

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
FEDERICO II



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

TESI DI LAUREA IN FISICA

**Funzioni sullo Spazio delle Fasi e
Operatori Quantistici**

Corrispondenze e Prodotti Noncommutativi

Relatore

Prof. Fedele Lizzi

Candidato

Antonio Mezzacapo

matr. 567/443

ANNO ACCADEMICO 2007/2008

Sommario

In questo lavoro di tesi si presenteranno alcuni elementi della Meccanica Quantistica delle deformazioni. Si mostrerà come i risultati della meccanica quantistica siano ottenibili attraverso formalismi che non prevedano l'uso di operatori su spazi di Hilbert. Gli operatori saranno sostituiti da funzioni sullo spazio delle fasi classico attraverso mappe (dirette e inverse) di quantizzazione. La dinamica quantistica sarà ritrovata usando nuovi prodotti tra queste funzioni così ottenute. Saranno presentati i prodotti noncommutativi di Moyal e di Voros. Nell'ultimo capitolo si vedranno esempi di applicazioni di due mappe di quantizzazione.

Indice

0	Introduzione	5
1	Mappa di quantizzazione di Weyl	7
1.1	Mappa di quantizzazione di Weyl-Wigner	10
1.2	Prodotto di Moyal	13
2	Stati, osservabili e dinamica	19
3	Mappa e prodotto di Voros	23
4	Esempi di mappe inverse di quantizzazione: l'oscillatore armonico e gli stati coerenti	27
	Bibliografia	32

Capitolo 0

Introduzione

La Meccanica Quantistica delle deformazioni, della quale qui si presenteranno alcune idee, nasce dall' esigenza, molto comune in fisica, di vedere una teoria come limite di un'altra. Per esempio, è noto come la fisica della relatività speciale si riduca alla fisica newtoniana classica nel limite $c^{-1} \rightarrow 0$. Possiamo parlare di una costruzione della teoria della relatività ristretta per *deformazione* della fisica classica, in termini di un parametro di deformazione c^{-1} . Allo stesso modo possiamo pensare di ottenere una meccanica quantistica per deformazione della meccanica classica. Questo lavoro di tesi si propone di introdurre i concetti base relativi a questa idea.

Premettiamo, prima di andare avanti, che il formalismo Hamiltoniano per sistemi classici ha un'importanza fondamentale nella nostra discussione. In modo particolare la parentesi di Poisson tra due funzioni, su cui si basa la dinamica Hamiltoniana, è l'elemento cruciale per individuare facilmente il passaggio tra una dinamica quantistica e una classica, come vedremo in seguito.

Nel primo capitolo si è affrontato il problema del *principio di corrispondenza* tra le osservabili classiche e quantistiche. Questo principio è alla base della meccanica quantistica, e risolve il problema della quantizzazione della fisica di un sistema classico. La difficoltà principale legata alla quantizzazione è che essa non è univoca: allo stesso osservabile classico ne corrispondono diversi quantistici. Per renderla univoca si può definire una mappa di quantizzazione che associ a una osservabile classica una sola osservabile quantistica e viceversa. Una mappa che risolve il problema è la mappa di Weyl, analizzata

nel dettaglio nel primo capitolo. La mappa permetterà inoltre di creare una corrispondenza biunivoca tra *stati* classici e quantistici.

Risolto il problema della corrispondenza tra stati e osservabili, l'attenzione si sposta sullo spazio delle fasi classico. Su questo spazio abbiamo mappato gli stati e le osservabili quantistiche della meccanica quantistica operatoriale. La nuova domanda che nasce a questo punto è: come creare una dinamica per osservabili su questo spazio che porti gli stessi risultati della meccanica quantistica operatoriale? Ancora, nello specifico: come creare una dinamica quantistica sullo spazio delle fasi che si riduca a quella classica per qualche limite? Queste domande troveranno risposta nell'introduzione di un nuovo prodotto non commutativo tra funzioni sullo spazio delle fasi.

Nel secondo capitolo si tratta di dinamiche per gli stati e le osservabili quantistiche introdotte da questo nuovo formalismo e si ritrovano, sullo spazio delle fasi, i risultati della meccanica quantistica.

Nel terzo capitolo viene introdotta un'altra mappa di quantizzazione con un nuovo prodotto non commutativo.

Nell'ultimo capitolo si fornisce una applicazione di quantizzazione inversa delle note funzioni d'onda quantistiche che rappresentano gli autostati dell'oscillatore armonico unidimensionale, e delle funzioni d'onda di stati coerenti.

Capitolo 1

Mappa di quantizzazione di Weyl

Ci sono due elementi che ci si propone sempre di trovare in una teoria che descriva sistemi dinamici: un oggetto che descriva univocamente lo stato del sistema ad ogni istante; delle quantità che rappresentino delle osservabili (ovvero delle grandezze osservabili, che ci dicono quali misure potremmo prendere sul sistema); dei numeri reali che rappresentino le misure di queste osservabili, prese sul sistema in esame.

Esaminiamo questi oggetti per la meccanica quantistica non relativistica (nel seguito la chiameremo *operatoriale*, o *tradizionale*, per distinguerla dalla *nuova* meccanica quantistica sullo spazio delle fasi oggetto di questa tesi). Per la meccanica quantistica tradizionale, quindi, gli stati sono rappresentati da classi di vettori su uno spazio di Hilbert H dette raggi: le classi costituiranno l'insieme quoziente di H secondo la relazione d'equivalenza \sim

$$|\varphi\rangle \sim |\phi\rangle \Rightarrow |\varphi\rangle = \alpha|\phi\rangle, |\alpha| = 1$$

Questa relazione d'equivalenza può essere letta, oltre che come una relazione matematica, come una relazione fisica, nel senso che due elementi della classe raggio sono fisicamente equivalenti tra loro. Quando vorremo fare operazioni con uno di questi raggi, basterà usare un generico rappresentante della classe (ovviamente tutte le predizioni fisiche devono essere insensibili alla fase α ; quello che ha infatti significato fisico nella misura è il modulo quadro della funzione d'onda). Qui inoltre si tratteranno solo i cosiddetti stati *puri*, vale a dire che nella nostra discussione conosciamo sempre quale vettore di H individua lo stato del sistema. In uno stato misto, invece, il sistema è

rappresentato da una combinazione a coefficienti reali di stati puri, dove i coefficienti rappresentano pesi statistici e si riferiscono alla probabilità di trovare il sistema in uno degli stati puri di cui è combinazione lineare [1]. Non ritorneremo più su questa distinzione.

Adesso il passo successivo è definire le osservabili fisiche e i valori di aspettazione di quest'ultime. In meccanica quantistica tradizionale, le osservabili fisiche sono operatori autoaggiunti sullo spazio H e i valori delle possibili misure sullo stato sono autovalori di questi operatori.

Tutto questo ha sempre fornito ottime previsioni teoriche del mondo microscopico, il problema è che a scale di grandezza molto superiori di quelle microscopiche della meccanica quantistica la fisica classica ha anch'essa fornito ottime previsioni teoriche. Da qui l'idea di un formalismo che colleghi meccanica classica e quantistica. La base sui cui costruire questo ponte teorico sarà il formalismo di Hamilton, così evidentemente presente e importante nella fisica classica, e così innegabilmente riconoscibile in alcuni risultati nella meccanica quantistica.

Qui saranno presentate le idee generali di un formalismo che risolve questa unificazione: la cosiddetta meccanica quantistica *delle deformazioni*; c'è molto del suo significato nel suo nome.

Quello che faremo è partire da una dinamica Hamiltoniana classica su una varietà $2n$ -dimensionale simplettica. Nel seguito verrà usata come varietà uno spazio lineare $2n$ -dimensionale, fibrato cotangente dello spazio lagrangiano n -dimensionale delle configurazioni. Nella nostra discussione useremo sempre coordinate simplettiche, per cui il tensore di Poisson avrà la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

e le equazioni di Hamilton avranno la forma

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \tag{1.1}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} \tag{1.2}$$

e la parentesi di Poisson, sarà scritta come

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \tag{1.3}$$

Indicheremo la varietà così definita, lo spazio delle fasi, come S [2]. La generalizzazione dei risultati che otterremo a varietà qualsiasi è un problema assai complesso, che non sarà affrontato qui.

Adesso quello che si vuole fare è introdurre nella trattazione classica una definizione di stato su S che sia più vicina a quella della meccanica quantistica. In dinamica classica uno stato che rappresenta una particella è un punto dello spazio delle fasi. Nella nostra teoria introduciamo l'indeterminatezza quantistica di uno stato nello spazio delle fasi dicendo che lo stato di questa particella non è più un punto, ma una distribuzione ρ su di esso (si tratterà più tardi del fatto che questa ρ su S in effetti è una distribuzione di quasi-probabilità, potendo assumere valori negativi). Sarebbe a dire che se la particella si trova in un determinato stato particolare, non possiamo più sapere la posizione e la velocità associate allo stato, ma solo probabilità di trovare la particella in un certo punto di S .

Un altro obiettivo da realizzare sul nostro spazio delle fasi classico, per vederlo come spazio quantistico, è l'introduzione di un nuovo prodotto non-commutativo fra funzioni (che indicheremo con un $*$). Richiederemo a questo prodotto che abbia le proprietà del prodotto tra due operatori su uno spazio di Hilbert (tra cui la non commutatività). Questo è un passo di fondamentale importanza, come vedremo di seguito.

Probabilmente l'idea più rilevante dietro questo modo di trattare la meccanica quantistica è di tipo geometrico. Quello che vogliamo formalmente è una struttura sullo spazio delle fasi *isomorfa a quella degli operatori sullo spazio di Hilbert*. Quando avremo realizzato un isomorfismo tra le due strutture, questo ci permetterà di operare su una struttura e riportare i risultati ottenuti nell'altra, e viceversa. La struttura algebrica con cui abbiamo a che fare in meccanica quantistica classica è chiaramente un'algebra degli operatori su uno spazio di Hilbert, che chiameremo $O(H)$. A questa facciamo corrispondere l'algebra delle funzioni sul nostro spazio delle fasi, indicata con $F(S)$ (con questa notazione verranno indicati sia le algebre sia gli spazi vettoriali $O(H)$ e $F(S)$)¹. Le operazioni interne proprie di queste due algebre sono rispettivamente la composizione tra operatori e un *nuovo* prodotto tra funzioni. Si capisce a questo punto la necessità di introdurre un prodotto

¹nello specifico si prova che l'isomorfismo si instaura tra l'algebra degli operatori di Hilbert-Schmidt e le funzioni a quadrato sommabile.

non commutativo tra funzioni sullo spazio delle fasi, pena l'impossibilità di definire un isomorfismo tra un'algebra dotata di un prodotto commutativo e una non commutativa. Questo isomorfismo sarà individuato da una mappa con la sua inversa.

Un risultato notevole è che questa mappa non è unica, così come il prodotto $*$. Inoltre a ogni mappa resta associato un prodotto, e viceversa. Di seguito si mostrerà particolare attenzione per la mappa di quantizzazione di Weyl con la sua inversa, il simbolo di Weyl (o mappa di Wigner) e per il prodotto di Moyal, corrispondente alla mappa.

In quello che segue non ci si è interessati dei problemi legati al dominio di operatori non limitati, ad esempio il noto problema della definizione di un commutatore in cui compare almeno un operatore non limitato. Similmente assumiamo che useremo solo funzioni di S su cui sia *possibile* fare le operazioni che di volta in volta verranno chiamate in causa (es. derivate di ordine n , trasformate di Fourier, ecc.).

1.1 Mappa di quantizzazione di Weyl-Wigner

Quando ci si trova di fronte al problema di quantizzare un sistema fisico classico il primo problema da affrontare è sapere quali operatori autoaggiunti corrispondano a quali osservabili classici. Sebbene la quantizzazione per osservabili come la posizione e il momento non presenti problemi,

$$q_i \rightarrow Q_i$$

$$p_i \rightarrow P_i \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$$

quantizzare combinazioni lineari di prodotti misti $p_i^n q_i^m$ crea un problema di ordinamento: a funzioni di questo tipo possono corrispondere diversi operatori. Esempio

$$q_i^2 p_i^4 \rightarrow Q_i^2 P_i^4 \quad \text{oppure} \quad q_i^2 p_i^4 \rightarrow Q_i P_i Q_i P_i^3$$

Il motivo di questa non univocità è da ricercare nella non commutatività dell'algebra degli operatori. Mentre l'algebra delle funzioni su S dotate del prodotto per punti è un'algebra commutativa, quella degli operatori su H

non lo è. Questo si riflette nel fatto che si possono far corrispondere a una stessa funzione diversi operatori, ognuno corrispondente a un ordinamento particolare.

Alcuni esempi notevoli sono:

$$qp \rightarrow QP \quad (1.4)$$

ordinamento standard,

$$qp \rightarrow PQ \quad (1.5)$$

ordinamento antistandard,

$$qp \rightarrow \frac{1}{2}(QP + PQ) \quad (1.6)$$

ordinamento simmetrico di Weyl,

$$x^2p \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2i}}(\hat{a}^3 - \hat{a}^{\dagger 2}a + \hat{a}^{\dagger}a^2 - \hat{a}^{\dagger 3}) \quad (1.7)$$

ordinamento normale o di Wick [3].

Qui \hat{a} e \hat{a}^{\dagger} sono gli operatori di distruzione e creazione dell'oscillatore armonico (Q e P sono gli operatori posizione e momento adimensionali)

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \quad \hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \quad (1.8)$$

Come risolvere quindi il problema dell'ordinamento?

Il problema dell'assegnare operatori di $O(H)$ a funzioni di $F(S)$ in modo sistematico può essere risolto da una mappa su $O(H)$ definita in questo modo [4]

$$\Omega_{\gamma}(f) = \int \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi Q + \eta P)} e^{\frac{\hbar}{2}(\nu \gamma \xi \eta)} d\xi d\eta \quad (1.9)$$

dove \tilde{f} è la trasformata di Fourier di f , Q e P sono gli operatori corrispondenti alle variabili q e p su S . Differenti scelte di γ portano differenti ordinamenti. Precisamente $\gamma = -1$ conduce all'ordinamento standard, $\gamma = 1$ a quello antistandard e $\gamma = 0$ all'ordinamento simmetrico di Weyl (all'ordinamento di Wick sarà associata la mappa e il prodotto di Voros, detto anche di Wick, come si vedrà più avanti). La mappa per $\gamma = 0$ è la *Mappa di Weyl*.

$$\Omega_W(f) = \int \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi Q + \eta P)} d\xi d\eta \quad (1.10)$$

$$\Omega_W(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(q, p) e^{-i\xi(Q-q) - i\eta(P-p)} d\xi d\eta dq dp \quad (1.11)$$

Questa mappa così definita è lineare e, cosa fondamentale, associa a funzioni reali operatori hermitiani, come ci saremmo aspettati da una mappa quantizzazione che abbia un significato fisico.

Cerchiamo di fare luce sulla formulazione della Mappa di Weyl nella forma (1.10). Innanzitutto, formuliamo la nostra Ω_W per la funzione $(aq+bp)^n$. Una corrispondenza che porti a un ordinamento simmetrico per questa funzione è $(aQ + bP)^n$

$$\Omega_W((aq + bp)^n) = (aQ + bP)^n \quad (1.12)$$

Ora, ci si rende conto che vale

$$\Omega_W(e^{aq+bp}) = e^{aQ+bP} \quad \text{siccome} \quad e^{aq+bp} = \sum_{n=0}^{\infty} (aq + bp)^n \quad (1.13)$$

Adesso scriviamo la nostra generica funzione f in trasformata di Fourier:

$$f(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi q + \eta p)} d\xi d\eta \quad (1.14)$$

e applichiamo a questa formulazione della f la mappa Ω_W . Siccome Ω_W è lineare, possiamo scambiare la mappa con l'integrale. Abbiamo così:

$$\Omega_W(f) = \Omega_W \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi q + \eta p)} d\xi d\eta \right) \quad (1.15)$$

$$\Omega_W(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{f}(\xi, \eta) \Omega_W(e^{-i(\xi q + \eta p)}) d\xi d\eta \quad (1.16)$$

$$\Omega_W(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi Q + \eta P)} d\xi d\eta \quad (1.17)$$

In sostanza quindi la mappa di Weyl è l'antitrasformata di Fourier di f con l'esponenziale $e^{-i(\xi q + \eta p)}$ sostituito da $e^{-i(\xi Q + \eta P)}$.

La mappa Ω_W (al pari delle altre mappe) è invertibile: l'inversa Ω_W^{-1} ci permette di associare a un elemento di $O(H)$ uno di $F(S)$ in modo che

$$\Omega_W^{-1}(\Omega_W(f)) = f \quad \Omega_W \Omega_W^{-1} = I \quad (1.18)$$

L'inversa Ω_W^{-1} di Ω_W resta definita come

$$\Omega_W^{-1}(A) = \frac{1}{2\pi} \int \langle q + \frac{1}{2}\xi | A | q - \frac{1}{2}\xi \rangle e^{\frac{-i\xi p}{\hbar}} d\xi \quad (1.19)$$

Ω_W^{-1} viene detto anche Simbolo di Weyl o Mappa di Wigner.

1.2 Prodotto di Moyal

Introdotta la mappa di quantizzazione Ω_W con la sua inversa, quello che è conveniente fare è introdurre un prodotto $*$ su $F(S)$ in modo che valga

$$\Omega_W^{-1}(\Omega_W(f) \circ \Omega_W(g)) = f * g \quad (1.20)$$

In questo modo si verrà a creare un isomorfismo tra due algebre non commutative $F_*(S)$ (l'algebra delle funzioni su S dotata del prodotto $*$) e $O(H)$. L'importanza di questo risultato è fondamentale, poiché un isomorfismo ci permette di trasferire i risultati della meccanica quantistica operatoriale sul nostro spazio delle fasi e viceversa, facendo in modo che alla fine non avremo bisogno più di $O(H)$ per trattare sistemi quantistici.

Ebbene, come costruire in generale un prodotto $*$ a partire da un prodotto puntuale in modo che valga la (1.20)? La risposta è: per *deformazione* del prodotto puntuale. Vale a dire che scriveremo il nostro prodotto $*$ in serie di un parametro $i\hbar$. Ogni potenza n -esima di $i\hbar$ sarà modulata da dei coefficienti C_n (funzioni di tutte le derivate successive di f e g) in cui compariranno solo prodotti puntuali.

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} (i\hbar)^n C_n(f, g) \quad (1.21)$$

Inoltre, possiamo richiedere ai C_n che nel limite $\hbar \rightarrow 0$ il prodotto $*$ si riduca al prodotto puntuale, imponendo $C_0(f, g) = fg$. Quindi la scrittura di $*$ per deformazione non è solo un comodo strumento matematico, ma ci restituisce anche un limite fisico.

Esamineremo qui in dettaglio le altre proprietà necessarie che richiediamo a questo prodotto $*$. E' immediato richiedere tutte le proprietà del noto prodotto \circ tra operatori. Dal momento che

$$\Omega^{-1}(\Omega(f) \circ \Omega(g)) = f * g$$

e che la nostra mappa Ω è lineare con la sua inversa, è facile provare che il prodotto $*$ deve essere associativo (valendo l'associatività in $O(H)$) e lineare (dalla linearità della mappa). Richiediamo inoltre l'hermitianeità

$$f^* * g^* = (g * f)^* \quad (1.22)$$

proprietà corrispondente in $O(H)$ a

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (1.23)$$

Gerstenhaber trovò le condizioni necessarie che devono soddisfare i coefficienti C_n affinché $*$ fosse associativo e inoltre verificasse la fondamentale relazione

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_* = \{f, g\} \quad (1.24)$$

dove

$$[f, g]_* = f * g - g * f \quad (1.25)$$

Spendiamo qualche commento su questo limite. Per capirne meglio l'importanza, facciamo qualche considerazione dinamica. Nella sezione precedente avevamo definito una mappa che faceva corrispondere a un operatore A una funzione su S . Adesso la domanda che ci poniamo è la seguente: come trovare una funzione che corrisponda ad ogni istante, attraverso la mappa, all'operatore evoluto A_t secondo la descrizione di Heisenberg? Siccome vale l'equazione di Heisenberg per l'evoluzione di un osservabile [1]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.26)$$

si può mappare questa equazione per ottenere l'equivalente in $F_*(S)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [f, H]_* + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.27)$$

dove $f = \Omega^{-1}(A)$.

Quindi la (1.27) è la corretta evoluzione *quantistica* di una funzione f su S che rappresenta un osservabile. Adesso si capisce l'importanza della (1.24): questa ci fornisce un modo per ritrovare nel limite $\hbar \rightarrow 0$ la dinamica classica

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.28)$$

Vale a dire, più le dimensioni del nostro sistema sono grandi (il parametro \hbar va confrontato con le dimensioni del sistema), più ci è permesso trascurare nel nostro prodotto $*$ potenze sempre più basse di $i\hbar$, fino al limite per cui $*$ si riduca al prodotto puntuale della dinamica classica. In questo modo

stiamo deformando la dinamica del nostro sistema e possiamo, troncando da un certo termine in poi i termini della serie (1.21), ottenere una dinamica più o meno deformata (cioè quantistica). Considerando tutti i termini nella (1.21) otteniamo una dinamica totalmente quantistica.

Facciamo un esempio di *uso scorretto di dinamiche*. Vogliamo studiare l'evoluzione del valor medio di un operatore $A_{t=0}$ (l'operatore che rappresenta l'osservabile al tempo 0) su un certo stato $|\psi\rangle$. A questo punto potremmo pensare di usare la mappa di Wigner per trovare la funzione $\Omega^{-1}(A_{t=0}) = f_{t=0}$ corrispondente all'operatore, calcolarne l'evoluzione temporale f_t secondo la dinamica classica (1.28), riportare indietro l'operatore che rappresenta il valore dell'osservabile al tempo t $\Omega(f_t) = A_t$ e calcolarne il valor medio. Ebbene, questo valor medio sarebbe quello scorretto, poiché il prodotto puntuale su cui si basa la dinamica classica non rispetta l'equazione (1.20).

$$\Omega^{-1}(\Omega(f) \circ \Omega(g)) \neq fg \quad (1.29)$$

In altre parole prendendo il simbolo di Weyl di (1.28) non si ottiene (1.26). Il procedimento corretto sarebbe, una volta trovata $f_{t=0}$, calcolarne l'evoluzione secondo la (1.27) e trovare il valor medio dell'operatore corrispondente a questa nuova f_t . Anticipiamo qui, come sarà spiegato nella sezione successiva, che esiste un equivalente del calcolo del valor medio di un operatore direttamente in $F_*(S)$.

Cerchiamo ora di dare un'espressione al prodotto $*$. La proprietà (1.24) può essere scritta come

$$C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\} \quad (1.30)$$

In questi termini appare immediato definire almeno 2 espressioni dei coefficienti C_1 che soddisfino la condizione (1.30) (gli indici i e j sono relativi al vettore (\vec{q}, \vec{p}) e vanno da 1 a $2n$, l'indice n va da 1 a n):

$$C_{1\alpha}(f, g) = \frac{1}{2}\alpha^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g) = \frac{1}{2}\{f, g\} \quad (1.31)$$

$$C_{1\beta}(f, g) = \beta^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g) = \partial_{q_n} f \partial_{p_n} g \quad (1.32)$$

dove α e β sono

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Gli altri coefficienti possono essere ricavati prendendo l'esponenziale di C_1 . In questo modo otteniamo due prodotti $*$, il prodotto star di Moyal

$$f *_M g = f e^{(\frac{i\hbar}{2})\alpha^{ij}\overleftarrow{\partial}_i\overrightarrow{\partial}_j} g \quad (1.33)$$

e il cosiddetto prodotto con ordinamento standard

$$f *_M g = f e^{(i\hbar)\overleftarrow{\partial}_q\overrightarrow{\partial}_p} g \quad (1.34)$$

I due prodotti sono legati da un operatore invertibile di transizione T [5]

$$T = e^{-(\frac{i\hbar}{2})\overleftarrow{\partial}_i\overrightarrow{\partial}_j} \quad (1.35)$$

in modo che

$$f *_S g = T^{-1}(Tf *_M Tg) \quad (1.36)$$

In generale, almeno sul nostro spazio delle fasi $2n$ - dimensionale dotato di un tensore di Poisson nella forma standard (1), si può provare che per tutti i prodotti $*'$ che si possono scrivere esiste un operatore T che realizza

$$f *_' g = T^{-1}(Tf *_M Tg) \quad (1.37)$$

L'operatore di transizione T si può sempre scrivere come

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} (\hbar)^n T_n \quad (1.38)$$

dove T_n sono operatori differenziali dipendenti dal caso particolare. Ognuno di questi prodotti corrisponderà a una particolare mappa di quantizzazione in modo che valga la (1.20). Qui si approfondirà la quantizzazione relativa al prodotto di Moyal. Un'altra espressione del prodotto $*_M$ equivalente alla (1.33) è la seguente

$$f *_M g(q, p) = \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 f(q_1, p_1) g(q_2, p_2) e^{[\frac{2}{i\hbar}(q_1 - q)(p_2 - p) + (q_2 - q)(p - p_1)]} \quad (1.39)$$

Il prodotto così definito presenta tutte le proprietà che abbiamo richiesto. E' inoltre importante riconoscere, in ognuna delle sue formulazioni, una proprietà di non località al prodotto di Moyal, che lo rende adatto alla descrizione di una dinamica quantistica. Infatti, nella formulazione (1.33) il prodotto coinvolge tutte le derivate successive delle funzioni f e g nel punto, specificandole

completamente in tutto lo spazio (in altre parole, è la forma delle funzioni su tutto lo spazio, e non solo il loro valore nel punto (q, p) a determinare il prodotto $*_M$, contrariamente a quanto accade nel prodotto puntuale $f \cdot g$); nella formulazione (1.39) è ancora più immediato il carattere di non località del prodotto, comparando integrali a tutto lo spazio di f e g modulati dall'esponenziale.

Capitolo 2

Stati, osservabili e dinamica

Abbiamo stabilito nelle sezioni precedenti che lo stato nel formalismo della deformazione è costituito da una distribuzione, che indicheremo con $\rho(q, p)$ su S . Vedremo ora di ritrovare i risultati della meccanica quantistica tradizionale. Questa distribuzione è ovviamente l'equivalente della funzione d'onda $|\psi\rangle$ che rappresenta lo stato nel formalismo operatoriale, e la relazione tra le due deve essere cercata attraverso Ω_W^{-1} che mappa l'operatore $|\psi\rangle\langle\psi|$ in $\rho(q, p)$.

$$\Omega_W^{-1}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \rho(q, p) \quad (2.1)$$

Utilizzando il simbolo di Weyl (1.19) troviamo l'espressione per la $\rho(q, p)$:

$$\rho(q, p) = \Omega_W^{-1}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{2\pi} \int \langle q + \frac{1}{2}\xi | \psi \rangle \langle \psi | q - \frac{1}{2}\xi \rangle e^{\frac{-i\xi p}{\hbar}} d\xi \quad (2.2)$$

$$\rho(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \psi^*(q - \frac{\xi}{2}) \psi(q + \frac{\xi}{2}) e^{-ip\xi} d\xi \quad (2.3)$$

La distribuzione $\rho(q, p)$ sullo spazio delle fasi è chiamata funzione di Wigner: da qui in poi la indicheremo con un pedice ρ_W . La può essere usata per trovare le densità di probabilità nello spazio delle coordinate e dei momenti rispettivamente attraverso:

$$P(q) = \int dp \rho_W(q, p) = |\psi(q)|^2 \quad (2.4)$$

$$P(p) = \int dq \rho_W(q, p) = |\varphi(p)|^2 \quad (2.5)$$

dove $\varphi(p)$ è la funzione d'onda nello spazio delle fasi corrispondente a $\psi(x)$. In realtà si prova che **nel caso generico** una distribuzione ρ_W che sia definita positiva non va bene per descrivere uno stato: ad alcuni punti dello

spazio delle fasi possono corrispondere probabilità negative, per questo la distribuzione ρ_W è detta di quasi-probabilità. Tuttavia possono essere trovate condizioni necessarie e sufficienti sullo stato quantistico affinché la funzione ρ_W corrispondente sia definita positiva. Per una trattazione dettagliata, si veda [6]. Si capisce facilmente la (2.4) attraverso la (2.3):

$$\begin{aligned} \int dp \rho_W(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int dp \int \psi^*(q - \frac{\xi}{2}) \psi(q + \frac{\xi}{2}) e^{-ip\xi} d\xi = \\ &= \int \psi^*(q - \frac{\xi}{2}) \psi(q + \frac{\xi}{2}) \delta(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

usando la rappresentazione integrale della funzione delta $\delta(\xi)$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-ip\xi} dp = \frac{1}{2\pi} \int e^{ip\xi} dp = \delta(\xi)$$

considerazioni simili portano alla distribuzione di probabilità per i momenti.

Il valore medio di un osservabile $f(q, p)$ può essere calcolato usando la ρ in questo modo

$$\langle f_t \rangle = \int (\rho *_M f_t) dq dp \quad (2.7)$$

Presentiamo adesso alcune nozioni di dinamica. Come si è già detto in precedenza, gli osservabili f evolvono con

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [f, H]_{*M} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.8)$$

Quindi i loro valori medi calcolati secondo la (2.7) cambieranno nel tempo calcolati sulla distribuzione ρ_0 dell'istante 0. Questo modo di vedere le cose è l'equivalente della rappresentazione di Heisenberg per quanto riguarda lo spazio $O(H)$. Un'altra cosa che si può fare è definire l'equivalente dell'equazione di Schroedinger per gli stati stazionari per la distribuzione $\rho(q, p)$. Iniziando dall'equazione di Schroedinger per gli stati stazionari $|\psi_E\rangle$

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle \quad (2.9)$$

che implica

$$H|\psi_E\rangle\langle\psi_E| = E|\psi_E\rangle\langle\psi_E| \quad (2.10)$$

Si può quindi prendere il simbolo di Weyl dell'equazione

$$\Omega_W^{-1}[H|\psi_E\rangle\langle\psi_E|] = \Omega_W^{-1}[E|\psi_E\rangle\langle\psi_E|] \quad (2.11)$$

e usando la proprietà $\Omega_W^{-1}[A \circ B] = \Omega_W^{-1}(A) *_M \Omega_W^{-1}(B)$, dove $A \equiv H, B \equiv |\psi_E\rangle\langle\psi_E|$, e la (2.1) si giunge a un'equazione trasformata dell'equazione stazionaria di Schrodinger

$$H *_M \rho_E = E \rho_E \quad (2.12)$$

dove H è il simbolo di Weyl dell'Hamiltoniana quantistica H , ovvero la semplice Hamiltoniana della fisica classica. Gli stati rappresentati dalla distribuzione ρ_E a energia definita che soddisfano la (2.12) sono distribuzioni chiamate proiettori.

$$E = \frac{1}{2\pi\hbar} \int (H *_M \rho_E) dq dp \quad (2.13)$$

Si tratta di stati stazionari, trasformati degli autovettori $|\psi_E\rangle$, per cui il valore medio di qualsiasi osservabile calcolato su un proiettore rimarrà costante nel tempo. Un altro modo per dire questo è che $[H, \rho_E]_{*_M} = 0$. Così come un generico stato $|\psi\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare degli $|\psi_E\rangle$, la generica distribuzione corrispondente ρ sarà combinazione dei ρ_E (risultato abbastanza ovvio, dalla linearità della mappa).

Capitolo 3

Mappa e prodotto di Voros

In questa sezione ci occuperemo di un'altra mappa su $O(H)$. Mostriamo come sia possibile costruire una mappa a partire dagli stati coerenti $|z\rangle$, e come si rivelino cruciali alcune proprietà che possiedono.

Per cominciare, uno stato coerente $|z\rangle$, $z \in \mathcal{C}$, è definito come autostato dell'operatore distruzione \hat{a} , definito in questo modo

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \quad (3.1)$$

dove Q e P sono gli operatori posizione e momento adimensionali.

Sarà allora

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \quad z \in \mathcal{C} \quad (3.2)$$

z è un numero complesso, e questo non è in contraddizione col fatto che \hat{a} non è autoaggiunto. Infatti \hat{a} non è neppure simmetrico, e si ha:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \quad (3.3)$$

Uno stato coerente può essere scritto

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (3.4)$$

O in termini dell'operatore unitario

$$D(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} |0\rangle \quad (3.5)$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico unidimensionale. Lo stato coerente come funzione della variabile adimensionale di posizione q

è scritto, normalizzato, come

$$|z\rangle = \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{\sqrt{2}qz - \frac{q^2}{2}} \quad (3.6)$$

oppure

$$|z\rangle = \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{Re[z]^2} e^{i\sqrt{2}Im[z]q} e^{-\frac{(q-\sqrt{2}Re[z])^2}{2}} \quad (3.7)$$

che rappresenta una gaussiana in q centrata in $-\sqrt{2}Re[z]$, con una fase data da $\sqrt{2}Im[z]$. Inoltre ogni operatore sullo spazio di Hilbert degli stati $|\psi(q)\rangle$ può essere scritto come serie

$$A = \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \quad (3.8)$$

Allo stesso tempo, ogni funzione sullo spazio delle fasi S può essere espansa in serie come

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{n,m}^{\infty} f_{nm} \bar{z}^n z^m \quad (3.9)$$

dove $z = \frac{(q+ip)}{\sqrt{2}}$.

$$Re[z] \rightarrow \frac{q}{\sqrt{2}}, \quad Im[z] \rightarrow \frac{p}{\sqrt{2}} \quad (3.10)$$

Quindi l'idea della nostra nuova mappa Ω_V (che chiameremo di Voros) è che a ogni operatore A si può associare una funzione f in questo modo:

$$f(z, \bar{z}) = \langle z|A|z\rangle \quad (3.11)$$

di conseguenza all'operatore (3.8) sarà associata la funzione

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm} \bar{z}^n z^m \quad (3.12)$$

e viceversa[7]. In questo modo dal momento che

$$\langle z|\hat{a}^{\dagger}|z\rangle = \bar{z}, \quad \langle z|\hat{a}|z\rangle = z \quad (3.13)$$

Questa mappa conduce al cosiddetto ordinamento normale o di Wick (1.7). Abbiamo ancora un isomorfismo da $O(H)$ a $F(S)$. Si noti che il problema usuale adesso è trovare il prodotto non commutativo corrispondente a questa

mappa, in modo da sviluppare una meccanica quantistica sullo spazio delle fasi, così come è stato fatto per la mappa di Weyl. Un prodotto che ha le proprietà adatte resta definito da

$$f *_V g = \langle z|AB|z \rangle \quad (3.14)$$

dove $\Omega_V(f) = A$, $\Omega_V(g) = B$.

Si prova che il prodotto che soddisfa la (3.14) è

$$*_V \rightarrow e^{\frac{\overline{\partial}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \quad (3.15)$$

z e \bar{z} possono essere riscritti $z \rightarrow \frac{z}{\hbar}$, $\bar{z} \rightarrow \frac{\bar{z}}{\hbar}$ per ottenere un prodotto che ammette un limite commutativo $\lim \hbar \rightarrow 0$.

$$*_V \rightarrow e^{\hbar \frac{\overline{\partial}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \quad (3.16)$$

Il prodotto così ottenuto è il prodotto di Voros (detto anche di Wick). Ovviamente vale per questo prodotto e questa mappa la proprietà cruciale

$$f *_V g = \Omega_V^{-1}(\Omega_V(f)\Omega_V(g)) \quad (3.17)$$

A questo punto usando la (3.17) si può riportare la meccanica quantistica operatoriale su S attraverso questa nuova mappa, definendo nuovi stati su S (che possiamo indicare come ρ_V), nuove equazioni agli autovalori, e via di seguito, così come è stato fatto nel Capitolo 2 per la mappa di Weyl.

Si noti che la (2.4), ottenuta per la mappa di Weyl, non vale più per quella di Voros: integrando la $\rho_V(q, p)$ in p non si ottengono le densità di probabilità per q . Il risultato ottenuto dipendeva dalla particolare mappa usata e non dalla proprietà 3.17 valida per tutte le mappe e i rispettivi prodotti associati.

Capitolo 4

Esempi di mappe inverse di quantizzazione: l'oscillatore armonico e gli stati coerenti

In questo capitolo saranno mostrate le funzioni sullo spazio delle fasi associate attraverso le mappe di Wigner Ω_W^{-1} e di Voros Ω_V^{-1} di alcune funzioni d'onda d'onda quantistiche. Inizieremo con analizzare le funzioni d'onda $\psi_w(q)$ (indicata in notazione di Dirac come $|w\rangle$) (3.7) associate allo stato coerente di autovalore w . Utilizzando la (2.3) possiamo scrivere la ρ_W corrispondente a uno stato coerente $|w\rangle$. Ebbene, il risultato, per uno spazio delle fasi in variabili adimensionali p e q , è una funzione gaussiana del tipo:

$$\rho_{Wcoerente}(q, p) = N e^{-(q-\sqrt{2}Re[w])^2 - (p-\sqrt{2}Im[w])^2}$$

dove N è un opportuno fattore di normalizzazione. La $\rho_{Wcoerente}$, grafica in figura 4.1 è chiaramente una gaussiana in due dimensioni centrata in $(\sqrt{2}Re[w], \sqrt{2}Im[w])$. Questo è consistente con il risultato che abbiamo dato nei capitoli precedenti:

$$P_{coerente}(q) = \int dp \rho_{Wcoerente}(q, p) = |\psi_w(q)|^2 \quad (4.1)$$

dal momento che $|\psi_w(q)|^2$ è gaussiana centrata in $\sqrt{2}Re[w]$. Vediamo adesso di trovare la funzione $\rho_{Vcoerente}$ corrispondente allo stato coerente secondo la mappa di Voros. Usando la (3.11) si vede che è molto facile ottenere:

$$\rho_{Vcoerente}(q, p) = \langle z|w\rangle\langle w|z\rangle \quad (4.2)$$

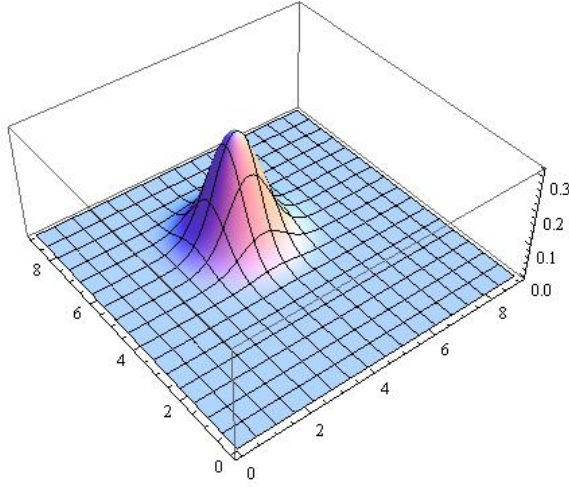


Figura 4.1: Funzione secondo la mappa di Wigner (e di Voros) per lo stato coerente, per $w = 3 + 4i$

rappresenta il prodotto scalare tra due stati coerenti $|w\rangle$ e $|z\rangle$, con $z = \frac{x+ip}{\sqrt{2}}$, in modulo quadro. Usando l'algebra di \hat{a} e \hat{a}^\dagger è semplice calcolare:

$$\rho_{Vcoerente}(q, p) = \langle z|w\rangle\langle w|z\rangle = e^{-|z-w|^2} \quad (4.3)$$

La funzione $\rho_{Vcoerente}$ rappresenta la stessa gaussiana individuata da $\rho_{Wcoerente}$. Per lo stato coerente, quindi, le mappe di Wigner e di Voros restituiscono la stessa distribuzione su S . In generale non è così, come vedremo di seguito.

Esaminiamo adesso la funzione associata all'autostato dell'oscillatore armonico 1-dimensionale $\psi_n(q)$ (in notazione di Dirac $|n\rangle$) secondo la mappa di Wigner (lo facciamo per $n=4$). Usando la (2.3), il risultato che si ottiene è graficato in figura 4.2. Qui si vede chiaramente l'aspetto di *quasiprobabilità* della funzione $\rho_{Warmonico}$: la distribuzione assume valori negativi. Questo magari potrà rendere il formalismo poco intuitivo, ma in realtà quello che fisicamente è rilevante non sono i valori che la ρ_W assume sui vari punti di S , ma il suo integrale su tutta la dimensione p : eseguendolo, ritroviamo esattamente la distribuzione in probabilità data da $|\psi_{n=4}(q)|^2$ (fig. 4.3). Allo stesso modo ritroviamo i valori medi degli osservabili sullo stato e gli autovalori dell'equazione trasformata di Schrodinger, così come mostrato nel capitolo 2.

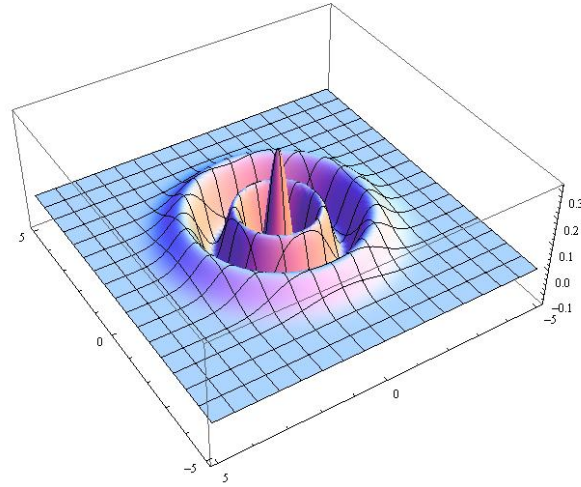


Figura 4.2: Funzione secondo la mappa di Wigner per l'autostato $n=4$ dell'oscillatore armonico

Mostriamo adesso la distribuzione $\rho_{V\text{armonico}}$ associata a $\psi_{n=4}(q)$ secondo la mappa di Voros. Di nuovo, quello che si deve calcolare è:

$$\rho_{V\text{armonico}} = \langle z|n\rangle\langle n|z\rangle$$

il calcolo si fa algebricamente e il risultato è una funzione

$$\rho_{V\text{armonico}} = e^{-\frac{|w|^2}{2}} \frac{|w|^{2n}}{n!}$$

che è una distribuzione di Poisson in $|w|^2$.

In figura 4.4 è graficato l'andamento secondo q dell'integrale della distribuzione $\rho_{V\text{armonico}}$ in p . Si vede come sia diverso da quello ottenuto per la distribuzione $\rho_{W\text{armonico}}$

$$\int dp \rho_{V\text{armonico}}(q, p) \neq |\psi_{n=4}(q)|^2$$

Per le distribuzioni di Voros, infatti, l'integrale $\int dp \rho_V$ non ha il significato della densità di probabilità nello spazio delle configurazioni.

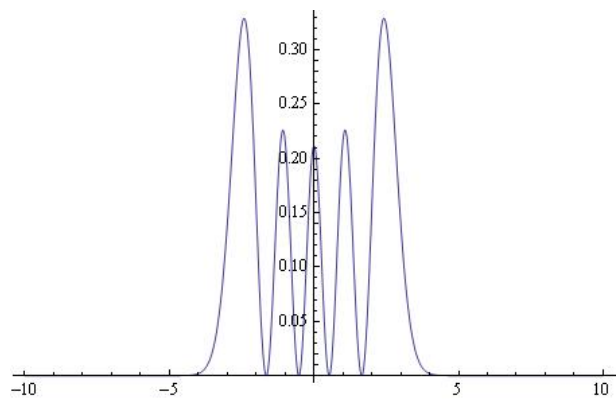


Figura 4.3: Distribuzione di probabilità $P(q)$ ottenuta integrando la distribuzione $\rho_{Warmonico}$, corrispondente al vettore d'onda $\psi_{n=4}(q)$ in p

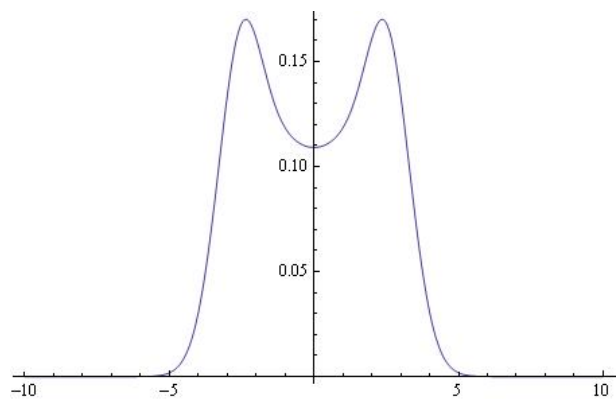


Figura 4.4: distribuzione di probabilità in q ottenuta integrando su p la funzione $\rho_{Varmonico}$, corrispondente al vettore d'onda $\psi_{n=4}(q)$

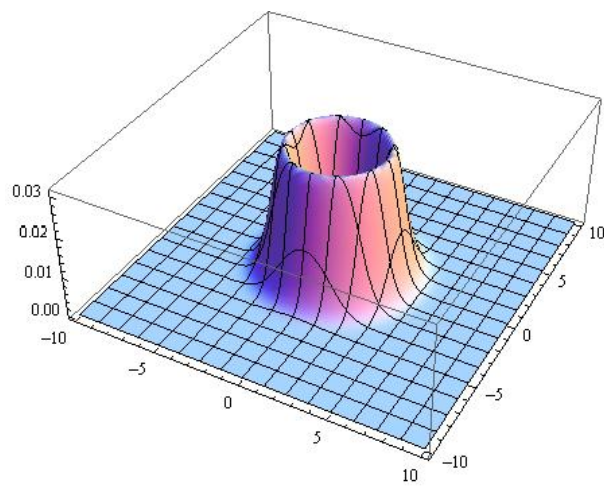


Figura 4.5: Funzione secondo la mappa di Voros per l'autostato $n=4$ dell'oscillatore armonico

Bibliografia

- [1] Piero Caldirola, Renzo Cirelli, Giovanni M. Prosperi, *Introduzione alla Fisica Teorica* (Utet 1982).
- [2] Per una introduzione vedi: A. Romano, *Lezioni di Meccanica Razionale*, (Liguori, Napoli, 1990).
- [3] M. Bordemann and S. Waldmann, “A Fedosov Star Product of Wick Type for Kähler Manifolds” (1996) arXiv:q-alg/9605012.
- [4] H. Weyl, *The theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover, 1931).
- [5] A. C. Hirshfeld and P. Henselder, “Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics,” *Am. J. Phys.* **70**, 537 (2002).
- [6] V.I. Tatarskii, The Wigner representation of quantum mechanics, *Usp. Fiz. Nauk* **139** 587-619, April 1983
- [7] F. Lizzi, P. Vitale and A. Zampini, “The fuzzy disc,” *JHEP* **0308** (2003) 057[arXiv:hep-th/0306247].
- [8] G. Alexanian, A. Pinzul and A. Stern, “Generalized Coherent State Approach to Star Products and Applications to the Fuzzy Sphere,” *Nucl. Phys. B* **600** (2001) 531[arXiv:hep-th/0010187].