - (q^2 - 1)} \quad (3.45)$$

dove Φ è il funzionale definito in (3.33). La (3.45) è l'equazione implicita di un arco di iperbole. Per $q > 1$ essa è ben definita purché:

$$\sin 2\theta \geq \frac{(q^2 - 1)}{(q^2 + 1)} \equiv \varphi$$

ovvero:

$$\arcsin \varphi \leq 2\theta \leq (\pi - \arcsin \varphi)$$

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

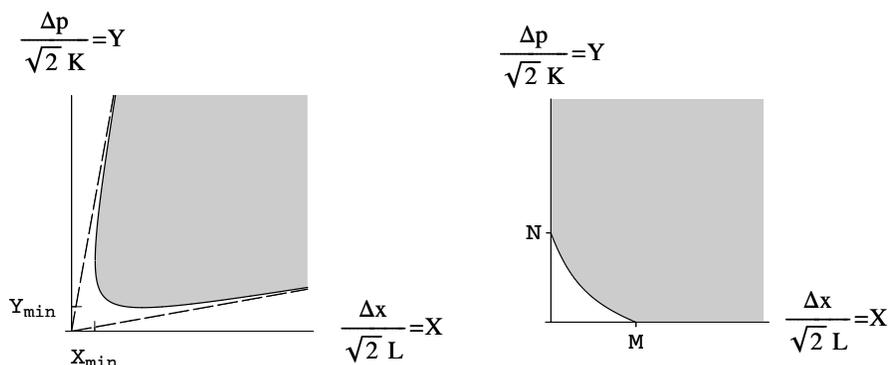


Figura 3.4: Indeterminazioni della posizione e del momento della costruzione ACL, nei due casi $q > 1$ e $0 < q < 1$. Le regioni permesse sono individuate dalla colorazione scura.

dove i due angoli estremi individuano gli asintoti dell'iperbole, la cui apertura diminuisce all'aumentare di q .

Per $q < 1$ l'iperbole, nel quadrante $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ è sempre ben definita, per cui i suoi asintoti si trovano al di fuori della regione di nostro interesse.

I grafici corrispondenti ai due casi sono rappresentati in figura 3.4, dove le zone permesse ai valori delle indeterminazioni sono quelle in grigio.

Consideriamo il caso di $q > 1$; effettuando la sostituzione:

$$\frac{\Delta \hat{x}}{\sqrt{2}L} = X \quad \frac{\Delta \hat{p}}{\sqrt{2}K} = Y \quad (3.46)$$

e procedendo come nel caso precedente, si arriva a valutare il seguente valore per l'indeterminazione della sola $\Delta \hat{x}$:

$$\Delta \hat{x}_{min} = L \sqrt{\frac{q^2 - 1}{2q^2} (1 + (q^2 - 1)\Phi)} \quad (3.47)$$

E' evidente che, in questo caso, **abbiamo trovato un valor minimo assoluto dell'indeterminazione:**

$$\ell_0 \equiv \Delta \hat{x}_{min} = L \sqrt{\frac{q^2 - 1}{2q^2}}$$

indipendentemente dallo stato fisico su cui la andiamo a valutarla [?].

3.5 Relazioni di indeterminazione generalizzate

3.5.3 Costruzione di Feinsilver

A differenza di quanto visto a proposito delle proprietà del relativo operatore posizione (paragrafo 3.3.3), che è risultato essere simile a quello della costruzione ACL, nella valutazione delle regole di commutazione torna a pesare la struttura algebrica degli operatori bosonici, e per questo troveremo risultati molto diversi rispetto al caso precedente.

La (3.25) stavolta assume la semplice forma:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = iLKq^{\hat{N}}$$

e le relazioni di indeterminazione diventano:

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{LK}{2} \langle q^{\hat{N}} \rangle \quad (3.48)$$

Le aree \mathbf{A}_n corrispondenti ai vettori di base, nello spazio delle fasi vanno come q^n e quindi aumentano o diminuiscono esponenzialmente con l'energia, a seconda che sia q maggiore o minore di 1.

In coordinate polari:

$$\frac{\Delta\hat{x}}{\sqrt{2L}} = r \cos \theta \quad \frac{\Delta\hat{p}}{\sqrt{2K}} = r \sin \theta \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.49)$$

la (3.48) individua l'iperbole:

$$r^2 \geq \frac{\langle q^{\hat{N}} \rangle}{2 \sin 2\theta} \quad (3.50)$$

che ha per asintoti gli assi coordinati, come mostrato in figura 3.5. In questo caso si ritrovano le stesse implicazioni della relazione di indeterminazione di Heisenberg, con l'unica differenza che l'arco di iperbole si sposta in funzione dello stato $f \in \langle$ su cui andiamo a valutare le indeterminazioni.

Non è possibile trovare indeterminazioni nella sola $\Delta\hat{x}$.

3.5.4 Costruzione CYB

In quest'ultimo caso si ottiene il commutatore:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = 2iLK \frac{(1-q)}{1+q} \left[1 - \left(\frac{\hat{x}^2}{2L^2} + \frac{\hat{p}^2}{2K^2} \right) \right]$$

da cui discende la relazione di indeterminazione:

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq LK \frac{(1-q)}{1+q} \left[1 - \left(\frac{\Delta\hat{x}^2}{2L^2} + \frac{\Delta\hat{p}^2}{2K^2} \right) - \Phi \right] \quad (3.51)$$

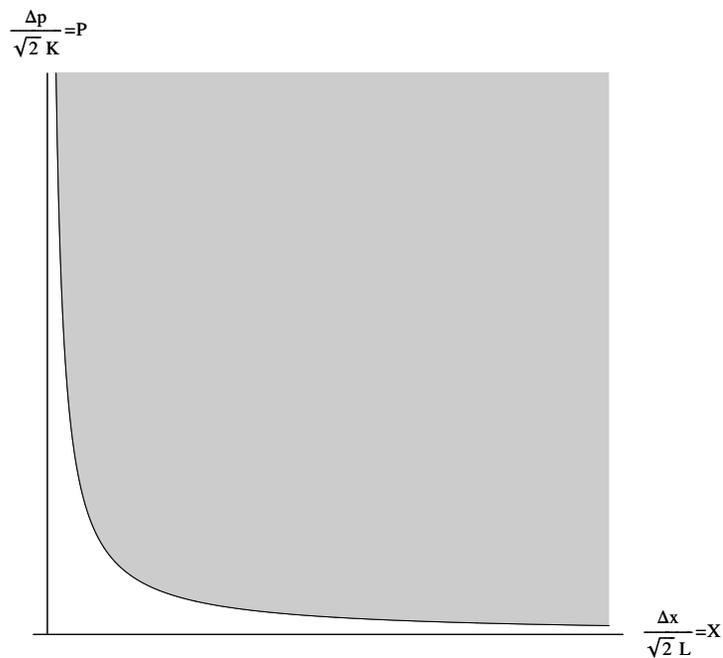


Figura 3.5: Indeterminazioni simultanee della posizione e del momento nella costruzione Fei (sono individuate dalla colorazione scura).

In coordinate polari:

$$\frac{\Delta\hat{x}}{\sqrt{2}L} = r \cos \theta \quad \frac{\Delta\hat{p}}{\sqrt{2}K} = r \sin \theta \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.52)$$

si ottiene:

$$r^2 \geq \frac{1-q)(1-\Phi)}{(1+q) \sin 2\theta + (1-q)} \quad (3.53)$$

che è sempre ben definita per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Gli asintoti si trovano oltre la zona d'interesse per cui la limitazione alle indeterminazioni è quella mostrata nel secondo grafico della figura 3.4.

3.6 Considerazioni sullo spettro e sulle indeterminazioni dell'operatore posizione

Prima di affrontare, nel prossimo capitolo, lo studio di un sistema fisico, è bene commentare qualitativamente i risultati appena trovati. Per ulteriori

3.6 Considerazioni sullo spettro e sulle indeterminazioni dell'operatore posizione

precisazioni, il concetto di localizzabilità di cui ci serviremo è quello descritto in Appendice A.1.2.

Abbiamo visto che nelle costruzioni Bie, e, per $q > 1$, ACL e Fei, l'operatore posizione non è limitato, ed il teorema 3.4 ci assicura che il suo spettro è discreto e si estende a $\pm\infty$.

Dal paragrafo precedente sappiamo inoltre che il dominio consiste, in parte, di autostati della posizione, su cui non valgono i vincoli dell'indeterminazione (3.29) e (3.42), ed in parte consiste, invece, di vettori che a questi vincoli sono soggetti. Tutto ciò è perfettamente compatibile con una descrizione dello spazio a struttura reticolare, cioè fatto di un'insieme (infinito) di singoli punti distinti, in quanto gli autostati della posizione rappresenterebbero gli stati perfettamente localizzati su uno, e uno solo, di tali punti. Invece un qualsiasi altro generico vettore indicherebbe uno stato "diffuso" su più punti del reticolo. Data la **distanza finita** tra tali punti (poiché per il teorema 3.4 lo spettro di \hat{x} non ammette punti di accumulazione finiti), ci sarebbe una *intrinseca indeterminazione minima* nella posizione, poiché non sarebbe possibile costruire, su tale reticolo, stati localizzati su un insieme di punti arbitrariamente vicini (funzioni δ di Dirac).

Cosa che invece è possibile fare nel caso di spettro continuo, in particolare nel caso in cui l'operatore posizione è limitato (ACL e Fei per $q < 1$, CYB). Per queste costruzioni abbiamo trovato l'inusuale regione d'indeterminazione corrispondente al secondo grafico di figura 3.4.

Il fatto che la zona permessa arrivi a toccare gli assi coordinati ci suggeriscono che è possibile avere stati con valore del momento arbitrariamente preciso ($\Delta\hat{p} \rightarrow 0$) e che siano localizzati in uno spazio finito ($\Delta\hat{x} \sim M$).

Ciò si spiega semplicemente col fatto che stiamo descrivendo una regione di spazio limitata (lo spettro di \hat{x} rappresenta, al massimo, l'intervallo $I = [-\|\hat{x}\|, \|\hat{x}\|]$). Per questo è possibile costruire pacchetti d'onda di momento determinato, senza inevitabilmente eccedere la dimensione $2\|\hat{x}\|$ dello spazio.

Capitolo 3. Proprietà degli operatori posizione e momento generalizzati

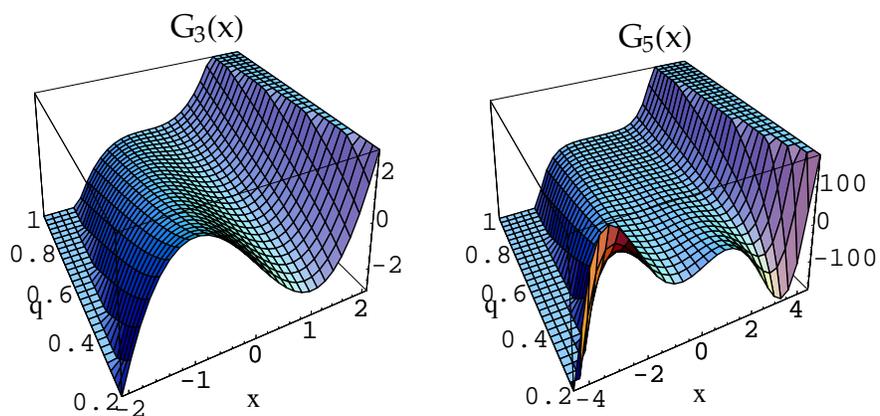


Figura 3.6: Andamenti di $G_3(x|q)$ e $G_5(x|q)$ per $q = [0.2, 1]$. Si notino le differenti scale usate per l'asse z .

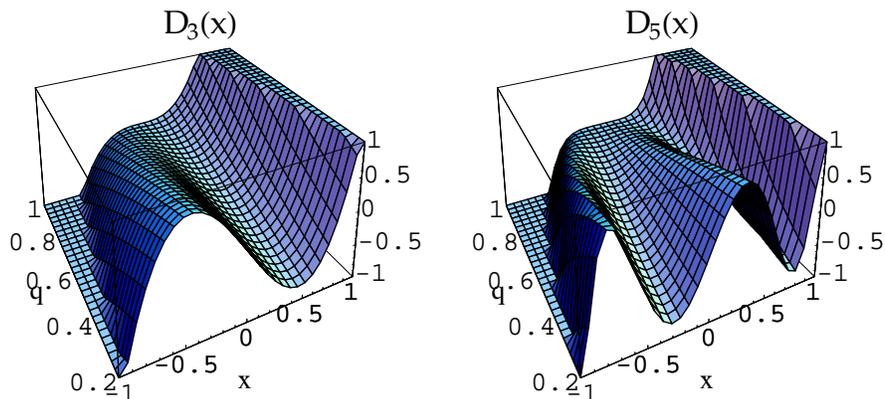


Figura 3.7: Andamenti di $D_3(x|q)$ e $D_5(x|q)$ per $q = [0.2, 1]$.

Capitolo 4

Studio di un sistema fisico deformato: l'oscillatore armonico

Il sistema che vogliamo studiare è descritto ancora dall'hamiltoniana:

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad (4.1)$$

dove stavolta gli operatori posizione e momento andranno espressi mediante le (3.1) in funzione degli operatori bosonici deformati.

Mettendo in evidenza la quantità $\hbar\omega$ che ha le dimensioni di un'energia, si può passare agli operatori adimensionali \mathbf{x} e \mathbf{p} e poi a quelli bosonici \mathcal{A} e \mathcal{A}^\dagger :

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} (\mathbf{p}^2 + \mathbf{x}^2) = \frac{\hbar\omega}{2} (\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger + \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}) \quad (4.2)$$

dove le scale di lunghezza e momento usate sono:

$$L = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, K = \sqrt{\hbar m\omega} \quad (4.3)$$

Come si vede l'hamiltoniana risulta autoaggiunta, e le sue autofunzioni sono, come nel caso indeformato, le autofunzioni dell'operatore numero, poiché sappiamo che i due operatori $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger$ e $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ commutano con \hat{N} e quindi sono contemporaneamente diagonalizzabili.

Ciò che non è più vero, in questo caso, è che l'hamiltoniana coincide con l'operatore numero, a meno di una costante (cfr. pag. 18).

Adesso andremo a vedere le proprietà specifiche dell'oscillatore armonico nelle varie costruzioni.

4.1 Costruzione di Biedenharn

In questo caso l'hamiltoniana (4.2) si può porre nella forma specifica:

$$\widehat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left([[\widehat{\mathcal{N}} + 1]]_q + [[\widehat{\mathcal{N}}]]_q \right)$$

cui corrispondono i livelli energetici:

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} \left([[n + 1]]_q + [[n]]_q \right)$$

In figura 4.1 è graficato l'andamento di alcuni autovalori al variare di q . I livelli energetici classici si ritrovano per $q = 1$.

L'hamiltoniana risulta inferiormente limitata, e l'energia dello stato fondamentale, indipendentemente dal valore del parametro di deformazione, è ancora quella classica:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Una forma equivalente per l'hamiltoniana è:

$$\widehat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(q^{-\widehat{\mathcal{N}}/2} + (q^{1/2} + 1)\widehat{a}^\dagger\widehat{a} \right) \quad (4.4)$$

che si ottiene utilizzando la relazione (2.20a) di pag. 26 tra gli operatori bosonici.

L'evoluzione temporale degli operatori, a meno di un fattore, è data dal commutatore con l'hamiltoniana (cfr. (1.13) di pag. 16).

A causa delle più complesse relazioni algebriche tra i vari operatori, può essere posta in varie forme. Alla fine abbiamo constatato che il modo più conveniente è quello di sostituire ovunque possibile l'operatore diagonale $\widehat{\mathcal{N}}$ e le sue funzioni.

In questo modo si trova che:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{a}} &= \frac{i}{\hbar} [\widehat{H}_{oa}, \widehat{a}] = \frac{i\omega}{2} \left[[[\widehat{\mathcal{N}} + 1]]_q + [[\widehat{\mathcal{N}}]]_q, \widehat{a} \right] = \\ &= \frac{i\omega}{2} \left([[\widehat{\mathcal{N}} + 1]]_q \widehat{a} + [[\widehat{\mathcal{N}}]]_q \widehat{a} - \widehat{a} [[\widehat{\mathcal{N}} + 1]]_q - \widehat{a} [[\widehat{\mathcal{N}}]]_q \right) = \\ &= -\frac{i\omega}{2} \left(\widehat{a} [[\widehat{\mathcal{N}} + 1]]_q - [[\widehat{\mathcal{N}}]]_q \widehat{a} \right) = \\ &= -\frac{i\omega}{2} \left([[\widehat{\mathcal{N}} + 2]]_q - [[\widehat{\mathcal{N}}]]_q \right) \widehat{a} = -i\Omega^a(\widehat{\mathcal{N}})\widehat{a} \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1 Costruzione di Biedenharn

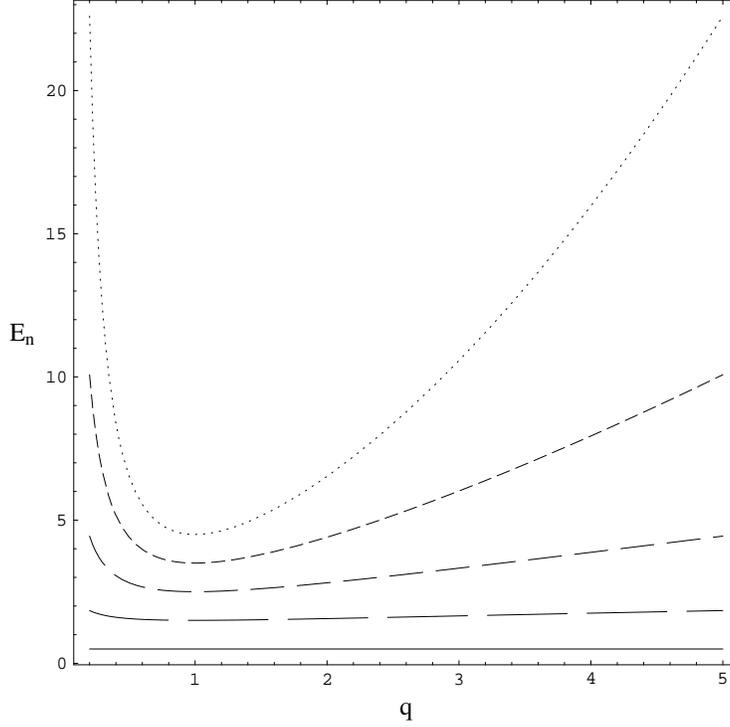


Figura 4.1: Primi 5 livelli energetici (in unità $\hbar\omega$) dell'O.A. nella costruzione di Biedenharn.

dove abbiamo utilizzato la (2.63a) di pag. 48 per commutare \hat{a} e le funzioni dell'operatore $\hat{\mathcal{N}}$, e abbiamo definito l'operatore diagonale autoaggiunto:

$$\Omega^a(\hat{\mathcal{N}}) = \frac{\omega}{2} \left([[\hat{\mathcal{N}} + 2]]_q - [[\hat{\mathcal{N}}]]_q \right) \quad (4.6)$$

Ad ogni autostato dell'hamiltoniana questo operatore associa una frequenza caratteristica che si può esprimere come differenza tra due livelli successivi:

$$\Omega^a(\hat{\mathcal{N}}) | \mathbf{n} \rangle \equiv \omega_n^a = \frac{\omega}{2} \left([[n + 2]]_q - [[n]]_q \right) = \frac{1}{\hbar} (E_{n+1} - E_n) \quad (4.7)$$

Sostituendo ai q -numeri la serie finita della (2.23) di pag. 28 si verifica inoltre che:

$$\omega_n^a = \frac{\omega}{2} \left(q^{\frac{n+1}{2}} + q^{-\frac{n+1}{2}} \right) \quad (4.8)$$

Con lo stesso procedimento precedente, ed utilizzando la (2.63b), si ottiene l'evoluzione temporale di \hat{a}^\dagger :

$$\hat{a}^\dagger = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{oa}, \hat{a}^\dagger] = i\hat{a}^\dagger \Omega^a(\hat{\mathcal{N}}) \quad (4.9)$$

Capitolo 4. Studio di un sistema fisico deformato: l'oscillatore armonico

mentre l'operatore numero è una costante del moto:

$$\dot{\hat{\mathcal{N}}} = 0$$

Gli operatori dipendenti dal tempo sono allora:

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= e^{-i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}})t}\hat{a} = \hat{a}e^{-i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}}-1)t} \\ \hat{a}^\dagger(t) &= \hat{a}^\dagger e^{i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}})t} = e^{i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}}-1)t}\hat{a}^\dagger \\ \hat{x}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{-i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}})t}\hat{a} + e^{i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}}-1)t}\hat{a}^\dagger \right) \\ \hat{p}(t) &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(e^{i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}}-1)t}\hat{a}^\dagger - e^{-i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}})t}\hat{a} \right)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Questi risultati sono in accordo con quelli trovati in [?].

E' noto che, in quanto stati stazionari, gli autostati dell'energia non oscillano.

Se invece consideriamo una generica combinazione di autostati del tipo:

$$|\phi\rangle = \frac{|\mathbf{n}\rangle + |\mathbf{n}+1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Troviamo:

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}(t) \rangle_\phi &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \phi | \left(e^{-i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}})t}\hat{a} + e^{i\Omega^a(\hat{\mathcal{N}}-1)t}\hat{a}^\dagger \right) | \phi \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{-i\omega_n^a t} [[n+1]]_q + e^{i\omega_n^a t} [[n+1]]_q \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [[n+1]]_q \cos \omega_n^a t\end{aligned}\tag{4.11}$$

Come si vede il valore di aspettazione oscilla con frequenza ω_n^a e l'ampiezza dell'oscillazione va come $[[n+1]]_q$.

L'energia degli stati coerenti (vedi (2.73), pag. 51) si valuta facilmente

4.1 Costruzione di Biedenharn

utilizzando la forma (4.4) dell'hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{H}_{oa} \rangle_z &= \frac{\hbar\omega}{2} \langle z | \left(q^{-\widehat{N}/2} + (q^{1/2} + 1) \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \right) | z \rangle = \\
&= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\langle z | q^{-\widehat{N}/2} | z \rangle + (q^{1/2} + 1) \langle \widehat{a} z | \widehat{a} z \rangle \right) = \\
&= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\left(\exp_q(|z|^2) \right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{-k/2} |z|^{2k}}{[[k]]_q!} + (q^{1/2} + 1) |z|^2 \right) = \quad (4.12) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\exp_q(q^{-1/2} |z|^2)}{\exp_q(|z|^2)} + (q^{1/2} + 1) |z|^2 \right)
\end{aligned}$$

I valori di aspettazione, per $t = 0$, della posizione e del momento sono semplicemente:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{x} \rangle_z &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle z | (\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger) | z \rangle = \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (z + \bar{z}) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |z| \cos \phi \quad (4.13a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{p} \rangle_z &= i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \langle z | (\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}) | z \rangle = \\
&= i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\bar{z} - z) = \sqrt{2\hbar m \omega} |z| \sin \phi \quad (4.13b)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $z = |z|e^{i\phi}$.

La loro evoluzione temporale è invece complicata dalla comparsa delle frequenze caratteristiche ω_n^a di ogni componente energetica presente nello stato coerente. Si può verificare infatti che:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{x}(t) \rangle_z &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle z | (e^{-i\Omega^a(\widehat{N})t} \widehat{a} + \widehat{a}^\dagger e^{i\Omega^a(\widehat{N})t}) | z \rangle = \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \exp_q(|z|^2)^{-1} \left(\mathcal{R}e(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{[[k]]_q!} \cos \frac{\omega_k^a t}{2} - \mathcal{I}m(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{[[k]]_q!} \sin \frac{\omega_k^a t}{2} \right) = \\
&= |z| \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \exp_q(|z|^2)^{-1} \left(\cos \phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{[[k]]_q!} \cos \frac{\omega_k^a t}{2} - \sin \phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{[[k]]_q!} \sin \frac{\omega_k^a t}{2} \right)
\end{aligned}$$

4.2 Costruzioni ACL e Fei

Tratteremo in maniera unificata queste due costruzioni poiché conducono essenzialmente agli stessi risultati¹, almeno fino alla trattazione degli stati coerenti.

L'hamiltoniana (4.2) assume la forma:

$$\widehat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left([\widehat{\mathcal{N}} + 1]_q + [\widehat{\mathcal{N}}]_q \right)$$

i cui livelli energetici:

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} ([n + 1]_q + [n]_q)$$

sono ancora inferiormente limitati dal livello fondamentale classico $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, indipendentemente dal valore di q .

Esplicitando gli $[n]_q$ i vari livelli si possono scrivere nella forma:

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2(1 - q^2)} (2 - q^{2n}(1 + q^2)) \quad (4.14)$$

Tra i casi $q > 1$ e $0 < q < 1$ c'è la notevole differenza che nel secondo caso l'hamiltoniana è superiormente limitata in poiché i livelli energetici tendono asintoticamente verso il valore limite:

$$E_\infty = \frac{\hbar\omega}{(1 - q^2)}$$

In figura 4.2 è mostrato l'andamento degli autovalori dell'hamiltoniana al variare di q nei due casi citati.

L'evoluzione temporale degli operatori è data dalle analoghe delle (4.10):

$$\begin{aligned} \widehat{a}(t) &= e^{-i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}})t} \widehat{a} = \widehat{a} e^{-i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}}-1)t} \\ \widehat{a}^\dagger(t) &= \widehat{a}^\dagger e^{i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}})t} = e^{i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}}-1)t} \widehat{a}^\dagger \\ \widehat{x}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{-i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}})t} \widehat{a} + e^{i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}}-1)t} \widehat{a}^\dagger \right) \\ \widehat{p}(t) &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(e^{i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}}-1)t} \widehat{a}^\dagger - e^{-i\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}})t} \widehat{a} \right) \end{aligned}$$

¹L'unica differenza sta nella sostituzione $q \rightarrow q^{1/2}$ nel caso di Feinsilver.

4.2 Costruzioni ACL e Fei

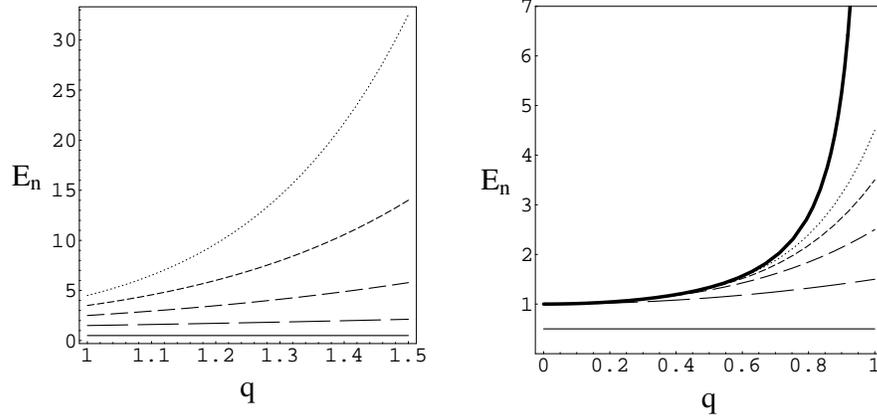


Figura 4.2: Primi 5 livelli energetici (in unità $\hbar\omega$) dell'O.A. nella costruzione CYB. Nel secondo grafico, la curva a tratto spesso indica il limite superiore dell'energia.

dove stavolta compare l'operatore:

$$\Omega^A(\widehat{\mathcal{N}}) = \frac{\omega}{2} \left([\widehat{\mathcal{N}} + 2]_q - [\widehat{\mathcal{N}}]_q \right)$$

Le frequenze associate ad ogni autostato sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \omega_n^A &\equiv \Omega^A(\widehat{\mathcal{N}}) | \mathbf{n} \rangle = \frac{\omega}{2} ([n + 2]_q - [n]_q) = \\ &= \frac{1}{\hbar} (E_{n+1} - E_n) = \frac{\omega q^{2n}}{2} (1 + q^2) \end{aligned}$$

Si noti che per $q < 1$ le frequenze caratteristiche vanno a zero al crescere del livello energetico.

Il valor medio della posizione di un generico stato del tipo:

$$| \phi \rangle = \frac{| \mathbf{n} \rangle + | \mathbf{n} + 1 \rangle}{\sqrt{2}}$$

è dato dalla:

$$\langle \widehat{x}(t) \rangle_\phi = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [n + 1]_q \cos \omega_n^A t$$

analoga della (4.11).

Capitolo 4. Studio di un sistema fisico deformato: l'oscillatore armonico

Classicamente ad ogni livello energetico dell'oscillatore armonico corrisponde un'elongazione massima $x_{m.el.}$, individuata nell'espressione dell'energia (4.1) dall'annullarsi del momento, e cioè:

$$\frac{m\omega^2}{2}x_{m.el.}^2 = E \quad (4.15)$$

Addirittura nel caso $q < 1$ abbiamo un limite superiore ai livelli energetici, possiamo quindi pensare di valutare quale elongazione massima gli corrisponda:

$$x_{m.el.} = \sqrt{\frac{2E_\infty}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega(1-q^2)}} = L\sqrt{\frac{2}{(1-q^2)}} = \|\hat{x}\| \quad (4.16)$$

dove abbiamo usato le (3.13) ed il valore (4.3) di L . Abbiamo così che l'ampiezza delle oscillazioni non può eccedere l'ampiezza dello spettro dell'operatore posizione.

Lo stesso risultato vale nel caso di Feinsilver.

Per quanto riguarda i valori di aspettazione sugli stati coerenti, introducendo la forma equivalente dell'hamiltoniana nel caso della costruzione ACL:

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\mathbf{1} + (q^2 + 1)\hat{A}^\dagger\hat{A} \right)$$

l'energia risulta essere:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_{oa} \rangle_z &= \frac{\hbar\omega}{2} \langle z | \left(\mathbf{1} + (q^2 + 1)\hat{A}^\dagger\hat{A} \right) | z \rangle = \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (1 + (q^2 + 1)|z|^2) \quad (\text{costruzione ACL}) \end{aligned}$$

Nel caso dell'algebra di Feinsilver l'hamiltoniana può essere invece posta nella forma:

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(q^{\hat{N}} + 2\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha} \right)$$

ed i corrispondenti valori energetici sono (cfr. con gli stati coerenti di Biedenharn):

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_{oa} \rangle_z &= \frac{\hbar\omega}{2} \langle z | \left(q^{\hat{N}} + 2\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha} \right) | z \rangle = \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\exp_q(q|z|^2)}{\exp_q(|z|^2)} + 2|z|^2 \right) \quad (\text{costruzione Fei}) \end{aligned}$$

I valori di aspettazione $\langle \hat{x} \rangle_z$ e $\langle \hat{p} \rangle_z$ rimangono perfettamente immutati rispetto alle (4.13), e allo stesso modo l'andamento col tempo di questi valori col

4.3 Costruzione CYB

tempo non è facilmente esprimibile a causa della presenza delle frequenze caratteristiche di ogni livello energetico.

Per esempio si verifica che in entrambe le costruzioni ACL e Fei:

$$\langle \hat{x}(t) \rangle_z = |z| \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \exp_q(|z|^2)^{-1} \times \\ \times \left(\cos \phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{[k]_q!} \cos \frac{\omega_k^A}{2} t - \sin \phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{[k]_q!} \sin \frac{\omega_k^A}{2} t \right)$$

con l'opportuna sostituzione $q \rightarrow q^{1/2}$.

4.3 Costruzione CYB

L'hamiltoniana ha in questo caso la forma:

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\{\hat{\mathcal{N}} + 1\}_q + \{\hat{\mathcal{N}}\}_q \right)$$

che ammette gli autovalori:

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} (2 - q^n(q + 1))$$

il cui limite superiore è $E_{\infty} = \hbar\omega$. Inoltre la loro sequenza è ancora inferiormente limitata, ma dal dal valore fondamentale *non classico*:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} (1 - q)$$

Il valore classico si ottiene per $q = 0$ in corrispondenza del quale la rappresentazione degli operatori diventa degenera (cfr. paragrafo 2.3.3). Si ricordi a questo proposito che, di tutti le algebre bosoniche deformate questa è l'unica che non ha limite classico.

In figura 4.3 è graficato l'andamento di alcuni autovalori.

Anche in questo caso possiamo valutare l'elongazione massima $x_{m.el.}$, in corrispondenza del limite superiore dell'energia:

$$x_{m.el.} = \sqrt{\frac{2E_{\infty}}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} = \sqrt{2}L = \|\hat{x}\| \quad (4.17)$$

dove abbiamo usato le (3.13) ed il valore (4.3) di L . Anche in questo caso l'ampiezza delle oscillazioni non eccede lo spettro dell'operatore \hat{x} .

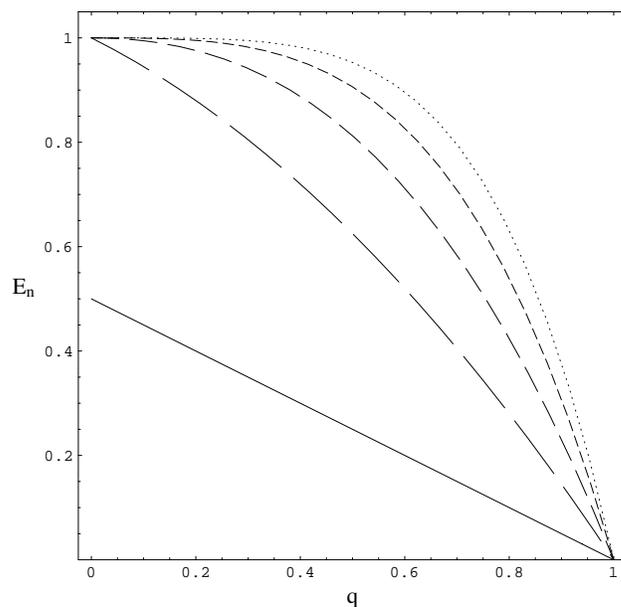


Figura 4.3: Primi 5 livelli energetici (in unità $\hbar\omega$) dell'O.A. nella costruzione CYB. Il segmento di retta discendente è l'energia E_0 dello stato fondamentale. Il livello $E_\infty = 1$ è il limite superiore dell'energia.

L'evoluzione temporale degli operatori è data dalle analoghe delle (4.10) con la sostituzione del nuovo operatore $\Omega^b(\hat{\mathcal{N}})$ di autovalori :

$$\begin{aligned}\omega_n^b &\equiv \Omega^b(\hat{\mathcal{N}}) | \mathbf{n} \rangle = \frac{\omega}{2} (\{n+2\}_q - \{n\}_q) = \\ &= \frac{1}{\hbar} (E_{n+1} - E_n) = \frac{\omega q^n}{2} (1 - q^2)\end{aligned}$$

Anche in questo caso le frequenze caratteristiche diminuiscono al crescere del livello energetico.

Possiamo valutare, sugli stati coerenti, l'hamiltoniana equivalente:

$$\hat{H}_{oa} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(1 - q + (1 + q) \hat{b}^\dagger \hat{b} \right)$$

4.4 Conclusioni

che fornisce i valori d'aspettazione:

$$\langle \widehat{H}_{oa} \rangle_z = \frac{\hbar\omega}{2} \left((1-q) + (1+q)|z|^2 \right)$$

Tutti gli altri risultati sono analoghi ai casi precedenti.

4.4 Conclusioni

Abbiamo così scoperto che l'oscillatore armonico, trattato con gli operatori posizione e momento indotti dalle q -deformazioni bosoniche, nel caso in cui tali operatori siano non limitati presenta uno spettro inferiormente limitato dal livello fondamentale classico $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, ma con livelli energetici la cui separazione $E_{n+1} - E_n$ aumenta esponenzialmente con n , e che quindi non sono più ugualmente spazati.

Anche l'andamento delle oscillazioni non è più descrivibile mediante l'unica frequenza ω , ma si ha la comparsa di differenti frequenze di oscillazione, ognuna caratteristica di un livello energetico.

E' stata poi determinata l'evoluzione temporale degli operatori posizione e momento, ed infine il valore dell'energia negli stati coerenti.

Nel caso in cui si considerino gli operatori posizione e momento limitati, si scopre che il sistema descritto è ancora una particella soggetta ad una forza di richiamo elastica, ma che non riesce ad oltrepassare una certa elongazione massima finita. I livelli energetici E_n sono ancora caratterizzati da uno stato fondamentale, e la loro separazione diminuisce esponenzialmente con n , in quanto approssimano asintoticamente un valore massimo di energia.

Sarebbe auspicabile applicare la nostra trattazione anche ad altri sistemi fisici.

Ringraziamenti

E' più che doveroso ringraziare il prof. Fedele Lizzi per la competenza, il supporto ed i suggerimenti che sono stati determinanti per la stesura di questo lavoro.

Si ringrazia inoltre il prof. Luigi Cappiello per l'attenta lettura ed i preziosi commenti che ci hanno permesso di arricchirla.

Desidero anche ringraziare Patrizia Vitale, Antonella D'Avanzo, Alessandro Valentino ed Alessandro Zampini per le utili discussioni sulla geometria non

Capitolo 4. Studio di un sistema fisico deformato: l'oscillatore armonico

commutativa, e non solo.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi ed amici Federica Sapiro, Eugenio Schisano e Ciro Pistillo, ed in particolare a Raffaele De Feo, con cui è da una vita che si discute di fisica.

Si ringrazia per la cortesia e la professionalità il personale della biblioteca "R. Stroppolini" di Napoli, in particolare nelle persone di Vincenzo De Luise, e dell'ormai amico Guido Celentano.

Infine un pensiero speciale va alle piccole Maria Rosa e Cristina, grazie alle quali questo lavoro ha richiesto un tempo maggiore ma contiene molto più sentimento.

Appendice A

Appendici

A.1 Localizzabilità in meccanica quantistica

A.1.1 Indeterminazioni simultanee di operatori simmetrici

Siano \hat{u} e \hat{v} due operatori simmetrici sul dominio comune \mathfrak{D} . Sia inoltre \mathfrak{D} un dominio invariante per entrambi gli operatori:

$$\hat{u} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D} \qquad \hat{v} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D} \qquad (\text{A.1})$$

dimodochè su \mathfrak{D} è ben definito il loro commutatore. Allora il prodotto delle loro indeterminazioni, sugli stati $f \in \mathfrak{D}$, non è inferiore al modulo del valore d'aspettazione del loro commutatore:

$$(\Delta\hat{u})_f(\Delta\hat{v})_f \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{u}, \hat{v}] \rangle_f \right| \qquad (\text{A.2})$$

Per semplicità di notazione indichiamo in grassetto maiuscolo il valore d'aspettazione degli operatori ($\langle \hat{u} \rangle \equiv \mathbf{U}$), e dimostriamo questa relazione, di cui il principio d'indeterminazione di Heisenberg è un caso particolare:

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{u})_f^2(\Delta\hat{v})_f^2 &= \left\| (\hat{u} - \mathbf{U})f \right\|^2 \left\| (\hat{v} - \mathbf{V})f \right\|^2 \geq \left| \left((\hat{u} - \mathbf{U})f, (\hat{v} - \mathbf{V})f \right) \right|^2 = \\ &= \left| \left(f, (\hat{u} - \mathbf{U})(\hat{v} - \mathbf{V})f \right) \right|^2 = \left| \left(f, \hat{u}\hat{v}f \right) - \mathbf{UV} \right|^2 = \\ &= \mathcal{R}e^2 \left[\left(f, \hat{u}\hat{v}f \right) - \mathbf{UV} \right] + \mathcal{I}m^2 \left[\left(f, \hat{u}\hat{v}f \right) \right] \geq \\ &\geq \mathcal{I}m^2 \left[\left(f, \hat{u}\hat{v}f \right) \right] = \left\{ \frac{-i}{2} \left[\left(f, \hat{u}\hat{v}f \right) - \overline{\left(f, \hat{u}\hat{v}f \right)} \right] \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[i \left(f, \hat{v}\hat{u}f \right) - i \left(f, \hat{u}\hat{v}f \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \left(f, i[\hat{u}, \hat{v}]f \right)^2 = \frac{1}{4} \left\langle i[\hat{u}, \hat{v}] \right\rangle_f^2 \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

dove bisogna ricordare che, se \hat{u} e \hat{v} sono simmetrici, $i[\hat{u}, \hat{v}]$ è un operatore con valori d'aspettazione reali.

A.1.2 Misure della posizione come funzionali sugli stati

La meccanica quantistica non relativistica è quasi esclusivamente trattata in rappresentazione di Schrödinger, dove si assume che lo spazio sia un continuo convenientemente descritto da \mathbb{R}^n , o da un suo sottoinsieme. Per semplicità limitiamoci a sistemi unidimensionali ($n = 1$).

Lo spazio di Hilbert è quello delle funzioni $f(x)$ di $L_2(\mathcal{M})$, dove $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$, munito del prodotto scalare:

$$(f, g) \equiv \int_{\mathcal{M}} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (\text{A.4})$$

Nel caso in cui \mathcal{M} sia tutta la retta, l'operatore posizione, definito come:

$$\hat{x}f(x) = xf(x)$$

risulta non limitato in quanto, $\forall L > 0$, è possibile trovare stati per i quali \hat{x} è ben definito e:

$$\|xf(x)\| > L\|f(x)\|$$

Se \mathcal{M} è contenuto nell'intervallo $\mathcal{M} \subseteq [-L, L]$, ne risulta che:

$$\|xf(x)\| \leq L\|f(x)\|$$

e quindi l'operatore \hat{x} risulta limitato.

Sappiamo inoltre che l'equazione agli autovalori:

$$\hat{x}f_y(x) = yf_y(x) \quad (\text{A.5})$$

è soddisfatta solo dalle funzioni *delta di Dirac* $\delta(y - x)$, le quali non appartengono ad $L_2(\mathcal{M})$ e pertanto vengono dette *autofunzioni improprie*.

Inoltre la (A.5) ha soluzione per *tutti e soli* gli $y \in \mathcal{M}$, che pertanto coincide con lo spettro¹ di \hat{x} : $\mathcal{M} \equiv \sigma_{\hat{x}}$.

Lo spazio di Hilbert può essere quindi riscritto come $L_2(\sigma_{\hat{x}})$, lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile sullo spettro di \hat{x} .

Il valore $f(x_0)$ di un vettore f nel punto x_0 viene interpretato come la probabilità di localizzare, in quel punto, il sistema descritto dallo stato f .

Tale probabilità può essere vista come un funzionale P_{x_0} che ad ogni stato associa il suo valore nel punto x_0 :

$$P_{x_0} : f \in L_2 \rightarrow f(x_0) \in \mathbb{C} \quad (\text{A.6})$$

¹Gli autovalori y appartengono, in questo caso, allo spettro continuo.

A.1 Localizzabilità in meccanica quantistica

Ma tale funzionale è rappresentato proprio dalle autofunzioni di \hat{x} , in quanto:

$$P_{x_0}(f) = f(x_0) = \int_{\sigma_{\hat{x}}} \delta(x_0 - x) f(x) dx = (\delta_{x_0}, f) \quad (\text{A.7})$$

dove all'ultimo membro abbiamo usato la notazione del prodotto scalare. Nella notazione di Dirac i vettori vengono scritti come *ket*:

$$|f\rangle \equiv f \in L_2$$

ed il prodotto scalare nella forma di *bra-ket*:

$$(f(x), g(x)) \equiv \int_{\mathcal{M}} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle f | g \rangle$$

Usualmente le autofunzioni di un generico operatore \hat{A} si usa scriverle indicando tale autovalore nel ket:

$$\hat{A}|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$$

Utilizzando tale convenzione, le $\delta(x_0 - x)$, autofunzioni di \hat{x} , si scrivono:

$$\hat{x}|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle$$

Il funzionale P_{x_0} della (A.7), nella forma di braket, si scrive infine, :

$$P_{x_0}(f) = f(x_0) = \langle x_0 | f \rangle \in \mathbb{C}$$

Quindi, in maniera astratta, possiamo dire che le autofunzioni della posizione definiscono dei funzionali $\langle x |$ su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , che ad ogni stato associano la probabilità che tale stato sia localizzato in x :

$$\langle x | : |f\rangle \rightarrow \langle x | f \rangle = P_x(f) \in \mathbb{C}$$

Questa costruzione ci permette di astrarre il concetto di localizzabilità dalla “picture” di Schrödinger e di estenderlo a qualsiasi altra rappresentazione.

In generale esso sarà applicato così: dato un qualsiasi spazio di Hilbert \mathcal{H} ed introdotto un opportuno operatore posizione \hat{x} , i suoi autostati, propri o impropri, indicati con² $|x\rangle$, definiscono una famiglia di funzionali $\langle x |$ su \mathcal{H} , il cui valore sullo stato $|f\rangle$, $\langle x | f \rangle$, viene interpretato come la probabilità che il sistema descritto dallo stato f sia localizzato nel punto x .

Si può mostrare che tale costruzione può essere estesa dai singoli punti x a qualsiasi sottoinsieme boreliano della retta, ed è l'unica compatibile con gli assiomi di localizzabilità introdotti nel fondamentale lavoro di Wightman [?]. Per approfondimenti vedi [?, ?, ?].

²Ovviamente sono definiti solo per $x \in \sigma_{\hat{x}}$.

A.2 Algebra Universale di Ricoprimento (UEA)

Ogni algebra associativa diventa un'algebra di Lie considerando, sullo stesso spazio vettoriale, il commutatore del prodotto associativo; ci chiediamo allora se sia anche possibile ottenere un'algebra associativa a partire da un'algebra di Lie.

Vedremo che, più precisamente, è possibile ricostruire un'algebra associativa, detta **algebra di ricoprimento** che contiene l'algebra di Lie come sottospazio, sul quale il commutatore del prodotto associativo restituisce il prodotto di Lie ([?][?]). La costruzione procede in questo modo: sia V lo spazio vettoriale a partire dal quale è definita l'algebra di Lie \mathfrak{g} , e consideriamo l'algebra tensoriale generata da V :

$$\mathcal{T}V \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^n \quad V^n = \bigotimes_{k=1}^n V^k \quad (\text{A.8})$$

cioè la somma diretta dei prodotti tensoriali successivi di V (dove abbiamo identificato $V^0 \equiv \mathbb{C}$).

L'algebra $\mathcal{T}V$ possiede la moltiplicazione naturale associativa:

$$(u, v) \in V^n \bigoplus V^m \longrightarrow uv \in V^{n+m} \quad (\text{A.9})$$

rispetto alla quale è una graded algebra su \mathbb{N}_0 .

Per implementare la struttura di algebra di Lie consideriamo il sottoinsieme $I \in \mathcal{T}V$ di elementi del tipo:

$$x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 - [x_1, x_2] \in V^1 \oplus V^2 \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{g} \quad (\text{A.10})$$

e sia \mathcal{I} il più piccolo ideale bilatero contenente I e quozientiamo in questo modo:

$$U(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}V/\mathcal{I} \quad (\text{A.11})$$

Esplicitamente, se v è un elemento del sottospazio V^n di $\mathcal{T}V$, della forma:

$$v = x_1 \otimes \cdots \otimes (x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i) \otimes \cdots \otimes x_n \quad (\text{A.12})$$

esso conciderà, in $U(\mathfrak{g})$, con l'elemento:

$$x_1 \otimes \cdots \otimes [x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes x_n \quad (\text{A.13})$$

di V^{n-1} . Con quest'identificazione $U(\mathfrak{g})$ è ancora un'algebra associativa (unitale), che contiene \mathfrak{g} come sottospazio tramite l'applicazione immersione $\iota : x \in \mathfrak{g} \rightarrow x \in V^1 \subset U(\mathfrak{g})$.

A.3 Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

$U(\mathfrak{g})$ è detta *algebra universale di ricoprimento*.

Si noti che a differenza di \mathcal{TV} , $U(\mathfrak{g})$ non rispetta il grading; tuttavia, se consideriamo i sottospazi vettoriali:

$$\mathfrak{V}^n \equiv \bigcup_{k=0}^n V^k \quad (\text{A.14})$$

allora vale che:

$$\mathfrak{V}^n \otimes \mathfrak{V}^m \subseteq \mathfrak{V}^{n+m} \quad (\text{A.15})$$

Tale struttura, che sopravvive in $U(\mathfrak{g})$, si chiama “filtrazione”.

Si consideri infine il sottospazio $U^\dagger(\mathfrak{g})$ degli elementi che si possono scrivere come prodotto di un elemento di \mathfrak{g} per uno di $U(\mathfrak{g})$, cioè:

$$U^\dagger(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}U(\mathfrak{g}) \quad (\text{A.16})$$

Si può verificare immediatamente che $U^\dagger(\mathfrak{g})$ è un ideale dell'algebra associativa $U(\mathfrak{g})$, chiamato “augmentation ideal” di $U(\mathfrak{g})$.

L'aggettivo universale di $U(\mathfrak{g})$ si riferisce al fatto che, data una qualunque altra algebra unitale associativa \mathcal{U}' per la quale esista una mappa lineare $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}'$ tale che:

$$f(x)f(y) - f(y)f(x) = f([x, y]) \quad (\text{A.17})$$

$\forall x, y \in \mathfrak{g}$, allora esiste un'unico omomorfismo³ $\tilde{f} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}'$ tale che $f = \tilde{f} \circ \iota$, ovvero tale che ogni mappa lineare di \mathfrak{g} in \mathcal{U}' possa estendersi univocamente ad una mappa lineare da $U(\mathfrak{g})$ in \mathcal{U}' .

A.3 Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

Come già anticipato, l'algebra di Biedenharn ammette rappresentazioni di tutte le possibili classi riportate nell'osservazione 1, pag. 25).

Per la loro classificazione seguiremo il procedimento utilizzato in [?] ma prima

³Tra algebre associative

di procedere introduciamo gli operatori di Casimir:

$$\begin{aligned}\widehat{C} &= q^{-\widehat{\mathcal{N}}/2}([\widehat{\mathcal{N}}]_q - \widehat{a}^\dagger \widehat{a}) \\ \widehat{C}_e &= e^{2\pi i \widehat{\mathcal{N}}}\end{aligned}$$

e l'operatore [?] (si noti il segno dell'esponente di q):

$$\widehat{K} = \widehat{a} \widehat{a}^\dagger - q^{-1/2} \widehat{a}^\dagger \widehat{a}$$

dei quali ci serviremo più avanti.

Sia ora $|\mu_0\rangle$ un autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$, di autovalore μ_0 che stavolta può essere anche negativo poiché non è più assicurata la positività dell'operatore numero. Consideriamo il vettore $\widehat{a}^\dagger \widehat{a} |\mu_0\rangle$; poiché $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ commuta con $\widehat{\mathcal{N}}$ (vedi (2.18) a pag. 23) vale che:

$$\widehat{\mathcal{N}} \widehat{a}^\dagger \widehat{a} |\mu_0\rangle = \mu_0 \widehat{a}^\dagger \widehat{a} |\mu_0\rangle$$

e quindi esso è ancora autovettore di $\widehat{\mathcal{N}}$ relativo allo stesso autovalore. Poiché lo spettro di $\widehat{\mathcal{N}}$ è semplice, $\widehat{a}^\dagger \widehat{a} |\mu_0\rangle$ deve essere anche autovettore di $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$, e sia λ_0 l'autovalore corrispondente:

$$\widehat{a}^\dagger \widehat{a} |\mu_0\rangle = \lambda_0 |\mu_0\rangle$$

Analogamente esso deve essere autovettore di $\widehat{a} \widehat{a}^\dagger$, di autovalore, poniamo, ν_0 .

Per le (2.20b) sappiamo costruire, a partire da $|\mu_0\rangle$, il sistema di vettori ($n \in \mathbb{Z}$):

$$|\mu_n\rangle = \begin{cases} (\widehat{a}^\dagger)^n |\mu_0\rangle & n > 0 \\ (\widehat{a})^m |\mu_0\rangle & m < 0 \end{cases}$$

tali che:

$$\widehat{\mathcal{N}} |\mu_n\rangle = (\mu_0 + n) |\mu_n\rangle$$

Per quanto visto essi devono essere anche autovettori di $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ e $\widehat{a} \widehat{a}^\dagger$, cioè deve accadere che:

$$\begin{aligned}\widehat{a}^\dagger \widehat{a} |\mu_n\rangle &= \lambda_n |\mu_n\rangle \\ \widehat{a} \widehat{a}^\dagger |\mu_n\rangle &= \nu_n |\mu_n\rangle\end{aligned}$$

A.3 Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

con gli opportuni valori di λ_n e ν_n .

Applicando la (2.20a) sui vettori $|\mu_n\rangle$ risulta che gli autovalori sono tra loro legati dalla relazione:

$$\nu_n - q^{1/2}\lambda_n = q^{-(\mu_0+n)/2} \quad (\text{A.18})$$

Consideriamo adesso la quantità $\widehat{a}^\dagger \widehat{a} (\widehat{a}^\dagger)^{n+1} |\mu_0\rangle$, e valutiamola in due modi diversi. Da un lato essa corrisponde a:

$$\widehat{a}^\dagger \widehat{a} |\mu_{n+1}\rangle = \lambda_{n+1} |\mu_{n+1}\rangle$$

d'altra parte vale anche:

$$\begin{aligned} \widehat{a}^\dagger (\widehat{a} \widehat{a}^\dagger) (\widehat{a}^\dagger)^n |\mu_0\rangle &= \widehat{a}^\dagger (\widehat{a} \widehat{a}^\dagger) |\mu_n\rangle = \\ &= \widehat{a}^\dagger \nu_n |\mu_n\rangle = \nu_n |\mu_{n+1}\rangle \end{aligned}$$

Uguagliando i due ultimi membri, e per l'arbitrarietà di n , risulta:

$$\lambda_{n+1} = \nu_n \quad (\text{A.19})$$

Sostituendo nella (A.18) si ha la relazione di ricorrenza per i λ_n :

$$\lambda_{n+1} = q^{1/2}\lambda_n + q^{-(\mu_0+n)/2}$$

che ha come soluzione:

$$\lambda_n = q^{n/2}\lambda_0 + q^{-(\mu_0)/2} [[n]]_q \quad (\text{A.20})$$

E' evidente che per $n > 0$ tutti i λ_n sono positivi, ma ciò non è affatto sicuro per $n < 0$, poiché $[[-n]]_q = -[[n]]_{1/q} = -[[n]]_q$ e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} [[n]]_q = -\infty$$

Ma $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$ è un operatore positivo, e non ammette autovalori negativi. La positività dei λ_n è allora un vincolo che dobbiamo imporre alla (A.20), ma a questo punto, dobbiamo distinguere i due casi⁴ $q > 1$ e $0 < q < 1$.

⁴Come anticipato alla fine del paragrafo precedente, l'invarianza $q \leftrightarrow q^{-1}$ è una caratteristica dei q -numeri che compaiono in quella rappresentazione, ma non è una prerogativa dell'algebra di Biedenharn definita dalle 2.20

Caso di $q > 1$: Poiché $\lim_{n \rightarrow -\infty} q^{n/2} = 0$ si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = -\infty$$

come rappresentato in figura 2.2.2.

Ciò significa che non appena n_0 è il più piccolo indice (minore di zero) per cui λ_{n_0} è non negativo, cioè tale che:

$$\lambda_{n_0-1} < 0 \leq \lambda_{n_0}$$

deve accadere che:

$$\widehat{a}|\mu_{n_0}\rangle = |\mu_{n_0-1}\rangle = 0$$

che altrimenti risulterebbe autovettore di $\widehat{a}^\dagger\widehat{a}$ di autovalore $\lambda_{n_0-1} < 0$. Ciò significa anche che:

$$\widehat{a}^\dagger\widehat{a}|\mu_{n_0}\rangle = 0$$

e quindi $|\mu_{n_0}\rangle$ ne è ancora autovettore di autovalore 0.

Ridefinendo allora i vettori in questo modo:

$$\begin{aligned} |\mu_{n_0}\rangle &\equiv |0\rangle \\ |\mu_{n_0+1}\rangle &\equiv |1\rangle \\ &\dots \\ |\mu_{n_0+n}\rangle &\equiv |n\rangle \end{aligned}$$

e rinumerando i vari autovalori a partire da quelli relativi al vettore $|0\rangle$, secondo lo schema:

$$\begin{aligned} \lambda_{n_0} = \tilde{\lambda}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{n_0+n} = \tilde{\lambda}_n \\ \nu_{n_0} = \tilde{\nu}_0 = \tilde{\lambda}_1 \quad \text{e} \quad \nu_{n_0+n} = \tilde{\nu}_n \\ \mu_0 + n_0 = \tilde{\mu}_0 \end{aligned} \tag{A.21}$$

l'azione dei tre operatori diventa:

$$\begin{aligned} \widehat{a}^\dagger\widehat{a}|n\rangle &= \tilde{\lambda}_n|n\rangle \\ \widehat{a}\widehat{a}^\dagger|n\rangle &= \tilde{\nu}_n|n\rangle \\ \widehat{N}|n\rangle &= (\tilde{\mu}_0 + n)|n\rangle \end{aligned}$$

A.3 Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

dove stavolta è $n \in \mathbb{N}$.

Sostituendo gli autovalori (A.21) nella (A.20) si ottiene il vincolo:

$$\tilde{\lambda}_n = q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[n]]_q$$

che insieme alla (A.19) mostra che *l'unico parametro libero della rappresentazione* è $\tilde{\mu}_0$, autovalore di $\widehat{\mathcal{N}}$ relativo allo stato di vuoto.

Per completare la costruzione resta da determinare l'azione degli operatori \widehat{a} e \widehat{a}^\dagger .

Ricalcolando la (2.22) si può vedere che compare solo un fattore extra in q :

$$\widehat{a} |n\rangle = q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[n]]_q |n-1\rangle$$

La base canonica normalizzata è allora:

$$|\underline{n}\rangle = \left[q^{-\frac{(n\tilde{\mu}_0)}{2}} [[n]]_q! \right]^{-1/2} |n\rangle$$

sulla quale l'azione dei tre generatori è:

$$\begin{aligned} \widehat{a} |\underline{n}\rangle &= (q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[n]]_q)^{1/2} |\underline{n-1}\rangle \\ \widehat{a}^\dagger |\underline{n}\rangle &= (q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[n+1]]_q)^{1/2} |\underline{n+1}\rangle \\ \widehat{\mathcal{N}} |\underline{n}\rangle &= (\tilde{\mu}_0 + n) |\underline{n}\rangle \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato una famiglia ad un parametro $\Pi_{\tilde{\mu}_0}(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{\mathcal{N}})$ di rappresentazioni di tipo pseudo-Fock dell'algebra di Biedenharn, unicamente individuate dal valore sul vuoto dell'operatore $\widehat{\mathcal{N}}$, il cui spettro risulta limitato inferiormente.

Ridefinendo gli operatori mediante la dilatazione (2.21) di pag. 27, con $\alpha = \tilde{\mu}_0$, ci si può sempre ricondurre a rappresentazioni di Fock.

In ogni rappresentazione l'operatore di Casimir \widehat{C} assume il valore:

$$\widehat{C} = q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[\mu_0]]_q$$

che identifica univocamente la rappresentazione.

L'azione dell'operatore \widehat{K} è:

$$\widehat{K} |\underline{n}\rangle = q^{n/2} |\underline{n}\rangle$$

(indipendentemente dal valore di $\tilde{\mu}_0$) e pertanto in ogni rappresentazione risulta sempre positiva.

Si noti infine che solo nella rappresentazione di Fock ($\tilde{\mu}_0 = 0$) è verificata l'ulteriore relazione:

$$q^{\widehat{N}/2} = \widehat{K} = \widehat{a}\widehat{a}^\dagger - q^{-1/2}\widehat{a}^\dagger\widehat{a} \quad (\text{A.22})$$

che indica l'invarianza $q \leftrightarrow q^{-1}$ (confronta con la proprietà 2.2.1 a pag. 29 e con l'osservazione a pag. 32) che come già anticipato non è una caratteristica dell'algebra di Biedenharn, ma solo una peculiarità di una delle sue possibili rappresentazioni.

Nel limite di $q \rightarrow 1$ queste rappresentazioni si riducono a quelle della formulazione estesa dell'algebra bosonica classica.

Caso di $0 < q < 1$: Stavolta accade che:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} q^{n/2} = +\infty$$

quindi bisogna valutare quale dei due addendi nella (A.20) predomina sull'altro.

Sostituendo la forma esplicita dei q -numeri la si può porre nella forma:

$$\lambda_n = q^{n/2} \left[\lambda_0 - q^{-\frac{\mu_0+1}{2}} \frac{1 - q^{-n}}{q^{-1} - 1} \right] \quad (\text{A.23})$$

dove abbiamo riscritto in modo che il sottraendo nella parentesi quadra sia una quantità positiva.

L'andamento degli autovalori λ_n per $n < 0$ dipende allora dal segno della parentesi quadra.

Possiamo distinguere le tre possibilità:

1. $\lambda_0 < \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$ In questo caso:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = -\infty$$

e quindi siamo in una situazione analoga a quella già descritta per $q > 1$. Esiste così una famiglia di rappresentazioni pseudo-Fock, parametrizzate dal minimo autovalore $\tilde{\mu}_0$ dell'operatore numero, e riconducibili alla rappresentazione di Fock per un'opportuna ridefinizione degli operatori.

A.3 Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

2. $\lambda_0 > \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$ In questo caso il segno della parentesi quadra è sempre positivo, per cui:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \lambda_n = +\infty$$

Questo vuol dire che esiste un indice n_0 per il quale λ_{n_0} assume un valore minimo (non negativo), per poi crescere indefinitamente per $n \leq n_0$ (vedi fig. 2).

La costruzione di autovettori $|\mu_n\rangle$ non si arresta per nessun valore dell'indice n .

Indichiamo con $|0\rangle$ l'autovettore⁵ relativo al minimo autovalore, e a partire da questo, ridefiniamo ($n \in \mathbb{Z}$):

$$|\mu_{n_0+n}\rangle \equiv |n\rangle$$

Rinumeriamo gli autovalori secondo il nuovo schema:

$$\begin{aligned} \lambda_{n_0} &= \tilde{\lambda}_0 & \text{e} & \lambda_{n_0+n} = \tilde{\lambda}_n \\ \nu_{n_0} &= \tilde{\nu}_0 = \tilde{\lambda}_1 & \text{e} & \nu_{n_0+n} = \tilde{\nu}_n \\ \mu_0 + n_0 &= \tilde{\mu}_0 \end{aligned}$$

in termini dei quali la (A.20) si riscrive:

$$\tilde{\lambda}_n = q^{n/2} \tilde{\lambda}_0 + q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[n]]_q$$

Imponendo la condizione $\tilde{\lambda}_n \geq \tilde{\lambda}_0$ si ottengono le due relazioni:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_0 &< \frac{q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[n]]_q}{1 - q^{n/2}} & n > 0 \\ \tilde{\lambda}_0 &> -\frac{q^{-\tilde{\mu}_0/2} [[n]]_q}{q^{n/2} - 1} & n < 0 \end{aligned}$$

dalle quali, sostituendo i valori $n = \pm 1$, risulta che i possibili valori di $\tilde{\lambda}_0$ devono appartenere all'intervallo aperto $I_{(q, \tilde{\mu}_0)}$ individuato da:

$$0 < q^{1/2} \frac{q^{-\tilde{\mu}_0/2}}{1 - q^{1/2}} < \tilde{\lambda}_0 < \frac{q^{-\tilde{\mu}_0/2}}{1 - q^{1/2}} \quad (\text{A.24})$$

⁵Si assume che sia normalizzato.

In questo caso sono allora due i parametri liberi $(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\mu}_0)$ che fissano tutti gli altri autovalori.

L'azione di \hat{a} sui vettori $|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ si può calcolare come:

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \hat{a}\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \tilde{\nu}_{n-1}|n-1\rangle = \\ &= \tilde{\lambda}_n|n-1\rangle\end{aligned}\tag{A.25}$$

La norma dei vettori risulta essere:

$$\langle n|n\rangle = \prod_{k \in I_n} \tilde{\lambda}_k\tag{A.26}$$

dove I_n è l'insieme di indici definito da:

$$I_n = \begin{cases} \{0, 1, \dots, n-1, n\} & n > 0 \\ \{-n, -n+1, \dots, -1, 0\} & n < 0 \end{cases}$$

Sulla base canonica $|\underline{n}\rangle_{n \in \mathbb{Z}}$ il tutto si riscrive:

$$\begin{aligned}\hat{a}|\underline{n}\rangle &= \tilde{\lambda}_n^{1/2}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|\underline{n}\rangle &= \tilde{\lambda}_{n+1}^{1/2}|n+1\rangle \\ \hat{\mathcal{N}}|\underline{n}\rangle &= (\tilde{\mu}_0 + n)|\underline{n}\rangle\end{aligned}$$

Abbiamo così trovato una famiglia a due parametri $\Pi_{\tilde{\mu}_0, \tilde{\lambda}_0}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{\mathcal{N}})$ di rappresentazioni non di tipo Fock dell'algebra di Biedenharn. Il casimir \hat{C} assume, in ogni rappresentazione, il valore caratteristico:

$$\hat{C} = q^{-\tilde{\mu}_0/2}([\tilde{\mu}_0]_q - \tilde{\lambda}_0)$$

Per l'operatore \hat{K} è possibile dimostrare, tenendo conto del vincolo (A.24), che in ogni rappresentazione assume valori negativi.

Tutte queste rappresentazioni sono singolari nel limite di $q \rightarrow 1$. A riprova di ciò basti verificare che in questo limite, la (A.24) impone:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \tilde{\lambda}_0 = \infty$$

A.3 Classificazione delle rappresentazioni irriducibili nel caso di $q \in \mathbb{R}^+$

3. $\lambda_0 = \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$ In questo caso la (A.23) si può riscrivere:

$$\lambda_n = q^{-n/2} \frac{q^{-(\mu_0+1)/2}}{q^{-1}-1} \quad (\text{A.27})$$

da cui risulta:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \lambda_n = 0^+$$

come si può vedere in figura 3.

Anche in questo caso la costruzione di autovettori di $\widehat{\mathcal{N}}$ prosegue indefinitamente per indici negativi.

I due parametri sono ovviamente vincolati dalla condizione $\lambda_0 = \frac{q^{-\frac{\mu_0+1}{2}}}{q^{-1}-1}$.

Assumendo che $|\mu_0\rangle$ sia un vettore normalizzato, e procedendo come nelle (A.25) e (A.26), si costruisce la base canonica su cui l'azione degli operatori è:

$$\begin{aligned} \widehat{a} |\underline{n}\rangle &= \lambda_n^{1/2} |\underline{n}-1\rangle \\ \widehat{a}^\dagger |\underline{n}\rangle &= \lambda_{n+1}^{1/2} |\underline{n}+1\rangle \\ \widehat{\mathcal{N}} |\underline{n}\rangle &= (\mu_0 + n) |\underline{n}\rangle \end{aligned}$$

Le rappresentazioni sono individuate dal solo parametro libero $\mu_0 \in [0, 1)$, poiché rappresentazioni con $\hat{\mu}_0 = \mu_0 + n (n \in \mathbb{Z})$ sono equivalenti.

Abbiamo così una famiglia ad un parametro $\Pi_{\mu_0}(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{\mathcal{N}})$ di rappresentazioni di tipo non Fock.

Queste rappresentazioni sono propriamente individuate dal valore del Casimir:

$$\widehat{C}_e = e^{2\pi i \widehat{\mathcal{N}}} = e^{2\pi i \mu_0}$$

in quanto l'operatore \widehat{C} , in ogni rappresentazione, vale:

$$\widehat{C} = (q^{1/2} - q^{-1/2})^{-1}$$

Dalle (A.27) si verifica che vale la relazione:

$$\widehat{a}\widehat{a}^\dagger - q^{-1/2}\widehat{a}^\dagger\widehat{a} = 0 \quad (\text{A.28})$$

il che vuol dire che, in questo caso, l'operatore \widehat{K} si annulla identicamente.

Queste relazioni sono singolari nel limite $q \rightarrow 1$, e lo dimostra il fatto evidente che, in questo limite, la (A.28) contrasta con la (2.20a).

Riepilogando abbiamo scoperto che per ogni valore di $q \in \mathbb{R}^+$ esistono rappresentazioni di tipo pseudo-Fock, riconducibili a rappresentazioni di Fock con una trasformazione di dilatazione opportuna. Tutte queste, nel limite classico ($q \rightarrow 1$) restituiscono rappresentazioni dell'algebra dell'oscillatore armonico.

In più, per $0 < q < 1$, esistono rappresentazioni non di tipo Fock, che diventano singolari nel limite classico.

A.4 q -Funzioni speciali

A.4.1 Serie ipergeometrica

Introduciamo preliminarmente i simboli di Pochhammer, definiti da:

$$(a)_0 \equiv 1 \tag{A.29}$$

$$(a)_k = a(a+1)(a+2) \cdots (a+k-1) \tag{A.30}$$

e la seguente abbreviazione per il loro prodotto:

$$(a_1, \dots, a_r)_k = (a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_r)_k$$

La serie ipergeometrica *generalizzata*⁶ (ma d'ora in avanti ometteremo questo aggettivo) è allora definita da:

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_k}{(b_1, \dots, b_s)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{A.31}$$

La serie ipergeometrica gode di numerosissime ed importanti proprietà, e permette di esprimere in maniera unificata molte delle funzioni dell'analisi

⁶La serie ipergeometrica in senso stretto è la:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right)$$

A.4 q -Funzioni speciali

matematica.

Per esempio la funzione esponenziale si scrive:

$$e^z = {}_0F_0 \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| z \right)$$

mentre le funzioni trigonometriche:

$$\sin(z) = z {}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| a \frac{z^2}{4} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\cos(z) = z {}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| a \frac{z^2}{4} \right) \quad (\text{A.33})$$

La formula del binomio prende la forma:

$$(1 - z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-z)^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{k!} z^k = {}_1F_0 \left(\begin{matrix} -n \\ - \end{matrix} \middle| z \right)$$

Per altre notevoli proprietà rimandiamo a [?, ?, ?].

A.4.2 q -Shifted factorials

La generalizzazione⁷ della serie ipergeometrica, che esporremo nel prossimo paragrafo, si basa sul seguente limite:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^\alpha}{1 - q} = \alpha$$

e sull'introduzione dei “ q -shifted factorials”:

$$(a; q)_0 \equiv 1 \quad (\text{A.34})$$

$$(a; q)_k \equiv (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \cdots (1 - aq^{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - aq^i) \quad (\text{A.35})$$

$$(a; q)_\infty \equiv \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i) \quad (\text{A.36})$$

detti anche q -simboli di Pochhammer. Essi soddisfano il limite:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q^\alpha; q)_k}{(1 - q)^k} = (\alpha)_k$$

⁷In tutta la teoria che esponiamo adesso usualmente si assume $0 < q < 1$. Tuttavia non è difficile generalizzare alcuni risultati al caso di $q > 1$.

I q -shifted factorials godono di numerose proprietà ma noi citiamo solo quelle di cui faremo uso:

$$(a; q^{-1})_n = (a^{-1}; q)_n (-a)^n q^{-\binom{n}{2}}, \quad a \neq 0 \quad (\text{A.37})$$

$$(a; q)_n = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty} \quad (\text{A.38})$$

$$(q^{-n}; q)_k = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_{n-k}} (-1)^k q^{\binom{k}{2} - nk} \quad (\text{A.39})$$

$$(q^{-n}; q^2)_k (q^{-(n+1)}; q^2)_k = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_{n-2k}} q^{4\binom{k}{2} + (1-2n)k} \quad (\text{A.40})$$

$$(a^2; q^2)_n = (a; q)_n (-a; q)_n \quad (\text{A.41})$$

Per una panoramica molto esauriente rimandiamo ai riferimenti del paragrafo precedente.

A.4.3 q -Serie ipergeometrica e q -funzioni esponenziali

La q -serie ipergeometrica è definita da:

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_k}{(b_1, \dots, b_s; q)_k} (-1)^{(1-r+s)k} q^{(1-r+s)\binom{k}{2}} \frac{z^k}{(q; q)_k} \quad (\text{A.42})$$

Per una panoramica delle sue numerose proprietà si veda [?, ?, ?].

Mediante la q -serie ipergeometrica è possibile definire le q -generalizzazioni delle più importanti funzioni dell'analisi matematica.

Innanzitutto è possibile introdurre la q -funzione esponenziale:

$$e_q^z \equiv \exp_q(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_n} = {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; z \right)$$

dove il q -shifted factorial sostituisce il fattoriale classico.

Altre definizioni di q -funzioni esponenziali sono legate all'introduzione di ulteriori q -numeri, i quali vanno a sostituirsi al denominatore della (A.4.3). Per esempio si ha:

A.5 Autofunzioni degli operatori generalizzati

- q -numeri simmetrici:

$$\begin{aligned} \exp_q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[[n]]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}\binom{n}{2}}(1-q)^n}{(q; q)_n} z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}\binom{n}{2}}}{(q^{1/2}; q^{1/2})_n (-q^{1/2}; q^{1/2})_n} [(-1)(1-q)z]^n = \\ &= {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} 0 \\ -q^{1/2} \end{matrix} \middle| q^{1/2}; (q-1)z \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la (2.24) a pag. 29, e la proprietà (A.41) dei q -shifted factorials.

- q -numeri asimmetrici:

$$\begin{aligned} \exp_q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^2; q^2)_n} (1-q^2)^n z^n = \\ &= {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q^2; (1-q^2)z \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto riferimento alla (2.36) di pag. 40.

- q -numeri limitati:

$$\begin{aligned} \exp_q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\{n\}_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_n} z^n = \\ &= {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; z \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo impiegato la (2.58) di pag. 46.

A.5 Autofunzioni degli operatori posizione e momento generalizzati

L'equazione agli autovalori per l'operatore posizione si scrive:

$$\hat{x}|f_\lambda\rangle = \lambda|f_\lambda\rangle$$

nella quale, sostituendo ad $|f_\lambda\rangle$ il suo sviluppo in serie e tenendo conto della (3.1):

$$|f_\lambda\rangle = \sum_{r=0}^{\infty} c_r(\lambda) |\mathfrak{r}\rangle$$

otteniamo, per i coefficienti $c_r(\lambda)$, la relazione di ricorrenza⁸:

$$\sqrt{[[r+1]]_q} c_{r+1}(\lambda) = \frac{\lambda}{\Lambda} c_r(\lambda) - \sqrt{[[r]]_q} c_{r-1}(\lambda) \quad (\text{A.43})$$

Riscriviamo in forma matriciale la dipendenza di ogni coefficiente dai due precedenti:

$$\begin{pmatrix} c_{r+1} \\ c_r \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} c_{r-1} \\ c_{r-2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

dove:

$$T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{[[r+1]]_q [[r]]_q}} - \sqrt{\frac{[[r]]_q}{[[r+1]]_q}} & -\frac{\lambda}{\Lambda} \sqrt{\frac{[[r-1]]_q}{[[r+1]]_q [[r]]_q}} \\ \frac{\lambda}{\Lambda} \frac{1}{\sqrt{[[r]]_q}} & -\sqrt{\frac{[[r-1]]_q}{[[r]]_q}} \end{pmatrix}$$

Al crescere di r i vari termini della matrice T vanno più o meno rapidamente a zero, ed a partire da un certo r_0 in poi dominano sugli altri (che quindi possono essere trascurati) i due termini sulla diagonale che hanno q -numeri anche al numeratore, per cui la (A.44) si riduce a:

$$\begin{pmatrix} c_{r+1} \\ c_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{[[r]]_q}{[[r+1]]_q}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{[[r-1]]_q}{[[r]]_q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{r-1} \\ c_{r-2} \end{pmatrix}$$

Passando ai moduli dei coefficienti, ci siamo ricondotti all'andamento:

$$|c_{r+1}| = \sqrt{\frac{[[r]]_q}{[[r+1]]_q}} |c_{r-1}|$$

Sostituita la forma esplicita dei q -numeri, il fattore radicale diventa:

$$\sqrt{\frac{[[r]]_q}{[[r+1]]_q}} = \sqrt{q^{1/2} \frac{q^r - 1}{q^{r+1} - 1}}$$

che per $r \rightarrow \infty$ si comporta asintoticamente come $q^{-1/4}$.

Per quanto finora detto, si ha che, *a partire da un certo r_0* , i coefficienti vanno come:

$$|c_{r+2n}| = q^{-n/4} |c_r| \quad (r > r_0)$$

per cui la somma dei coefficienti successivi ad r_0 sarà:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_{r_0+j}|^2 = |c_{r_0}|^2 \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j/2} + |c_{r_0+1}|^2 \sum_{j=0}^{\infty} q^{-j/2} = (|c_{r_0}|^2 + |c_{r_0+1}|^2) \frac{1}{1-p} < \infty$$

⁸Abbiamo posto: $\Lambda = \frac{L}{\sqrt{2}}$

A.5 Autofunzioni degli operatori generalizzati

dove abbiamo posto $q^{-1/2} = p < 1$.

In definitiva, per ogni valore di $\lambda \in \mathbb{C}$, le relazioni (A.43) individuano un'unico vettore, autofunzione di \hat{x} di molteplicità uno, che quindi sono un'infinità non numerabile, in relazione con tutto il piano complesso. Per la (3.3), lo stesso risultato vale per l'operatore \hat{p} che ammette le autofunzioni:

$$\hat{p}|f_\lambda\rangle^{\otimes} = \lambda|f_\lambda\rangle^{\otimes}$$

con:

$$|f_\lambda\rangle^{\otimes} = U_{\mathcal{F}}|f_\lambda\rangle$$

A.6 Andamento temporale del valor medio della posizione negli stati coerenti

Per valutare la media dell'operatore posizione bisogna esplicitare lo sviluppo degli stati coerenti sulla base canonica:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{x}(t) \rangle_z &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle z | (e^{-i\Omega(\hat{N})t} \hat{a} + \hat{a}^\dagger e^{i\Omega(\hat{N})t}) | z \rangle = \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z^n}{\sqrt{[[m]]_q!} \sqrt{[[n]]_q!}} \langle \underline{\mathbf{m}} | (e^{-i\Omega(\hat{N})t} \hat{a} + \hat{a}^\dagger e^{i\Omega(\hat{N})t}) | \underline{\mathbf{n}} \rangle = \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m=0, n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z^n}{\sqrt{[[m]]_q!} \sqrt{[[n]]_q!}} \langle \underline{\mathbf{m}} | \left(e^{-\frac{i\omega}{2} ([[n+1]]_q - [[n-1]]_q)t} \sqrt{[[n]]_q} | \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{1}} \rangle \right) + \\
 &+ \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z^n}{\sqrt{[[m]]_q!} \sqrt{[[n]]_q!}} \langle \underline{\mathbf{m}} | \left(\sqrt{[[n+1]]_q} e^{\frac{i\omega}{2} ([[n+2]]_q - [[n]]_q)t} | \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{1}} \rangle \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^m z^{m+1}}{\sqrt{[[m]]_q!} \sqrt{[[m+1]]_q!}} \left(e^{-\frac{i\omega}{2} ([[m+2]]_q - [[m]]_q)t} \sqrt{[[m+1]]_q} \right) + \\
 &+ \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^{m+1} z^m}{\sqrt{[[m+1]]_q!} \sqrt{[[m]]_q!}} \left(\sqrt{[[m+1]]_q} e^{\frac{i\omega}{2} ([[m+2]]_q - [[m]]_q)t} \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{2m} z}{[[m]]_q!} \left(e^{-\frac{i\omega_m}{2} t} \right) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z} |z|^{2m}}{[[m]]_q!} \left(e^{\frac{i\omega_m}{2} t} \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{2m}}{[[m]]_q!} \left((z + \bar{z}) \cos \frac{i\omega_m}{2} t - (z - \bar{z}) \sin \frac{i\omega_m}{2} t \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{2m}}{[[m]]_q!} \left(2\mathcal{R}ez \cos \frac{i\omega_m}{2} t - 2\mathcal{I}mz \sin \frac{i\omega_m}{2} t \right) = \\
 &= |z| \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{2m}}{[[m]]_q!} \left(\cos \phi \cos \frac{i\omega_m}{2} t - \sin \phi \sin \frac{i\omega_m}{2} t \right)
 \end{aligned}$$

ed analogamente per gli altri q -numeri.