Università degli Studi di Napoli
Federico II

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Anno Accademico 2003/2004

Tesi di Laurea in Fisica

Alcuni effetti del troncamento nei sistemi dinamici discreti

Candidato:
Antonella Garzilli
matr. 567/21

Relatore:
Prof. Fedele Lizzi

Introduzione

Tipicamente in fisica si studiano i sistemi fisici tramite modelli continui. In alternativa all'approccio continuo, che prevede lo studio di equazioni differenziali, esiste la possibilità di scegliere modelli discreti, che comportano lo studio di applicazioni iterate. Questi due modi di studiare un problema sono praticamente intercambiabili, nel senso che in genere si può passare dall'uno all'altro caso in modo abbastanza semplice. Per esempio, potremmo decidere di studiare l'evoluzione di uno stesso sistema rispetto ad un tempo inteso come variabile continua o rispetto a un tempo discreto (per esempio ci interessa conoscere la concentrazione dei reagenti in una soluzione chimica ogni ora oppure ogni secondo). I sistemi dinamici discreti oltre che nella fisica hanno applicazioni in chimica biologia etc.

Supponiamo di avere a disposizione un sistema dinamico discreto e di volerne studiare l'evoluzione a partire da un dato punto iniziale. Se non ci sono punti di stabilità verso cui tendono le soluzioni, o comunque comportamenti asintotici noti, potremmo pensare di studiare l'evoluzione del sistema con l'ausilio di un calcolatore, ma qui entrano in gioco gli effetti dell'approssimazione dei numeri reali nel calcolatore. Fino a quanto possiamo fidarci dei risultati del nostro computer?

L'argomento di questa tesi è lo studio dell'effetto del troncamento delle cifre decimali di due particolari sistemi dinamici discreti definiti dalla funzione logaritmica, una funzione elementare, ma fortemente non lineare, e dalla applicazione logistica. Analizziamo l'evoluzione del sistema dinamico, studiando fino a che punto le previsioni che possiamo compiere al calcolatore intorno ad un sistema dinamico discreto siano in accordo con il risultato esatto, al variare del numero di cifre decimali impiegate nei calcoli. Per fare questo sono state effettuate delle simulazioni numeriche. A questo passo potrebbe seguire lo studio delle proprietà analitiche della funzione logaritmo, come pure delle proprietà di ergodicità o di mixing, etc., studio che è ancora da compiere.

La tesi si articola nel seguente modo. Nel capitolo 1 c'è una breve discussione su alcune proprietà interessanti e criteri dei sistemi dinamici discreti.

Nel capitolo 2 definiamo le famiglie di sistemi dinamici e trattiamo brevemente una famiglia molto studiata in letteratura, la più semplice famiglia che introduce al mondo non-lineare, la funzione logistica. Nel capitolo 3 l'analisi svolta intorno al sistema dinamico discreto definito dal logaritmo. La tesi si conclude con una breve descrizione delle possibili prospettive di un lavoro di questo tipo.

Indice

Capitolo 1

Sistemi dinamici discreti

1.1 Definizione di sistema dinamico discreto

Un sistema dinamico discreto è una successione di elementi in cui l'elemento n-esimo è determinato dagli elementi precedenti tramite una regola ben definita. I sistemi dinamici trovano molte applicazioni nel mondo reale nell'ambito della biologia, nella fisica, chimica, finanza etc., per esempio per modellizzare le variazioni nella popolazione di una data specie animale da un anno all'altro, per prevedere la sopravvivenza di un certo carattere in seguito a mutazioni geniche, nelle previsioni metereologiche...

Per definire lo stato di un sistema fisico chimico biologico si usano i parametri $x_1\ x_2 \ldots x_m$ che tipicamente assumeranno dei valori numerici, perciò prenderemo in considerazione successioni di vettori di $\mathbb{R}^n$. Inoltre considereremo solo successioni in cui l'elemento n-esimo dipende solo dall'elemento immediatamente precedente e non da tutti i precedenti; questi sistemi dinamici saranno detti *sistemi dinamici del primo ordine.* Esistono sistemi del secondo ordine, in cui l'elemento n-esimo dipende dagli elementi $(n-1)$-esimo e $(n-2)$-esimo, e in generale sistemi di ordine m, in cui ogni elemento dipende dagli m elementi precedenti. In questa tesi ci limitiamo al caso unidimensionale.

Riassumendo, sia data una successione di funzioni $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}_0$:

Definizione 1.1 (sistema dinamico del primo ordine) *Si dice sistema dinamico discreto del primo ordine l'applicazione $\psi : I \to I^{\mathbb{N}_0}$ che ad ogni $x \in I$ associa la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq I$, definita per ricorrenza ponendo*

$$\begin{cases} x_0 & = & x \\ x_n & = & f_{n-1}(x_{n-1}). \end{cases} \tag{1.1}$$

In generale la successione di funzioni f_n non è costante al variare di $n \in \mathbb{N}_0$ e in tal caso il sistema è detto non autonomo; se f_n è una successione di funzioni costante allora il sistema è detto autonomo. Un sistema non autonomo è detto non-omogeneo se la $f(x,n)$ si può esprimere in questo modo: $f(x,n) = f_1(x) + f_2(n)$.

Esempio 1 *Un sistema non-autonomo:*

$$x_{n+1} = 6^n x_n;$$

un sistema non-autonomo e non-omogeneo:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} + n^2.$$

In pratica un sistema dinamico discreto è un insieme infinito di equazioni che permettono di determinare gli elementi della successione associata ad un certo dato iniziale x_0. In seguito, quando tutte le funzioni f_n non cambiano al variare di n, indicheremo il sistema dinamico semplicemente con la funzione f. Chiaramente la relazione che definisce gli elementi della successione potrà scriversi $x_n = f^{(n)}(x_0)$, con $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$ ($\circ$ è l'operazione di composizione funzionale).

Un sistema dinamico è detto lineare quando la $f_n(x)$ è lineare in x, ossia se ha la forma $x_{n+1} = K_n x_n + C_n$, con K_n e C_n costanti.

Esempio 2 *Due sistemi lineari:*

$$x_{n+1} = 5\,x_n + \sqrt[3]{n} \qquad x_{n+1} = \frac{3}{n}\,x_n$$

I sistemi lineari autonomi sono i più semplici sistemi dinamici che si possono studiare, di essi si conosce praticamente tutto; nonostante ciò il loro uso nella modellizzazione dei sistemi reali è limitato poiché nella descrizione della realtà si utilizzano sistemi non lineari. Accade quindi che i sistemi lineari sono il punto di partenza nello studio dei sistemi non lineari, quelli che in pratica si utilizzano nello studio dei sistemi fisici.

1.2 Punti di equilibrio per un sistema dinamico

Per certi sistemi dinamici esistono dei punti x^* a cui la f associa una successione costante di punti. In un punto fisso il sistema dinamico ha un comportamento statico o se vogliamo periodico con periodo uno.

Si definisce:

Definizione 1.2 (punto di equilibrio) *Dato un sistema dinamico* $x_{n+1} = f(x_n)$*,* x^* *è detto punto di equilibrio o punto fisso se (preso come punto iniziale) ad esso è associata la successione costante* $\{x_n = x^*\}$*.*

La condizione per trovare un punto fisso è semplice ed è $x^* = f_n(x^*)$. Trovare effettivamente le radici dell'equazione può essere più o meno complicato. In generale non è detto che un sistema dinamico abbia dei punti di equilibrio; per esempio i sistemi non omogenei non hanno punti di equilibrio. Infatti se x è punto fisso:

$$x = f_n(x) = h(x) + k(n) \;\Rightarrow\; x - h(x) = k(n) \tag{1.2}$$

e quindi il secondo membro non può dipendere da n, ossia il sistema è autonomo e quindi omogeneo.

I sistemi lineari autonomi forniscono un caso in cui il punto fisso, quando esiste, è semplice da trovare. In generale un sistema lineare avrà al forma

$$x_{n+1} = K\, x_n + C; \tag{1.3}$$

assumiamo che il sistema sia non banale e pertanto K e C siano diversi da zero. Il punto fisso sarà la radice di $x = K\,x + C$ che esiste solo se $K \neq 1$ ed è: $x = \frac{C}{1-K}$.

1.3 Studio grafico dei sistemi dinamici

Abbiamo visto come si trovano i punti fissi per un sistema dinamico, ma l'equazione $f(x) = x$ è facile da risolvere solo per lo più per sistemi lineari o quadratici. In ogni caso è possibile visualizzare le soluzioni con una rappresentazione grafica (solo per sistemi autonomi), data dall'intersezione del grafico della funzione $y = f(x)$ e del grafico della funzione $y = x$ poiché:

$$f(x) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \tag{1.4}$$

Ma è molto più interessante rappresentare graficamente la sequenza generata dall'iterazione di un certo punto iniziale. Per graficare la sequenza dobbiamo: scegliere un punto iniziale x_0 e tracciarlo sull'asse delle x; determinare $f(x)$ e quindi trovare l'intersezione tra la retta verticale passante per x_0 e il grafico della funzione f; riapplicare la funzione e perciò proiettare $f(x_0)$ trovato al passo precedente sulla retta $y = x$ e proiettare nuovamente sul grafico di $f(x)$. In breve, scelto x_0, i passi da iterare sono:

1. tracciare una retta verticale per il punto e prendere l'intersezione col grafico di $f(x)$
2. disegnare una retta orizzontale per il punto trovato al passo precedente e prendere l'intersezione tra questa retta e la retta $y = x$.

Nella figura 1.1 possiamo vedere tre iterazioni compiute graficamente.

Figura 1.1: *Tre iterazioni della funzione* $f(x) = e - x \ln^2(x)$ *ottenute partendo dal punto iniziale* $x_0 = 0.5$

1.4 Stabilità dei punti di equilibrio

Consideriamo un sistema dinamico e troviamone i punti fissi, se esistono; conosciamo il comportamento del sistema in corrispondenza di questi punti, ma niente sappiamo dire per altri valori iniziali. Vorremmo determinare cosa accade per valori iniziali vicini ai punti di equilibrio. Diremo che un punto fisso è stabile se le successioni generate dai punti "vicini" convergono verso il punto fisso stesso. Praticamente gli unici punti di equilibrio che è possibile osservare fisicamente sono i punti di equilibrio stabile.

Limitiamoci ora a sistemi dinamici autonomi

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{con} \quad f : I \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}; \tag{1.5}$$

diamo la definizione di stabilità:

Definizione 1.3 (punto stabile) *Dato un sistema dinamico f, sia x^* un punto di equilibrio; x^* è punto di equilibrio stabile se esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che*

$$\forall x \in I : |x - x^*| < \varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = x^*. \tag{1.6}$$

Un punto fisso che non sia un punto di stabilità sarà un punto instabile. I punti vicini a punti di instabilità esibiscono vari comportamenti; possono generare successioni divergenti, oscillare attorno al punto fisso, allontanarsi da esso ed essere attratti da altri eventuali punti stabili.

Proprio perché la definizione di punto instabile abbraccia una gran varietà di comportamenti, si introduce la definizione di punto semistabile. Un punto semistabile è un particolare punto instabile che "attrae" le successioni generate da punti contenuti nel suo intorno destro (o sinistro) ed "allontana" le successioni generate da punti nel suo intorno sinistro (o destro); è attrattivo per i punti da un lato e repulsivo per i punti dall'altro. Quando il punto è attrattivo per i punti in un suo intorno destro e repulsivo per i punti nell'intorno sinistro il punto è detto punto semistabile da sopra; quando i due casi sono invertiti il punto è detto semistabile da sotto.

Definizione 1.4 (punto semistabile da sopra) *Dato un sistema dinamico f, un punto x^* fisso si dice semistabile da sopra o semistabile a destra se*

1. *esiste un $\varepsilon > 0$ tale che*

$$\forall x \in I : 0 < x - x^* < \varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = x^*; \tag{1.7}$$

2. *esiste un $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che*

$$\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} \quad \forall x : 0 < x^* - x < \varepsilon \quad \exists n \in \mathbb{N} : x^* - f^{(n)}(x) > \varepsilon \tag{1.8}$$

Analogamente si definisce un punto semistabile da sinistra (o da sotto).

Adesso sappiamo cos'è un punto stabile instabile o semistabile, ma ci serve un criterio per decidere quando un punto fisso cade in una di queste tre categorie. Questo criterio è fornito dal teorema seguente:

Teorema 1.1 (criterio di stabilità) *Sia f un sistema dinamico e x^* un suo punto fisso, con f derivabile in x^*.*

1. *se $|f'(x^*)| < 1$ allora il punto è stabile*
2. *se $|f'(x^*)| > 1$ allora il punto è instabile*

se $|f'(x^*)| = 1$ lo studio non è conclusivo.

Quando la derivata $f'(x) = 1$ lo studio si risolve guardando la derivata seconda e, se essa è nulla, la derivata terza.

Teorema 1.2 *Considerato un sistema dinamico f,derivabile due volte in x^*, sia x^* un suo punto fisso tale che $f'(x^*) = 1$ e con $f''(x^*) \neq 0$:*

1. *se $f''(x^*) > 0$ allora il punto è semistabile da sotto*
2. *se $f''(x^*) < 0$ allora il punto è semistabile da sopra*

Figura 1.2: *a)Punto semistabile da sopra(grafico della funzione $f(x) = |x|^{\frac{1}{x}}$); b)punto semistabile da sotto(grafico della funzione $f(x) = x^{\sqrt{x}}$).*

Quindi il punto fisso è semistabile da sopra se in quel punto la funzione ha concavità verso il basso, invece è semistabile da sotto se in quel punto la funzione ha concavità verso l'alto. Per avere una spiegazione almeno intuitiva di tale criterio guardiamo alla figura 1.2.

Nel caso in cui $f''(x^*) = 0$ ancora non sappiamo dire niente sulla stabilità del punto. Per risolvere il problema possiamo provare a studiare la derivata terza. Sappiamo che una funzione con $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) \neq 0$ presenterà un punto di flesso in x^*. In questo caso:

Teorema 1.3 *Sia f un sistema dinamico con f derivabile tre volte in x^* (punto fisso per f), tale che $f'(x^*) = 1$ e $f''(x^*) = 0$*

1. *se $f'''(x^*) < 0$ allora x^* è punto stabile per il sistema dinamico*
2. *se $f'''(x^*) > 0$ allora x^* è punto instabile per il sistema dinamico*

Ancora una volta se $f'''(x^*) \neq 0$ non sappiamo dire nulla, ma si può continuare nello studio della stabilità indagando le derivate successive. Un esempio in cui si applica il criterio 1.3 è dato dalla figura 1.3.

Enunciamo ora un teorema che ci permette di determinare se un punto è stabile o instabile quando $f'(x) = -1$:

Figura 1.3: *Esempio di punto stabile a cui si applica il criterio 1.3. Grafico della funzione* $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3$

Teorema 1.4 *Sia f un sistema dinamico con f derivabile tre volte in x^* (punto fisso per f), tale che $f'(x^*) = -1$. Definiamo*

$$g(x) = -2f'''(x) - 3[f''(x)]^2$$

1. *se $g(x^*) < 0$ allora x^* è punto stabile per il sistema dinamico*
2. *se $g(x^*) > 0$ allora x^* è punto instabile per il sistema dinamico*

1.5 Cicli di un sistema dinamico

Introduciamo ora una generalizzazione del concetto di punto fisso e punto stabile. Pensiamo al caso in cui, preso un sistema dinamico f, esiste un certo $\tilde{x}$ tale che ad esso il sistema dinamico associa una sequenza di punti in cui il punto $\tilde{x}$ si ripete ogni n passi; diciamo allora che abbiamo un ciclo di periodo n. Un punto fisso è un ciclo di periodo uno. Ma se un sistema dinamico f possiede un ciclo di punti $x_1, \ldots, x_n$, allora questi stessi punti saranno punti fissi per il sistema dinamico definito da $f^{(n)}$.

Diamo allora la seguente definizione di ciclo per il sistema dinamico f:

Definizione 1.5 (Ciclo di periodo n) *i punti $x_1, \ldots, x_n$ sono ciclo di periodo n per il sistema dinamico f se*

$$x_{i+1} = f(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n-1 \qquad e \qquad f(x_n) = x_1 \tag{1.9}$$

Il fatto che i punti di un ciclo di periodo n sono punti fissi per $f^{(n)}$ rende facile in linea di principio la loro individuazione. Essi apparterranno all'insieme di punti che risolvono l'equazione

$$f^{(n)}(x) = x. \tag{1.10}$$

Per quanto riguarda la stabilità di questi cicli, ossia la capacità che ha un ciclo di attrarre le orbite generate da punti vicini ai punti che lo costituiscono, in analogia con la definizione di punto stabile data al 1.3, si dice che un ciclo è stabile se ogni punto del ciclo possiede un bacino di attrazione, ossia se ogni punto del ciclo ha un intorno i cui punti generano successioni che convergono verso il ciclo stesso.

Definizione 1.6 (ciclo stabile) *Un ciclo di periodo n è stabile se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x : |x - x_i| < \delta \qquad \lim_{k \to +\infty} f^{(kn)}(x) = x_i \qquad \textit{per} \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.11}$$

I criteri di stabilità trattati al paragrafo 1.4 si applicano anche ai cicli, solo che al posto delle derivate della funzione f considereremo quelle della funzione $f^{(n)}$.

Capitolo 2

Famiglie di sistemi dinamici

2.1 Famiglie di sistemi dinamici: introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto i sistemi dinamici discreti e ne abbiamo portato alcuni esempi; un sistema dinamico è definito tramite una funzione $f(x)$ con codominio contenuto nel dominio, affinché l'applicazione di f sugli elementi del codominio sia sempre ben definita. Adesso ci proponiamo di introdurre le famiglie di sistemi dinamici: alla semplice funzione f del caso precedente adesso corrisponderà una famiglia di funzioni $f_\lambda(x)$, dove λ è un parametro, o un insieme di parametri, che varia su un opportuno insieme, che potrà essere discreto o continuo, finito o infinito. Se per esempio f definisce un sistema dinamico che descrive un sistema fisico in certe fissate condizioni, sotto le quali si vuole studiare l'evoluzione del sistema, allora per fare previsioni si useranno le tecniche esposte al paragrafo precedente (ed altre). Ma se vogliamo variare le condizioni del sistema fisico nasce la necessità di introdurre un parametro λ che tenga in conto proprio queste variazioni nelle condizioni "esterne".

Portiamo ora un semplice esempio di modello che si può costruire con i sistemi dinamici discreti applicato alla medicina. Consideriamo una persona che fa uso di un farmaco. Dividiamo il tempo in intervalli e guardiamone gli effetti sulla persona ogni intervallo di tempo, per esempio ogni ora. Ci interessa conoscere la concentrazione di farmaco nel sangue. In ogni intervallo di tempo il paziente assumerà una pillola con una quantità di farmaco q, ma nel frattempo una certa frazione s del farmaco in circolo all'intervallo precedente sarà stata assorbita. L'equazione alla base dell'evoluzione del sistema sarà:

$$c(n+1) = (1-s)c(n) + \frac{q}{V} \tag{2.1}$$

dove $c(n)$ è la concentrazione di sostanza al passo n, V il volume occupato dal sangue; oppure possiamo esprimere questo dicendo che la famiglia del sistema dinamico è:

$$f_{s,q,V}(x) = (1-s)x + \frac{q}{V} \tag{2.2}$$

dove s, q, V svolgono il ruolo di parametri. Questo sistema ha un punto fisso in $\frac{q}{sV}$ e questo punto fisso è sempre stabile poiché s è compreso in [0,1).

In pratica quello che interessa è studiare un sistema fisico lasciando certi parametri liberi di variare, quindi quello che in genere si studia sono le famiglie di sistemi dinamici, che in generale possono dipendere da uno o più parametri.

Definizione 2.1 (famiglia di sistemi dinamici) *Data al famiglia di applicazioni $f_\lambda(x) : I \to J \subseteq I$ con λ che varia nell'insieme P, si definisce famiglia di sistemi dinamici l'insieme di sistemi dinamici generati da f al variare di λ.*

Esempio 3 *Consideriamo l'applicazione seno ristretta all'intervallo $[0,1]$:*

$$\sin(\pi x) : [0,1] \to [0,1].$$

Possiamo pensare pensare molte famiglie di funzioni a cui essa può appartenere, per esempio

$$f_\lambda(x) = \sin(\pi x^\lambda) : [0,1] \to [0,1], \qquad \textit{con } \lambda > 0$$

ma ne potremmo trovare molte altre. Tutto dipende dalla natura del sistema da studiare e fino a che punto vogliamo permettere che la funzione si modifichi al variare del parametro, cioè fino a che punto vogliamo complicare il modello.

2.2 L'applicazione logistica

Nell'ambito dei sistemi autonomi si studiano i sistemi lineari che sono gli unici sistemi di cui si conosce praticamente tutto, purtroppo il mondo reale è raramente lineare e i modelli che possiamo ottenere con questo tipo di funzioni descrivono la realtà in modo abbastanza approssimativo. Il sistema dinamico non lineare più semplice che si possa pensare è quello generato da una funzione quadratica; nonostante il fatto che la sua forma sia così elementare non per questo il comportamento esibito è banale, anzi esso è molto ricco e variegato. Questa funzione quadratica scritta in forma normalizzata prende il nome di funzione logistica :

$$f_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x). \tag{2.3}$$

Per valori di λ contenuti in $[0,1]$ la funzione ristretta al dominio $[0,1]$, ha come immagine un dominio limitato; per valori di λ superiori a 1 le successioni generate da quasi tutte le $x \in (0,1)$ divergono a $-\infty$ (tutti i punti dell'intervallo (0,1) meno un insieme di misura nulla).

La logistica è un modello rozzo per descrivere da un anno all'altro (oppure da una stagione all'altra) una popolazione di animali in cui le generazioni non si sovrappongono; per esempio una popolazione di insetti che muoiono dopo aver deposto le uova. E' un modello molto semplice poichè in esso si tiene conto del fatto che gli individui di un certo anno saranno proporzionali al numero di individui dell'anno precedente che li hanno generati, meno un termine quadratico dovuto alla competizione per le risorse. Da $x = 0$ fino a $\bar{x} = \frac{1}{2}$ la funzione ha un andamento monotono crescente perché il termine quadratico è poco importante, mentre per valori superiori l'andamento è decrescente perchè si fa sentire il termine x^2, ossia cresce l'importanza della competizione per le risorse: la funzione ha un picco in $\bar{x}$.

Figura 2.1: *L'applicazione logistica per il parametro* $\lambda = 4$.

2.2.1 Punti fissi e stabilità

Limitiamoci all'intervallo di variazione di λ $[0,1]$. Cerchiamo ora i punti fissi della logistica, che sono le radici dell'equazione

$$x = 4\lambda x(1-x); \tag{2.4}$$

queste radici sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 1 - \frac{1}{4\lambda}$, che è positivo solo per $\lambda > \frac{1}{4}$. Per quanto concerne la stabilità, essendo la condizione per l'instabilità

$$f'(x) = 4\lambda - 8\lambda x \qquad f'(x_1) = 4\lambda > 1. \tag{2.5}$$

x_1 è stabile per valori $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ ed è instabile per gli altri valori. Per quanto riguarda x_2 esso non è incluso in [0,1] quando x_1 è stabile ed è stabile in seguito e tutti i punti $x \in (0,1)$ generano successioni che convergono verso di esso. Per calcolare esplicitamente il valore di λ per cui x_2 diventa instabile risolviamo:

$$|f'(x_2)| = |2 - 4\lambda| > 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda > \frac{3}{4} \tag{2.6}$$

quindi per valori di λ compresi tra 0 e 0.75 (incluso) x_2 è un punto di equilibrio stabile; quello che si nota è che per valori di λ la convergenza verso x_2 è estremamente rapida, mentre per valori prossimi a 0.75 la convergenza diventa più lenta (vedi figura 2.2 per un confronto tra $\lambda = 0.72$ e $\lambda = 0.7499$). In realtà esiste un valore specifico di λ per il quale la convergenza è più ve-

Figura 2.2: *Rappresentazione grafica per due sequenze generate per lambda a)uguale a* 0.72*, b)uguale a* 0.7499*, per le prime dieci iterazioni.*

loce che per gli altri valori: $\lambda = 0.5$(vedi figura 2.3). Per capirne il perché,

Figura 2.3: *Grafico dei valori della sequenza delle iterazioni x_n in funzione di n per λ a) uguale a* 0.5*, b) uguale a* 0.375*.*

supponiamo di cominciare l'iterazione da $x_0 = \frac{4\lambda-1}{4\lambda} + \varepsilon$, vicino al punto fisso $\frac{4\lambda-1}{4\lambda}$. Otteniamo $x_1 = \frac{4\lambda-1}{4\lambda} + 2\varepsilon - 4\lambda\varepsilon - 4\lambda\varepsilon^2$. Se il punto fisso è attrattivo e ε è sufficientemente piccolo, si dovrà avere

$$|2\varepsilon - 4\lambda\varepsilon - 4\lambda\varepsilon^2| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Questo si verifica per ogni valore di λ nell'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, ma per $\lambda = 0.5$ il primo membro della 2.7 si riduce a ε^2, cosicché ad ogni iterazione la differenza col punto fisso diminuisce quadraticamente.

Riassumendo:

- per $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ si ha che x_1 è punto di equilibrio stabile ed è l'unico punto fisso contenuto nell'intervallo [0,1];
- per $\lambda = \frac{1}{4}$ si ha x_1 instabile mentre x_2 è semistabile da sopra;
- per $\frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{3}{4}$ si ha che x_1 è punto di equilibrio instabile mentre x_2 è stabile.

2.2.2 Nascita di un ciclo a due punti

Cosa succede per valori di λ superiori a $\frac{3}{4}$? Per saperlo andiamo a indagare la funzione $f^{(2)}$, in particolare guardiamo i suoi punti fissi. I punti fissi per $f(x)$ saranno ovviamente punti fissi anche per $f^{(2)}(x)$ poiché

$$f^{(2)}(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*. \tag{2.8}$$

Per $\lambda = \frac{3}{4}$ sappiamo che la funzione $f^{(2)}(x)$ possiede due massimi simmetrici rispetto a $x = \frac{1}{2}$, poichè la f è simmetrica rispetto a $\frac{1}{2}$, presenta un flesso in x_2, avente come retta tangente la retta $y = x$, essendo $D'[f^{(2)}(x_2)] = f'(x_2)f'(x_2) = 1$. Al crescere del parametro i massimi della funzione diventano più pronunciati e la valle tra di essi si abbassa: la funzione interseca la retta bisettrice del primo quadrante nei due punti fissi $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$. Il fatto che essi siano punti fissi per la funzione f applicata due volte significa che la funzione f li manda l'uno nell'altro, ossia $\bar{x}_1 = f(\bar{x}_2)$; in questo senso essi costituiscono un ciclo di periodo due. Quello che ci chiediamo è se questo ciclo sia attrattivo o meno e per saperlo guardiamo alla derivata di $f^{(2)}$ nei due punti del ciclo; in realtà basta guardare solo in un punto poiché:

$$D[f^{(2)}(x_1)] = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_2)f'(x_1) = D[f^{(2)}(x_2)], \tag{2.9}$$

questo si dimostra vero anche per cicli di k punti distinti che vengono mandati da f l'uno nell'altro, la prova è semplice ed è ricalcata sul modello precendente.

Figura 2.4: *a)la funzione $f^{(2)}$ per il valore di λ che corrisponde alla creazione di un punto fisso; b)la funzione $f^{(2)}$ per un valore del parametro interno a quello di esistenza di un ciclo a due punti stabile; c)la funzione f per questo stesso valore del parametro con il suo ciclo stabile.*

Quindi il ciclo è attrattivo se la derivata di $f^{(2)}$ è minore in modulo di uno; inizialmente tale derivata sarà positiva e minore di 1, poi all'aumentare del parametro λ diminuirà passando per zero e arrivando fino a -1, sicché il ciclo non sarà più un ciclo attrattivo.

2.2.3 Cicli attrattori a più di due punti

Abbiamo visto che quando λ è piccolo la logistica possiede un punto fisso stabile verso cui tutte le successioni convergono in maniera molto veloce (già dopo pochi passi sono molto vicine al punto stabile); al crescere del parametro la convergenza diventa più lenta fino a giungere a una condizione in cui il punto non è più stabile ed esso viene soppiantato da un ciclo a due punti attrattivo. Ma al crescere di λ anche questo ciclo finisce per perdere la sua stabilità. Cosa succede quando si è giunti a questa condizione? Nuovi cicli a più punti nascono, e questo si vede studiando questa volta la funzione $f^{(4)}$. Chiamiamo λ_1 il valore del parametro per il quale il punto fisso diviene instabile e λ_2 il valore per il quale il ciclo attrattore a due punti diviene instabile. Per $\lambda = \lambda_2$ la funzione $f^{(4)}$ sarà tangente alla retta $y = x$ in tre punti, dei quali due si sdoppieranno all'aumentare di λ con un meccanismo analogo a quello che si verifica per il punto fisso che si sdoppia in un ciclo a due punti, meccanismo che abbiamo visto al paragrafo precedente. Questi nuovi quattro punti sono punti fissi per la funzione $f^{(4)}$ ma non per la funzione $f^{(2)}$ e quindi costituiscono gli elementi di un ciclo a quattro punti, la cui natura stabile o instabile potrà essere indagata anch'essa con lo studio delle derivate in uno dei punti di detto ciclo, poichè la derivata di $f^{(4)}$ è uguale per tutti i punti del ciclo come abbiamo detto al paragrafo precedente.

Questo meccanismo si itera: anche per questo ciclo a quattro punti esisterà un valore del parametro tale che i punti del ciclo si "sdoppiano", generando un ciclo con un numero di punti doppio, ossia otto. Poiché siamo partiti da un punto fisso che si è sdoppiato in due allora i cicli generati avranno sempre un numero di punti pari a 2^k, con k indice intero dello sdoppiamento. Se l'intervallo di variazione dei parametri è sufficientemente ampio accade che questo sdoppiamento va avanti all'infinito. Per la logistica l'intervallo di $\lambda \in [0, 1]$ è più che sufficiente per osservare questa duplicazione all'infinito. Se indichiamo con λ_k il valore del parametro per cui il ciclo a 2^k punti diviene instabile abbiamo una successione $\{\lambda_n\}$ che converge verso il valore λ_∞, che per la logistica vale approssimativamente $\frac{3.57}{4}$.

Figura 2.5: *Diagramma di Feigenbaum.*

Questa catena di duplicazione a cascata all'aumentare del parametro λ si può visualizzare tramite il *diagramma di Feigenbaum.* Questo grafico si ottiene compiendo i seguenti passi: si sceglie un valore iniziale x_0 nell'intervallo $(0, 1)$; al variare del parametro λ su un certo ventaglio di valori, si itera x_0 un numero di volte n; si disegnano le iterazioni in funzione di λ da un certo indice $k < n$ in poi. Il diagramma permette di visualizzare dove vanno a finire le sequenze generato da uno stesso punto iniziale al variare del parametro. Per λ appartenente all'intervallo $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, le iterazioni cadono su un punto fisso che cresce con il parametro. Per $\lambda = \lambda_1$ il ramo corrispondente al punto fisso si sdoppia: si è verificato il processo di duplicazione descritto precedentemente. Dalla figura 2.5 risulta chiaro perché i punti del tipo $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ siano detti *biforcazione a forcone.*

Quello che ora si vede è che gli intervalli del parametro che corrispondono a cicli di periodo crescente diventano sempre più piccoli. Fu proprio Feigenbaum che trovò la legge di convergenza della successione λ_k verso λ_∞

e un numero fondamentale che la caratterizza; guardando una prima successione finita di $d_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$, notò che i d_k decrescevano in maniera "quasi" geometrica, nel senso che $\frac{d_k}{d_{k+1}} = \delta_k$ con $\lim_{k\to\infty} \delta_k = \delta$, detto appunto *costante di Feigenbaum.*

Questo numero è molto più importante di quanto possa sembrare inizialmente poiché è un numero universale, ossia non è caratteristico solo della funzione logistica, come per esempio sono i punti della successione λ_k, ma appare per un'ampia classe di funzioni a cui la funzione logistica appartiene. Esso è caratteristico delle iterazioni di funzioni simili alla funzione logistica: funzioni derivabili, che abbiano un picco in cui siano quadratiche, ed altre proprietà su cui non ci dilunghiamo; per esempio la funzione $\lambda \sin(\pi x)$. La costante δ dà informazioni sul modo in cui i rami del diagramma scalano e vale approssimativamente 4.669.

Fin qui abbiamo visto i cicli con periodo potenza intera di due, come nascono e come convergono, ma tutto questo riguarda un intervallo dei valori del parametro precedente a λ_∞. Per valori successivi a λ_∞ si osservano nuovi cicli stabili, con periodo pari. Questi cicli appaiono come cicli a due punti "rumorosi", nel senso che appaiono come cicli a due punti se guardati con una bassa risoluzione, ma rivelano la loro struttura fine ad un'analisi più attenta. C'è un valore critico del parametro per cui nasce il primo ciclo stabile dispari. I primi cicli stabili hanno periodi molto lunghi; questi periodi all'aumentare di λ descrescono via via fino ad arrivare a un ciclo stabile a tre punti. Oltre questo ciclo ci sono cicli con periodo intero qualsiasi. Ognuno di questi cicli è seguito da una cascata di cicli che si ottengono per biforcazione dei punti fissi; ad un ciclo stabile di periodo k è associata una serie di cicli con punti periodici $k(2^n)$. Questo meccanismo è spiegato per il ciclo a tre punti nel sottoparagrafo seguente.

Come si origina un ciclo a tre punti

Il meccanismo alla base della creazione di un ciclo a tre punti è sostanzialmente diverso da quello che origina un attrattore con periodo 2^k, cioè quelli che si osservano nell'intervallo di variazione del parametro $(\frac{1}{4}, \lambda_\infty)$; questi cicli sono creati tramite il verificarsi di una biforcazione a forcone. Il processo che invece genera il ciclo a tre punti è illustrato in figura 2.6.

La funzione $f^{(3)}$ per un valore di λ inferiore a quello della nascita del ciclo di periodo tre interseca la retta $y = x$ solo nel punto fisso della funzione f; il valore che corrisponde al sorgere del ciclo è quello per il quale le due valli sulla sinistra e il picco sulla destra sono tangenti alla retta. Il meccanismo è completamente diverso da quello che genera il primo ciclo a due punti: qui i punti del ciclo sono generati per la tangenza di $f^{(3)}$ con la retta bisettrice,

Figura 2.6: *Nascita di un ciclo di periodo tre: $f^{(3)}$ dapprima interseca la bisettice del primo quadrante in un punto, poi è tangente ad essa in tre punti, infine la retta interseca la curva in sette punti distinti.*

mentre nel caso della duplicazione per λ_1 il punto fisso era un punto di flesso per $f^{(2)}$ la cui pendenza aumentava per $\lambda > \lambda_1$ generando i due punti del ciclo, come si vede in figura 2.4. Le biforcazioni di questo tipo le chiameremo *biforcazioni tangenti*.

Abbiamo a che fare con una funzione $f^{(3)}$ che è tangente in tre punti alla retta $y = x$ per un certo valore del parametro che segna la nascita del ciclo. All'aumentare del parametro la funzione interseca la retta in ben sei punti (senza contare il punto fisso di f), ma di essi solo tre hanno una pendenza tale da essere stabili; questi tre punti con pendenza minore di uno in modulo sono stabili per $f^{(3)}$ e quindi costituiscono un ciclo a tre per f. Gli altri tre punti sono anch'essi un ciclo per f, ma instabile.

All'aumentare del valore del parametro la situazione cambia ulteriormente, poiché le valli e i picchi di $f^{(3)}$ si fanno via via più pronunciati e nei punti fissi la pendenza della funzione aumenta fino a che i tre punti stabili diventano instabili, con pendenza -1. Il fenomeno della biforcazione si verifica anche per questi punti, ossia per la funzione $f^{(3)}$ da un certo valore del parametro in poi i punti stabili vengono sostituiti da cicli a due punti; per quello che riguarda la funzione f si passa da cicli a tre a cicli a sei punti, etc.. Il ciclo a tre punti stabile viene così seguito da una cascata di cicli stabili a $3(2^k)$ punti. Questi intervalli per quali il comportamento della funzione è periodico si possono riconoscere anche nella figura 2.5 come le bande chiare e sottili. Si vede che l'intervallo per cui si hanno i cicli stabili con periodo $3(2^k)$ è il più grande, mentre ci sono altri cicli per cui tale intervallo è a stento riconoscibile.

2.2.4 Comportamento della logistica per $\lambda = 1$

Abbiamo visto fino ad ora cosa si può dire sull'esistenza di cicli stabili per la funzione logistica. Invece per il valore del parametro $\lambda = 1$ la funzione esibisce un comportamento estremamente diverso da quelli visti finora. Si individuano per la funzione le seguenti proprietà:

- forte dipendenza rispetto alle condizioni iniziali;
- mixing;
- ergodicità.

Dipendenza dai dati iniziali significa che prendendo due punti molto vicini e iterando la funzione su di essi l'evoluzione non si manterrà vicina come erano i dati iniziali, ma ai due punti corrisponderanno evoluzioni in genere diverse. La dipendenza dai dati iniziali fa aumentare significativamente anche l'errore più piccolo.

La proprietà di mixing per un sistema dinamico discreto si definisce così: dati due sottoinsiemi misurabili del dominio A e B

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f^{(n)})(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B) \tag{2.10}$$

dove con μ indichiamo la misura, che per il nostro sistema dinamico sarà l'integrale di Lebesgue.

L'altra proprietà di cui gode la funzione logistica è l'ergodicità; si dice che un sistema è ergodico se per ogni funzione sommabile g su I, insieme di definizione di f, la media spaziale coincide con la media temporale per tutti i valori di x eccetto al più un insieme di misura nulla secondo Lebesgue:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(f^{(n)}(x)) = \frac{1}{\mu(I)} \int_I g(x)dx \quad \text{q.o.} \tag{2.11}$$

Per inciso diciamo che la proprietà di mixing è più forte di quella di ergodicità perché la prima implica la seconda.

Questo insieme di proprietà possedute dalla funzione logistica per $\lambda = 1$ si riassume dicendo che la funzione è caotica. Questo rispecchia il fatto che, benché il sistema sia governato da leggi deterministiche, siamo praticamente incapaci di prevederne l'evoluzione, sia a causa degli ineliminabili errori sulle condizioni iniziali sia a causa degli errori di arrotondamento nei calcoli numerici, che uniti alle proprietà precedenti si traducono in una impredicibilità sull'evoluzione del sistema.

Riassumiamo ora alcuni risultati sulla funzione logistica:

- ad ogni intero k corrisponde un ciclo di tale periodo e questo ciclo è seguito da un intera cascata di cicli di periodo $k(2^n)$, che si originano per un processo di biforcazione a forcone;
- per ogni intervallo di valori del parametro esiste almeno un valore del parametro tale che la funzione presenta un unico ciclo stabile, che attrae tutti i punti dell'intervallo unitario, tranne un sottinsieme di misura nulla i cui punti convergeranno verso altri cicli oppure seguiranno orbite aperiodiche;
- queste finestre di valori dei parametri per cui esistono cicli stabili sono divise da valori dei parametri per i quali il comportamento della funzione è caotico, con nessun ciclo attrattivo.

Capitolo 3

La famiglia generata dal troncamento delle cifre decimali

3.1 Una particolare famiglia di sistemi dinamici: il troncamento

3.1.1 Come il computer manipola i dati numerici e falsa i calcoli

Supponiamo di studiare un particolare sistema dinamico e di simularne il comportamento tramite il computer, in pratica abbiamo una funzione che iteriamo un numero molto elevato di volte. Il computer non manipola i numeri reali, come quelli su cui è definita la nostra funzione, bensì i numeri macchina che sono appunto i numeri reali che possono essere rappresentati della memoria finita del computer, e che perciò sono un insieme finito. Gli altri numeri reali sono rappresentati dal computer in modo approssimato col numero macchina più vicino(esistono anche i numeri reali non rappresentabili perché troppo grandi). Per la rappresentare un numero sulla macchina si usano un numero fisso di bit. Per grandi linee esistono due tipi di rappresentazioni:

- la rappresentazione in virgola fissa, in cui un numero fisso di bit viene dedicato alla rappresentazione della parte intera e della parte frazionaria del numero reale;

- la rappresentazione in virgola mobile, che utilizza la notazione esponenziale.

La notazione in virgola fissa è una notazione poco efficiente e concretamente non viene mai usata, invece si usa la rappresentazione in virgola mobile che consente di rappresentare con poche cifre numeri molto grandi, oppure numeri molto piccoli. Tornando allo studio del sistema dinamico, accade che il computer rappresenta la funzione caratteristica del nostro sistema fisico come una funzione a gradino e limitata, in virtù del fatto che i numeri macchina sono discreti e limitati. Si ha che nella rappresentazione in virgola mobile i numeri macchina non sono distribuiti in maniera uniforme sulla retta reale, perciò i gradini non avranno altezza sempre uguale, né ampiezza uguale.

3.1.2 Come studiamo l'approssimazione introdotta dal computer: le funzioni a gradino

Vogliamo studiare appunto l'approssimazione introdotta dal computer su una sequenza di iterazioni di funzione ottenuta partendo da un certo seme. Per studiare l'approssimazione introduciamo delle famiglie di funzioni a gradino che approssimano la funzione. Facciamo delle semplificazioni sulla funzione a gradino. Innanzitutto studiamo funzioni a gradino con gradini di ampiezza sempre uguale. Questo significa che non teniamo conto che i numeri macchina sono più densi in prossimità dello zero e più radi altrove, in questo senso è come trattare i numeri in virgola fissa. Inoltre il limite superiore al numero massimo trattabile sarà dato dalla memoria massima disponibile sul computer con cui abbiamo svolto la simulazione, e qui ci distanziamo dalla suddetta notazione in virgola fissa. Poiché vogliamo che anche l'output della famiglia di funzioni sia a numero di cifre fissato, lo stesso numero di cifre che abbiamo per i dati in ingresso, allora l'altezza dei gradini sarà un multiplo intero dell'ampiezza di base, determinato dalla pendenza della funzione. Questo comporta che la funzione a gradino non sarà aderente alla funzione f che stiamo approssimando, poiché l'aderenza alla funzione originale è garantita solo se, fissata l'ampiezza, abbiamo una certa arbitrarietà sull'altezza. La figura 3.1 illustra quanto detto.

Perché abbiamo fatto la scelta di introdurre una famiglia di scalinate per studiare le approssimazioni di un computer? Idealmente ci piacerebbe confrontare i risultati usciti dal nostro computer utilizzando numeri a una certa precisione con i risultati teorici, esatti. Il punto è che i risultati esatti non li conosciamo e questo tipo di confronto non è possibile. Allora possiamo confrontare le sequenze di iterazioni calcolate ad accuratezze diverse, dove con accuratezza intendiamo il numero di cifre decimali dopo la virgola. Ci aspettiamo che il calcolo effettuato con un numero di cifre decimali maggiore ci dia risultati più affidabili, rispetto all'altro. In pratica lo studio che stiamo compiendo consiste nel prendere una famiglia di applicazioni che si differen-

Figura 3.1: *Approssimazione della funzione continua* $f(x) = \arctan(x) + 0.7$ *tramite una funzione a gradino.*

ziano tra loro per la diversa accuratezza e, fissato un punto iniziale, studiare come si differenziano l'evoluzioni tra un'applicazione e l'altra.

Abbiamo capito perché vogliamo studiare il troncamento delle funzioni e abbiamo già introdotto le famiglie di sistemi dinamici al paragrafo precedente, per cui ne introduciamo una in particolare. A noi interessa una famiglia di funzioni a gradino che abbiano gradini di ampiezza sempre uguale, e con altezza multiplo intero dell'ampiezza, con il multiplo determinato dalla pendenza della funzione. Inoltre l'ampiezza del gradino deve essere una potenza di 10, poichè l'effetto di queste applicazioni deve essere quello di tagliare le cifre decimali da una certa cifra in poi. Per esempio, se vogliamo troncare un numero alla quinta cifra decimale, dobbiamo prendere dei gradini di altezza pari a 10^{-5}. In linea di principio i gradini di questa funzione potrebbero variare con continuità e in questo caso avremmo bisogno di un parametro che varia in un insieme continuo; per quelli che sono i nostri scopi servono gradini con ampiezze che siano potenze negative di dieci 10^{-k} , pertanto prenderemo come parametro l'esponente k, che assumerà valori discreti variando sull'insieme $\mathbb{N}$.

Chiamiamo $troncamento_k$ l'applicazione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Q}$ che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa il numero ottenuto da x tagliando le cifre decimali dalla k-esima in poi, per esempio $troncamento_4(\pi) = 3,1415$ e non $3,1416$, sebbene la cifra 5 sia seguita da 9. Presa una funzione f da $I \subseteq \mathbb{R}$ in se stesso:

Definizione 3.1 (Famiglia di troncamenti) *la famiglia di troncamenti corrispondente alla funzione f è la famiglia di applicazioni:*

$$f_k = troncamento_k \circ f \circ troncamento_k. \tag{3.1}$$

La funzione f non apparterrà propriamente alla famiglia, ma sarà la "funzione limite" a cui tenderanno gli elementi della famiglia per $k \to +\infty$, ossia:

$$\lim f_k = f. \tag{3.2}$$

A questo punto ci si potrebbe chiedere come abbiamo studiato il troncamento fissando l'accuratezza dei numeri utilizzati. Questo è stato possibile utilizzando un software di calcolo simbolico. E' stato possibile usare nei calcoli cifre ad una accuratezza più alta di quella permessa dai floating-point a precisione singola o doppia, allocando una maggior quantità di memoria durante il calcolo.

A questo punto per indagare l'errore introdotto dal computer e quanto incide sui risultati finali nello studio delle applicazioni iterative si può studiare lo sviluppo di uno stesso punto iniziale al variare del parametro k, ossia al variare dell'accuratezza dell'applicazione.

3.2 La funzione logaritmica

3.2.1 Introduzione alla funzione logaritmo

Nell'esempio che abbiamo portato concretamente al calcolatore abbiamo scelto la funzione simmetrica

$$f(x) = \ln|x| : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Figura 3.2: *Grafico della funzione* $f(x) = \ln|x|$.

Questa funzione ha la caratteristica che il codominio non è contenuto interamente nel dominio, esistono perciò certi valori iniziali per cui l'applicazione iterata perde di senso. Questi valori costituiscono un insieme discreto e sono in pratica tutte le potenze del numero di nepero elevato a se stesso (e al suo opposto), perché dopo un certo numero di iterazioni si finisce in zero, su cui il logaritmo non è definito. In pratica sono l'insieme numerabile che si ottiene elevando e a se stesso, elevando e a questo risultato, etc. ossia l'insieme:

$$S = \{\pm 1, \pm e, \pm e^{\pm e}, \pm e^{\pm e^{\pm e}} \ldots\} \tag{3.4}$$

In un certo senso l'immagine di zero tramite il logaritmo è $-\infty$, quindi se aggiungiamo al codominio l'infinito positivo e quello negativo possiamo aggiungere lo zero al dominio.

Con questa convenzione, quando iteriamo la funzione f partendo dall'insieme S finiamo nella singolarità dopo un numero finito di passi, e la singolarità ci manda in $+\infty$ dove rimaniamo. La singolarità $+\infty$ attrae tutte e sole le orbite che partono da questo insieme numerabile e quindi di misura nulla. La singolarità non può dirsi un punto fisso perché non ha un bacino continuo di attrazione: per esempio se prendiamo una x in prossimità di 0 e applichiamo la funzione f una volta il risultato è negativo e grande in valore assoluto, siamo prossimi alla singolarità, ma una seconda applicazione della f manda in un numero positivo molto grande.

Una caratteristica dell'insieme S è che tutti i suoi punti sono punti di accumulazione per l'insieme. E' semplice mostrarlo: 0 è punto di accumulazione poichè la successione di punti appartenenti a S

$$\frac{1}{e}, \frac{1}{e^e}, \frac{1}{e^{e^e}}, \frac{1}{e^{e^{e^e}}}, \ldots \tag{3.5}$$

converge verso lo zero, e ovviamente anche i loro opposti; se ora costruiamo una successione di e elevato a 3.5, otteniamo una successione ψ di elementi appartenenti a S che converge verso 1; sia $y \in S$ e $y > 0$, costruiamo una successione di elementi di S elevando y agli elementi di ψ, questa successione convergerà verso y, poichè ψ converge verso 1; se $y \in S$ con $y < 0$ anche y è punto di accumulazione rispetto all'insieme, perché l'insieme è simmetrico rispetto allo zero.

Cicli stabili per la funzione logaritmo del modulo

Consideriamo la funzione $f(x) = \ln |x|$ come un'applicazione della retta estesa in se stessa. Ci chiediamo se esistano cicli stabili per questa applicazione. Nell'ipotesi in cui l'insieme S sia un insieme denso, questo non può accadere. Se esistesse un ciclo stabile allora questo dovrebbe avere un bacino di attrazione continuo, ma questo non è possibile, perché per ogni intervallo di $\mathbb{R}$ piccolo a piacere esiste un punto appartenente a S la cui sequenza di iterazioni per definizione non può convergere verso un ciclo stabile. Possiamo comunque considerare il sistema dinamico definito da un'altra applicazione, quella che si ottiene cambiando l'insieme di definizione della f. Sia $g(x) = \ln|x|$ definita nell'insieme $\mathbb{R} - S$ in se stesso.

Abbiamo evidenza numerica che non esistono cicli stabili per la funzione f, ma per il momento manca una prova analitica.

3.2.2 Studio della famiglia di troncamento corrispondente alla funzione logaritmo del modulo

Abbiamo studiato il sistema dinamico troncato corrispondente al logaritmo e abbiamo studiato cosa succede facendo evolvere il sistema dinamico da un certo punto iniziale uguale per tutte le funzioni della famiglia.

L'evoluzione comincia a differenziarsi in modo continuo sin dall'inizio e lentamente. Bisogna decidere quando le differenze nell'evoluzione di una coppia di sistemi diventano importanti, per questo fissiamo un δ; quando due numeri disteranno più di δ allora diremo che l'evoluzione è scorrelata.

Abbiamo studiato come si differenziano le evoluzioni tra le funzioni della famiglia di troncamento al variare del punto iniziale, come il numero di passi necessari per osservare la differenziazione cambia con l'accuratezza, e abbiamo fatto un confronto tra le risposte della funzione logaritmo e della logistica che è una funzione già nota dal capitolo 2.

La scorrelazione non dipende dal punto iniziale

Prese due applicazioni diverse dalla famiglia, abbiamo studiato dopo quanti passi, ossia dopo quante iterazioni, l'evoluzione dei due sistemi è diversa nel senso che abbiamo specificato prima, ossia quando gli elementi della sequenza distano più di δ. In linea di principio ci saremmo potuti aspettare che questo dipendesse dal punto iniziale, dal seme della sequenza. Per esempio si poteva pensare che per punti iniziali più vicini alla singolarità la differenziazione si manifestasse prima che per punti più lontani. Invece quello che si vede dalle prove al calcolatore è che il numero di passi dopo i quali l'evoluzione delle due famiglie è diversa non dipende dal punto iniziale.

La simulazione compiuta al calcolatore riguardava solo un numero finito di punti iniziali, ovviamente. Quando diciamo che il numero di passi n per i quali si ha scorrelazione non dipende dal punto iniziale, intendiamo che al variare dei punti iniziali n ha un andamento oscillante che rimane però limitato in una banda di valori che non cambia variando il set di valori iniziali. Fissato un set di punti iniziali, l'istogramma di frequenza di n ha la forma di una campana più o meno simmetrica.

La verifica numerica è stata compiuta per una coppia di applicazioni con valori dell'accuratezza 5 e 10(i risultati della simulazione sono in figura 3.3; sull' asse delle ascisse abbiamo il numero di passi per i quali si ha scorrelazione, sulle ordinate la frequenza con cui si presenta tale numero di passi), e per una coppia di applicazioni di accuratezza 10 e 20 (in figura 3.4).

Figura 3.3: *Grafici per la coppia di funzioni con accuratezza 5 e 10. 1)Il primo grafico sulla sinistra è l'istogrammma ottenuto per valori iniziali da* 10^{-4} *a* $1 - 10^{-4}$ *con passi di* 10^{-4}*(insieme A); 2)l'istogramma al centro è quello ottenuto per valori iniziali da* 10^{-2} *a* $100-10^{-2}$ *con passi di* 10^{-2}*(insieme B); 3)l'istogramma a destra è quello ottenuto per valori iniziali da* 0.1 *a* 10000 *con passi di* 1*(insieme C). Si vede la gobba presentata dal secondo istogramma.*

Figura 3.4: *Grafico per la coppia di funzioni con accuratezza 10 e 20. Istogramma per valori iniziali da* 10^{-2} *a* $100 - 10^{-2}$ *con passi di* $10^{-}2$*;*

Nella figura 3.3 ci sono tre grafici diversi che corrispondono a tre insiemi diversi di punti iniziali. Nella tabella 3.1 vediamo i valori medi che corrispondono ai tre insiemi iniziali A B C, per la coppia di funzioni di accuratezze 5 e 10; vediamo che i tre risultati sono sostanzialmente gli stessi.

Per quanto concerne la coppia di applicazioni con accuratezze 10 e 20, il valore medio dei passi dopo di cui si ha scorrelazione è 42, sempre con deviazione standard 3.

insieme	valoremedio	deviazione standard
A	22	3
B	22	3
C	23	3

Tabella 3.1: *Tabella dei valorimedi e delle deviazioni standard per la coppia di applicazioni con accuratezze 5 e 10, con insieme di punti iniziali specificati nella prima colonna.*

Come cambia la scorrelazione al variare dell'accuratezza

Abbiamo poi studiato come cambia il numero di passi che induce la scorrelazione tra le evoluzioni di una coppia di applicazioni diverse appartenenti alla famiglia al variare della coppia. Questo serve per capire quanto serve aumentare il numero di cifre decimali per avere un risultato "buono". Per esempio, se ho una lista di iterazioni di una funzione ad una certa accuratezza, quanto migliora il mio risultato raddoppiando l'accuratezza? Raddoppiare l'accuratezza significa fare un certo impiego di memoria e ci si può chiedere fino a che punto valga la pena farlo, cioè se ad un certo impiego di memoria corrisponde un guadagno grande o piccolo. A tal fine assumeremo che, considerate un insieme di applicazioni troncate della f con accuratezze sufficientemente grandi ed equispaziate, le loro evoluzioni da uno stesso punto iniziale x_0 rappresentano una stima ragionevole dell'evoluzione effettiva di x_0 finché le loro distanze restano piccole.

Allo scopo di realizzare una prima analisi al calcolatore abbiamo preso una lista di coppie di applicazioni appartenenti alla famiglia di troncamento che avessero i parametri distanti una quantità costante Δk; per ogni coppia c'è una lista di semi, per ogni seme abbiamo trovato il numero di passi limite dopo i quali l'evoluzioni generate dalle due applicazioni si separano; per ogni coppia abbiamo calcolato il valore medio del numero di passi limite sulla lista dei valori iniziali. Si vede che il valore medio del numero di passi limite ha un'andamento lineare rispetto all'accuratezza della coppia per tutti i valori di δ, vedi la figura 3.5.

Abbiamo studiato come varia la pendenza della retta di best fit al variare di δ, ottenendo i valori tracciati nel grafico 3.6.

Un'altra analisi è stata così compiuta: abbiamo preso coppie di applicazioni, dove una applicazione è presa come applicazione di riferimento ed è fissa per tutte le coppie, mentre l'altro elemento della coppia è calcolato con un'accuratezza minore e varia per ogni coppia; abbiamo graficato il numero di passi limite medi in funzione dell'accuratezza minima della coppia. Anche

Figura 3.5: *Grafico dei passi medi n dopo i quali si ha scorrelazione rispetto all'accuratezza inferiore della coppia di applicazioni troncate. I dati iniziali variano da 10 a 40 con passi di 1,* $\delta = 0.5$*. La retta è la retta di best fit dei dati,* $y = 2.0328 + 4.0712x$.

in questo caso abbiamo osservato un andamento lineare, vedi figura 3.7.

Abbiamo trovato che:

1. fissato un certo δ, il numero di passi dopo i quali due sequenze si scorrelano non dipende in modo significativo dal dato iniziale; ossia il calcolo approssimato diventa inaffidabile dopo un certo numero di iterazioni che è pressoché indipendente dal punto scelto come punto di partenza per il sistema dinamico.

2. fissato δ e fissato un punto iniziale, considerate delle coppie di funzioni appartenenti alla famiglia del troncamento della funzione f scelte in modo che la differenza di precisione tra i due elementi della coppia sia indipendente dalla coppia stessa, il numero di iterazioni per le quali si ha scorrelazione varia in modo lineare con la precisione dell'applicazione.

Un parallelo con l'applicazione logistica

Abbiamo compiuto un'analisi analoga a quella presentata finora per la funzione logistica. Abbiamo studiato la distribuzione di frequenza dei passi dopo i quali si ha una scorrelazione al variare dei punti iniziali e l'istogramma che ne deriva è un grafico a campana come quelli visti per il logaritmo.

Nello studio del numero di passi necessari per la scorrelazione al variare dell'accuratezza, al caso precedente avevamo trovato una relazione lineare,

Figura 3.6: *Grafico della pendenza della retta di best fit del numero di passi necessari per la scorrelazione in funzione di δ. I dati iniziali variano da 10 a 40 con passi di 1. La curva serve solo da guida per l'occhio.*

mentre per la logistica l'andamento è diverso ed è riportato in figura 3.8, dove vediamo un andamento piatto che prima non c'era. Mentre per il logaritmo aumentare le cifre decimali migliora la conoscenza che abbiamo delle sequenze di iterazioni, che vuol dire che aumentando il numero di cifre decimali possiamo conoscere un maggior numero di iterazioni con un errore noto, questo non è vero per la logistica per la quale due evoluzioni si separano di δ dopo un numero di passi fissato, che dipende da δ. Questo valore cresce al crescere di δ.

Cerchiamo i cicli stabili del logaritmo numericamente

Abbiamo parlato dell'esistenza dei cicli stabili per la funzione logaritmo del modulo al paragrafo 3.2.1. Ci chiediamo perchè non cercare i cicli stabili numericamente? Quello che si può fare è impostare un algoritmo che calcola una sequenza di iterazioni da un punto fissato e si ferma quando ritorna nel punto iniziale. Per la funzione logaritmo i casi sono due: o trova un ciclo (anche il caso in cui si raggiunge ∞ lo consideriamo un ciclo) oppure si ferma il calcolo perchè si è raggiunto il limite massimo di memoria per immagazzinare i numeri(ma questo caso nelle simulazioni compiute non si è mai verificato).

Quello che effettivamente si trova è che ci sono dei cicli, ma sono dei cicli "spuri" indotti dal troncamento, sono cioè cicli della funzione f troncata e non della funzione originale. Questo si osserva anche per l'applicazione logistica troncata nel caso caotico. Essendo la funzione limitata all'intervallo

Figura 3.7: *Grafico dei passi medi n dopo i quali si ha scorrelazione rispetto all'accuratezza inferiore della coppia di applicazioni troncate. I dati iniziali variano da 10 a 40 con passi di 1. L'accuratezza superiore della coppia è fissata. La retta è la retta di best fit dei dati,* $y = 1.9659 + 4.07429x$.

$[0, 1]$ e i numeri trattati dal calcolatore finiti, esisterà un periodo massimo nelle sequenze computate al calcolatore, determinato dall'accuratezza della funzione troncamento che stiamo utilizzando. I periodi osservati sono tuttavia minori del periodo massimo e cambiano al variare dell'accuratezza. Per esempio, se ci mettiamo nel caso di un'accuratezza pari a 7 cifre decimali, per la funzione logistica il massimo periodo possibile è 10^7, ma si osservano i periodi $1815, 758, 458, 240, 1$. Sicuramente per la logistica questi sono cicli spuri, poichè per la funzione logistica con $\lambda = 4$ esistono solo cicli instabili, che non possono essere osservati poiché l'approssimazione dei dati del computer e l'estrema sensibilità dell'applicazione dai dati iniziali rendono questi cicli invisibili.

Analogamente per il logaritmo vediamo che per un'accuratezza pari a 6 si osservano i cicli di periodo $922, 535, 93, 25$, e per un'accuratezza 7 si trova $949, 640, 312, 281, 96$. Tra l'altro sono cicli spuri per logistica e funzione logaritmica perché in entrambi i casi i cicli cambiano al variare dell'accuratezza; se fossero cicli stabili si osserverebbero sempre gli stessi cicli ad accuratezze diverse.

Per trovare questi periodi abbiamo preso un valore iniziale x_0 nel dominio della funzione e abbiamo iterato la funzione per N passi, ottenendo x_N, abbiamo iterato nuovamente la funzione e abbiamo visto dopo quanti passi si ripeteva il valore x_N. I primi N passi sono stati compiuti per eliminare un eventuale transiente al ciclo. Questo procedimento è stato compiuto per un'intera lista di valori iniziali.

Figura 3.8: *Grafico dei passi medi n dopo i quali si ha scorrelazione rispetto all'accuratezza inferiore della coppia di applicazioni troncate. La differenza tra l'accuratezza delle due funzioni della coppia è fissata e vale 5. I dati iniziali variano da 0.01 a 0.99 con passi di 0.01. Il grafico somiglia a una funzione a gradino. L'accuratezza inferiore varia tra 5 e 90.*

Prospettive

In questa tesi è implicita l'ipotesi che l'aumentare le cifre decimali del troncamento rappresenta più fedelmente il sistema continuo, in altre parole le evoluzioni di un insieme di applicazioni troncate, corrispondenti a una stessa applicazione di partenza, si comporteranno in maniera simile all'evoluzione esatta fintantoché le varie funzioni troncate restano vicine fra di loro, purché il numero di cifre significative sia sufficientemente alto. In queste ipotesi, che ci sembrano ragionevoli, perché è naturale attendersi che un insieme di funzioni con accuratezza grande segua l'evoluzione esatta almeno fino a quando non si allontanino sufficientemente tra loro, aumentare l'accuratezza nei calcoli per generare le sequenze di iterazioni sembra servire per il logaritmo, perché aumentare l'accuratezza fa crescere il numero di iterazioni note entro un certo errore, ma lo stesso non si può dire per la logistica, per la quale aumentare le cifre nei calcoli non dà una maggiore conoscenza dell'evoluzione del sistema a partire da un dato seme. A cosa è dovuta questa differenza nel comportamento? Sappiamo che la logistica è un'applicazione caotica nel senso che ha una forte dipendenza dai dati iniziali, è mixing e quindi ergodica. Cosa possiamo dire sulla funzione logaritmica? Le simulazioni numeriche sembrano indicare che non ci siano cicli attrattori, ma la prova analitica ancora non c'è, ma la avremmo se si riuscisse a dimostrare che l'insieme dei punti che convergono verso l'unico punto fisso della funzione logaritmica è denso.

Quello che in prospettiva potrebbe essere fatto è uno studio delle proprietà della funzione logaritmica, e dell'insieme che conduce alla singolarità, magari dimostrandone un isomorfismo con sistemi noti.

Bibliografia

[1] V.I.Arnold, A.Avez. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Addison Wesley, 1989.

[2] Stefano Ceri, Dino Mandrioli, Licia Sbattella. *Informatica*. Mc Graw-Hill Libri Italia, 2000.

[3] Predrag Cvitanović. *Universality in Chaos*. Adam Hilger, 1989.

[4] M. J. Feigenbaum. *Universal behavior in nonlinear systems*. Los Alamos Science, 1980.(in [3])

[5] R. M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, 1976.(in [3])

[6] Robert M. May. *Necessity and change: deterministic chaos in ecology and evolution*. Bulletin of the American Mathematical Society, July 1995.

[7] H-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe. *Chaos and Fractal*. Springer-Verlag New York, 1992.

[8] James T. Sandefur. *Discrete dynamical systems*. Oxford University Press, 1990.

[9] D. Ruelle. *Strange Attractors*. Math. Intelligencer, 1980.(in [3])