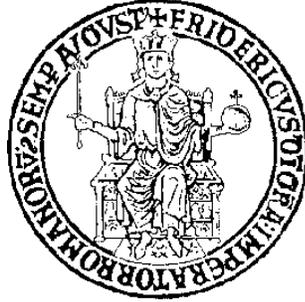


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
FEDERICO II



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E  
NATURALI

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

TESI DI LAUREA IN FISICA

**L'Evoluzione Classica e Quantistica nel  
formalismo di Weyl-Wigner-Moyal**

Candidata:  
Chiara Esposito  
matr. 60/962

Relatori:  
Patrizia Vitale  
Fedele Lizzi

---

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Evoluzione Temporale in Meccanica Classica</b>	<b>11</b>
2.1	Spazio delle fasi . . . . .	12
2.2	Dinamica Hamiltoniana . . . . .	14
2.3	Parentesi di Poisson . . . . .	15
2.4	Trasformazioni Canoniche . . . . .	17
2.5	Evoluzione Temporale . . . . .	18
2.6	Formulazione alla Liouville . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Evoluzione Temporale in Meccanica Quantistica</b>	<b>23</b>
3.1	Stati e Osservabili . . . . .	24
3.1.1	Stati . . . . .	24
3.1.2	Osservabili . . . . .	26
3.2	Probabilità Quantistica . . . . .	27
3.3	Evoluzione Temporale . . . . .	30
3.3.1	Descrizione di Schrödinger . . . . .	30
3.3.2	Descrizione di Heisenberg . . . . .	31
3.4	Operatore densità . . . . .	32
3.4.1	Evoluzione temporale degli operatori densità . . . . .	35
3.5	Dalla Meccanica Classica alla Meccanica Quantistica . . . . .	36
3.6	Mappe di Quantizzazione . . . . .	38
3.6.1	Mappa di Weyl-Wigner . . . . .	39

3.6.2	Simbolo di Wigner . . . . .	42
3.7	Stati coerenti . . . . .	43
3.8	Evoluzione temporale dei Simboli di Weyl . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Potenziale Quartico</b>	<b>49</b>
4.1	Dinamica . . . . .	50
4.2	Evoluzione Classica . . . . .	55
4.3	Evoluzione Quantistica . . . . .	66
4.3.1	Evoluzione per un Energia $E=0.7$ . . . . .	70
4.3.2	Evoluzione per un Energia $E=20$ . . . . .	79
4.4	Analisi dei Risultati . . . . .	89
<b>A</b>	<b>Richiami matematici</b>	<b>91</b>
A.1	Algebre . . . . .	91
A.1.1	Algebre . . . . .	91
A.1.2	Varietà Differenziabili . . . . .	92
A.1.3	Spazio Tangente e Cotangente . . . . .	93
A.1.4	Algebra di Lie e Derivata di Lie . . . . .	94
A.1.5	Spazi Fibrati . . . . .	94
A.2	Spazi di Hilbert . . . . .	95
A.2.1	Spazi Metrici . . . . .	95
A.2.2	Spazi Euclidei . . . . .	96
A.2.3	Spazi di Hilbert . . . . .	96
A.3	Funzioni ellittiche di Jacobi . . . . .	97
<b>B</b>	<b>Dettaglio di alcuni calcoli</b>	<b>101</b>
B.1	Simbolo di Wigner di uno stato coerente . . . . .	101
B.2	Equazione di Liouville Quantistica . . . . .	102
B.3	Soluzione esplicita . . . . .	105
B.4	Adimensionalizzazione delle variabili . . . . .	107
<b>C</b>	<b>Programma</b>	<b>111</b>





# Capitolo 1

## Introduzione

Lo scopo di questo lavoro di tesi è il confronto tra l'evoluzione temporale classica e l'evoluzione temporale quantistica di un sistema dinamico semplice. La meccanica classica e la meccanica quantistica sono due teorie profondamente diverse. La meccanica quantistica descrive con successo oggetti microscopici come atomi e particelle elementari, mentre i sistemi macroscopici sono descritti accuratamente dalle teorie classiche. In realtà non esiste una linea di demarcazione netta tra il mondo classico e il mondo quantistico, piuttosto possiamo dire che l'uno sfuma nell'altro. Questo rende molto interessanti i processi di quantizzazione che studiano proprio il passaggio dalla meccanica classica alla meccanica quantistica ed il passaggio inverso. Useremo il formalismo di Weyl-Wigner-Moyal che fornisce una mappa di quantizzazione da funzioni classiche a operatori quantistici e ci permetterà di descrivere entrambe le evoluzioni attraverso lo stesso formalismo e, al tempo stesso, ci fornisce una connessione tra distribuzioni di probabilità classiche e quantistiche. In questo modo il confronto tra l'evoluzione classica e l'evoluzione quantistica risulterà immediato.

Dal punto di vista hamiltoniano gli stati di un sistema classico sono descritti attraverso lo spazio delle fasi, una varietà sulla quale è definita la parentesi di Poisson  $\{f, g\}$ . Gli osservabili classici sono definiti come funzioni sullo spazio delle fasi. Data una funzione Hamiltoniana  $H$  l'evoluzione

temporale degli osservabili è determinata dalle parentesi di Poisson:

$$\frac{d}{dt}f(q(t), p(t), t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.1)$$

In meccanica quantistica posizioni e momenti diventano operatori che non commutano su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Lo stato non è più punto nello spazio delle fasi, ma viene descritto attraverso un vettore di  $\mathcal{H}$ , o più in generale attraverso una matrice densità  $\hat{\rho}$ .

La quantizzazione di un sistema classico si può effettuare attraverso il principio di corrispondenza, che associa ad ogni osservabile classico  $f$  un operatore  $\hat{f}$  su  $\mathcal{H}$  con la richiesta che le parentesi di Poisson vengano sostituite dal commutatore tra operatori. Per le funzioni coordinate la corrispondenza è semplicemente

$$q \mapsto \hat{q} = q \quad (1.2)$$

$$p \mapsto \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \quad (1.3)$$

Il principio di corrispondenza è però problematico per diverse ragioni. Innanzitutto può far corrispondere ad una funzione classica diversi operatori quantistici, inoltre  $\hat{q}$ ,  $\hat{p}$  sono operatori non limitati e questo crea un problema nella definizione dei domini.

Una procedura per superare questi problemi è stata introdotta da Hermann Weyl nel 1927. Weyl ha definito una mappa, detta proprio mappa di Weyl, da funzioni classiche in operatori quantistici che ha numerose virtù. Innanzitutto risolve l'ambiguità del principio di corrispondenza perché associa ad una funzione classica uno e un solo operatore quantistico. Inoltre questa mappa trasforma funzioni reali in operatori autoaggiunti e funzioni di  $L^2$  in operatori di Hilbert-Schmidt.

Usando la mappa di Weyl si può definire un prodotto deformato chiamato prodotto di Gronewold-Moyal o prodotto star

$$f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}} := e^{\left(\frac{i\hbar}{2} \epsilon^{ij} \partial_{\omega^i} \partial_{\omega'^j}\right)} f_{\hat{A}}(\omega) f_{\hat{B}}(\omega')|_{\omega=\omega'} \quad (1.4)$$

Questo prodotto è associativo e non commutativo, per questo diremo che lo spazio delle fasi è diventato non commutativo.

---

Nel 1932 Wigner introdusse la distribuzione di quasi probabilità detta appunto di Wigner per studiare le correzioni quantistiche alla meccanica statistica classica. Essa è proprio la funzione sullo spazio delle fasi associata, dalla mappa di Weyl, all'operatore densità. L'idea comune di Weyl e Wigner era quella di riscrivere la meccanica quantistica in termini di osservabili classici. In questo modo la meccanica quantistica si può leggere come una deformazione della meccanica classica, nel senso che si ritrovano i risultati classici nel limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Attraverso la rappresentazione di Wigner si possono ottenere correzioni quantistiche a risultati classici; tuttavia questa rappresentazione presenta alcuni problemi. La funzione di Wigner, infatti, non è sempre positiva e quindi non è una distribuzione di probabilità ben definita. Per questo motivo si chiama distribuzione di quasi probabilità. Uno dei casi in cui la funzione di Wigner è definita positiva è il caso degli stati coerenti, che analizzeremo più in dettaglio.

In particolare in questo lavoro di tesi confronteremo l'evoluzione temporale della distribuzione di Wigner nel caso classico e nel caso quantistico. Il prodotto di Moyal può essere usato per definire una parentesi tra funzioni dello spazio delle fasi classico che descriva la quantizzazione e che sia una deformazione dell'usuale parentesi di Poisson. Questa si chiama parentesi di Moyal

$$[f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}]_{\star} = f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}} - f_{\hat{B}} \star f_{\hat{A}} \quad (1.5)$$

e, moltiplicata per  $i\hbar$ , coincide con la parentesi di Poisson solo nel primo ordine in  $\hbar$ . Con questa parentesi deformata è possibile riformulare l'evoluzione temporale di operatori quantistici in termini di evoluzione sullo spazio delle fasi classico

$$\frac{df_{\hat{A}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [f_{\hat{A}}, H]_{\star} \quad (1.6)$$

Nel caso della distribuzione di Wigner l'evoluzione temporale quantistica è descritta dalla

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} [W, H]_{\star} \quad (1.7)$$

Questa equazione descrive l'evoluzione temporale di una distribuzione di probabilità, quindi verrà chiamata equazione di Liouville quantistica. At-

traverso questa equazione descriveremo l'evoluzione temporale quantistica in termini di una funzione sullo spazio delle fasi classico. Sviluppando la parentesi di Moyal si vede che questa equazione si può scrivere proprio come un'equazione di Liouville inhomogena. Partendo da questa considerazione troveremo la soluzione generale dell'equazione di Liouville quantistica che sarà proprio la somma della soluzione classica e di un termine perturbativo.

Il lavoro che abbiamo svolto sarà strutturato nel seguente modo:

Nel Capitolo 2 studieremo l'evoluzione temporale di funzioni sullo spazio delle fasi classico con un formalismo analogo a quello usato in meccanica quantistica. In particolare introdurremo l'equazione di evoluzione di una distribuzione di probabilità di coordinate e momenti di una particella, nel caso in cui il suo stato iniziale sia specificato solo in senso probabilistico (equazione di Liouville).

Nel Capitolo 3 introdurremo brevemente i concetti base della meccanica quantistica. Inoltre definiremo la mappa di Weyl e la distribuzione di quasi probabilità di Wigner e deriveremo l'equazione di evoluzione quantistica in termini della parentesi di Moyal. In questo modo l'evoluzione temporale quantistica è scritta come deformazione dell'equazione di Liouville.

Nel Capitolo 4 considereremo la distribuzione di Wigner associata ad uno stato coerente e studieremo la sua evoluzione temporale classica e quantistica con un potenziale quartico. Quello degli stati coerenti, come anticipato, è uno dei pochi casi in cui la distribuzione di Wigner è definita positiva, quindi la interpretiamo come una distribuzione classica. Nel caso classico vedremo che la gaussiana, nel corso del tempo, si deforma ma, naturalmente, resta definita positiva. Nel caso quantistico, invece, la distribuzione può assumere valori negativi. Questa peculiarità del comportamento quantistico ci sarà utile nel confrontare l'evoluzione dello stesso sistema ad energie diverse; nel caso di energie più piccole risulterà evidente che il comportamento quantistico emerge con maggior forza su quello classico.

## Capitolo 2

# Evoluzione Temporale in Meccanica Classica

*“Dio non gioca a dadi con l’universo”*

*A. Einstein*

Lo scopo di questo capitolo è la descrizione dell’evoluzione temporale in meccanica classica attraverso un formalismo che permetta un confronto diretto con la meccanica quantistica. Per questo motivo abbiamo scelto di concentrare la nostra attenzione sul formalismo Hamiltoniano.

Il formalismo Hamiltoniano, nato per rendere più agevole lo studio del moto di un sistema, in breve fu riconosciuto come una formulazione della meccanica molto più potente di quella lagrangiana che, non solo consente di ottenere risultati generali e significativi sul moto, ma si presenta come formalismo adatto alla meccanica statistica e, successivamente, alla meccanica quantistica. Attraverso gli strumenti della geometria simplettica definiremo lo spazio delle fasi e le coordinate canoniche e introdurremo le equazioni del moto canoniche o equazioni di Hamilton. Analogamente alla meccanica quantistica definiremo i concetti di stato e osservabile e ne studieremo l’evoluzione temporale attraverso la struttura delle parentesi di Poisson. Introdurremo le trasformazioni canoniche come quelle mappe che preservano la struttura delle parentesi di Poisson e mostreremo che l’evoluzione temporale

è una trasformazione canonica. In questo modo l'evoluzione temporale di uno stato o di un osservabile può essere riscritta in termini di un operatore di evoluzione, esattamente come avviene in meccanica quantistica.

Infine valuteremo gli strumenti da utilizzare per affrontare le situazioni in cui non si ha una conoscenza completa del sistema. In questi casi dobbiamo introdurre un nuovo formalismo atto a descrivere statisticamente il sistema fisico.

### 2.1 Spazio delle fasi

In questo paragrafo definiremo geometricamente lo spazio delle fasi ponendo particolare attenzione a quelle strutture utili alla costruzione del formalismo hamiltoniano. In particolare definiremo un sistema di coordinate, dette coordinate canoniche, e la funzione Hamiltoniana, che consentiranno di scrivere le equazioni del moto come un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

Sia  $V_n$  una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale e sia  $T_x V_n$  lo spazio tangente alla varietà nel punto  $x$ . Si può dimostrare che all'insieme formato dalle coppie  $(x, X_x)$ , con  $x \in V_n$  e  $X_x \in T_x V_n$  un vettore tangente, si può dare struttura di varietà differenziabile che chiameremo (spazio) fibrato tangente  $TV_n$ . I campi vettoriali su  $V_n$  sono funzioni a valori nei vettori tangenti. Un'applicazione lineare dallo spazio tangente a  $V_n$  nel punto  $x$  nei numeri reali si chiama vettore cotangente a  $V_n$  nel punto  $x$ . L'insieme di tutti i vettori cotangenti a  $V_n$  nel punto  $x$  forma uno spazio vettoriale lineare  $n$ -dimensionale, duale dello spazio tangente  $T_x V_n$ , chiamato spazio cotangente alla varietà  $V_n$  in  $x$  e indicato con  $T_x^* V_n$ . Analogamente a quanto detto per il fibrato tangente, costruiamo dall'insieme formato dalle coppie di punti di  $V_n$  e  $T_x^* V_n$  una varietà differenziabile a cui diamo il nome di (spazio) fibrato cotangente  $T^* V_n$ .

Consideriamo un sistema fisico a  $n$  gradi di libertà. Lo spazio delle configurazioni è una varietà differenziabile  $V_n$ , mentre lo spazio delle fasi è il fibrato cotangente  $T^* V_n$ .

## 2.1 Spazio delle fasi

---

Vogliamo studiare la struttura dello spazio delle fasi: a tale scopo definiamo cos'è una varietà simplettica. Sia  $V_{2n}$  una varietà differenziabile di dimensioni pari. Si chiama struttura simplettica su  $V_{2n}$  una 2-forma differenziale chiusa non degenera  $\Omega$  definita su  $V_{2n}$ :

$$d\Omega = 0 \quad e \quad \forall \xi \neq 0 \quad \exists \eta : \Omega(\xi, \eta) \neq 0 \quad (\xi, \eta \in TV_{2n,x}) \quad (2.1)$$

dove per 2-forma intendiamo un'applicazione lineare antisimmetrica da  $TV_{2n} \otimes TV_{2n}$  nei numeri reali. La coppia  $(V_{2n}, \Omega)$  si chiama varietà simplettica. Per ogni varietà simplettica nell'intorno di ogni punto è possibile definire *coordinate canoniche*  $(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$  per cui la forma simplettica è

$$\Omega = dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + \dots + dp_n \wedge dq_n \quad (2.2)$$

Lo spazio delle fasi ha una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione  $2n$  e di conseguenza possiamo associargli una struttura di varietà simplettica. Le coordinate canoniche  $(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$  sono le posizioni e gli impulsi.

La struttura simplettica induce un isomorfismo  $\varphi$  tra lo spazio delle fasi  $T^*V_n$  e lo spazio tangente  $TV_n$ . I campi vettoriali che risultano immagini di 1-forme esatte, tramite questo isomorfismo, sono chiamati campi hamiltoniani  $X_H$ :

$$X_H = \varphi(dH) \quad (2.3)$$

La funzione  $H$  è chiamata *funzione Hamiltoniana*.

Nel caso da noi considerato nel seguito in cui lo spazio delle configurazioni sia  $\mathbb{R}^n$ , sia lo spazio tangente che lo spazio delle fasi sono  $\mathbb{R}^{2n}$ . In questo caso il campo hamiltoniano generato da  $H$  in forma canonica è

$$X_H = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \quad (2.4)$$

La funzione Hamiltoniana, come vedremo nel prossimo paragrafo, è fondamentale per la formulazione della dinamica, mentre i campi hamiltoniani saranno utili per definire l'evoluzione temporale di un sistema fisico.

## 2.2 Dinamica Hamiltoniana

Consideriamo lo spazio delle fasi  $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  e definiamo in esso le coordinate canoniche  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . Le equazioni del moto canoniche o equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (2.5)$$

La conoscenza ad un certo istante del valore di tutte le variabili canoniche permette di calcolarle, attraverso queste equazioni, in un qualsiasi istante, e quindi specifica in maniera completa il moto del sistema. Per questo diciamo che la  $2n$ -pla  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  individua uno stato, o più precisamente uno stato *puro* del sistema. Lo spazio delle fasi quindi da questo punto di vista è l'insieme di tutti i possibili stati puri che sono pensati come i punti di tale spazio.

Una generica grandezza  $f(q, p, t)$  che possa essere espressa come funzione delle coordinate canoniche è chiamata variabile dinamica o osservabile. Vogliamo vedere come varia, per un dato sistema, un generico osservabile per effetto dell'evoluzione temporale del sistema stesso. Tenendo conto delle equazioni di Hamilton (2.5) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(q(t), p(t), t) &= \sum_s \left( \frac{\partial f}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial f}{\partial p_s} \dot{p}_s \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_s \left( \frac{\partial f}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se per ogni coppia di osservabili  $f(q, p, t)$  e  $g(q, p, t)$  introduciamo l'espressione

$$\{f, g\} = \sum_s \frac{\partial f}{\partial q_s} \frac{\partial g}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s} \frac{\partial g}{\partial q_s} \quad (2.7)$$

la (2.6) si può scrivere

$$\frac{d}{dt}f(q(t), p(t), t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.8)$$

## 2.3 Parentesi di Poisson

---

L'espressione  $\{f, g\}$  prende il nome di parentesi di Poisson tra le grandezze  $f$  e  $g$ . Il pregio della (2.8) sta nel fatto che la *parentesi di Poisson* gode di alcune notevoli proprietà che discuteremo nel paragrafo successivo. Notiamo che dalla definizione (2.7) segue immediatamente

$$\{q_s, H\} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \{p_s, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.9)$$

perciò possiamo riscrivere le equazioni di Hamilton nella forma

$$\dot{q}_s = \{q_s, H\}, \quad \dot{p}_s = -\{p_s, H\} \quad (2.10)$$

## 2.3 Parentesi di Poisson

Abbiamo definito la parentesi di Poisson tra due osservabili attraverso la relazione (2.7). Vogliamo studiare le proprietà principali di tale espressione. Dalla definizione (2.7) si verifica immediatamente

$$\{c, f\} = 0 \quad (2.11)$$

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (2.12)$$

$$\{cf, g\} = c\{f, g\} \quad (2.13)$$

$$\{f + g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad (2.14)$$

dove  $c$  è una costante numerica e  $f, g$  e  $h$  sono osservabili. Dall'antisimmetria segue immediatamente che  $\{f, f\} = 0$ . Inoltre vale l'identità di Leibnitz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad (2.15)$$

Un'altra proprietà notevole è espressa dalla identità di Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} \quad (2.16)$$

per cui l'applicazione  $\{, \}$  definisce una struttura di algebra di Lie (Appendice A). Una varietà su cui è definita una parentesi di Poisson si dice varietà

di Poisson. La forma più generale della parentesi di Poisson è

$$\{f, g\} = \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega^i} \frac{\partial g}{\partial \omega^j} \quad (2.17)$$

dove abbiamo definito la fase del sistema come  $\omega = (q, p)$ , cioè come un punto sullo spazio delle fasi, e  $\Lambda^{ij}$  è un tensore antisimmetrico. Nei casi in cui questo sia invertibile, come la (2.7), la sua inversa è la 2-forma simplettica e la varietà di Poisson è una varietà simplettica. Per quanto riguarda la mappa (2.4), questa si può scrivere esplicitamente in termini del tensore  $\Lambda^{ij}$ :

$$X_H = \Lambda^{ij} \frac{\partial H}{\partial \omega^i} \frac{\partial}{\partial \omega^j} \quad (2.18)$$

che si riduce alla (2.4) nel caso in cui la parentesi di Poisson sia in forma standard. Possiamo riscrivere attraverso le parentesi di Poisson la condizione affinché la  $2n$ -pla  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  definisca variabili canoniche:

$$\{q_s, q_r\} = 0 \quad \{p_s, p_r\} = 0 \quad \{q_s, p_r\} = \delta_{rs} \quad (2.19)$$

chiameremo queste relazioni parentesi di Poisson fondamentali.

Un osservabile  $f(q, p, t)$  si dice costante del moto o integrale primo se il suo valore  $f(q(t), p(t), t)$  resta costante lungo le soluzioni del moto. Per l'equazione (2.8) la condizione affinché  $f$  sia una costante del moto è in generale

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

Nel caso in cui  $f$  non dipenda esplicitamente dal tempo la condizione sarà

$$\{f, H\} = 0 \quad (2.21)$$

Da questa segue che l'Hamiltoniana, se non dipende esplicitamente dal tempo, è una costante del moto.

## 2.4 Trasformazioni Canoniche

Siano  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  variabili canoniche. Consideriamo una generica trasformazione invertibile di queste variabili

$$\begin{aligned}\bar{q}_1 &= \bar{q}_1(q_1, \dots, p_{2n}) \\ \dots & \\ \bar{p}_{2n} &= \bar{p}_{2n}(q_1, \dots, p_{2n})\end{aligned}\tag{2.22}$$

La parentesi di Poisson rispetto alle variabili trasformate  $\{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}}$  non risulta, in generale, uguale a quella rispetto alle variabili di partenza  $\{f, g\}_{q, p}$ . Se per  $f$  e  $g$  qualsiasi si ha

$$\{f, g\}_{q, p} = \{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}}\tag{2.23}$$

si dice che la trasformazione (2.22) è *canonica*. Evidentemente le nuove variabili risultano canoniche nel senso della (2.19).

Per comodità d'ora in poi indicheremo le  $2n$  variabili  $q_s$  e  $p_s$  con  $\omega^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, 2n$ . Una funzione  $f(q, p)$  può essere scritta come  $f(\omega)$ . Per esprimere la parentesi di Poisson (2.7) in modo più conciso introduciamo la matrice antisimmetrica  $2n$ -dimensionale  $\epsilon^{\mu\nu}$  con i seguenti elementi di matrice

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu, \nu \leq k \text{ e } \mu, \nu > k \\ 1 & \text{se } \mu \leq k \\ -1 & \text{se } \nu \leq k \end{cases}\tag{2.24}$$

nei termini della quale la parentesi di Poisson di  $f(\omega)$  con  $g(\omega)$  assume la forma:

$$\{f, g\} = \epsilon^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial g}{\partial \omega^\nu}\tag{2.25}$$

$\epsilon^{\mu\nu}$  è il tensore di Poisson, cioè  $\Lambda^{ij}$  per la (2.7). La condizione affinché una trasformazione  $\omega \rightarrow \omega'$  sia canonica può essere data in forma più elegante

$$\epsilon^{\mu\nu} \frac{\partial \omega'^\rho}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial \omega'^\sigma}{\partial \omega^\nu} = \epsilon^{\rho\sigma}\tag{2.26}$$

Concentriamo la nostra attenzione sulle trasformazioni infinitesime:

$$\omega'^{\mu} = \omega^{\mu} + \delta\theta\phi^{\mu}(\omega) \quad (2.27)$$

dove  $\delta\theta$  è un parametro infinitesimo e  $\phi^{\mu}$  sono funzioni di  $\omega$ . Dalla condizione (2.26) si ha che la forma generale di una trasformazione canonica infinitesima è

$$\omega'^{\mu} = \omega^{\mu} + \delta\theta\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\omega^{\nu}} = \omega^{\mu} + \delta\theta\{\omega^{\mu}, \phi\} \quad (2.28)$$

La funzione  $\phi$  è chiamata generatore del sottogruppo ad un parametro della trasformazione infinitesima. Sia  $\omega_0^{\mu}$  il valore di  $\omega^{\mu}$  per  $\theta = 0$  e sia  $\omega_0 \rightarrow \omega$  una trasformazione canonica. Definiamo l'operatore lineare  $X_{\phi}(\omega_0)$  come segue:

$$X_{\phi}(\omega_0) = \epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\phi(\omega_0)}{\partial\omega_0^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\omega_0^{\nu}} \quad (2.29)$$

La trasformazione canonica generata da  $\phi(\omega_0)$  che porta  $\omega_0^{\mu}$  in  $\omega^{\mu}$  può essere scritta, attraverso la mappa esponenziale, come

$$\omega^{\mu} = e^{-\theta X_{\phi}(\omega_0)}\omega_0^{\mu} \quad (2.30)$$

Analogamente, per lo sviluppo in  $\theta$  di una funzione  $f(\omega)$  si ha

$$f(\omega) = e^{-\theta X_{\phi}(\omega_0)}f(\omega_0) \quad (2.31)$$

Nel prossimo paragrafo vedremo che, attraverso questi strumenti, scriveremo l'evoluzione temporale di un osservabile in termini di una trasformazione canonica.

## 2.5 Evoluzione Temporale

Osserviamo che le equazioni di Hamilton possono essere riscritte nella forma

## 2.5 Evoluzione Temporale

---

$$q(t + dt) = q(t) + dt \frac{\partial H}{\partial p} \quad (2.32)$$

$$p(t + dt) = p(t) - dt \frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.33)$$

o in forma più concisa in termini della fase del sistema

$$\omega^\mu(t + dt) = \omega^\mu(t) + dt \epsilon^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial \omega^\nu} \quad (2.34)$$

Quindi, dal momento che questa trasformazione soddisfa la (2.26), possiamo descrivere le equazioni del moto dicendo che l'Hamiltoniana è il generatore di una famiglia ad un parametro di trasformazioni canoniche sullo spazio delle fasi. Se  $H$  non ha dipendenza esplicita dal tempo questo è un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche.

$$\omega'^\mu = \omega^\mu + \delta t \epsilon^{\mu\nu} \frac{\partial H(\omega)}{\partial \omega^\nu} = \omega^\mu + \delta t \{ \omega^\mu, H \} \quad (2.35)$$

Assumiamo che  $H$  non dipenda esplicitamente dal tempo e che le trasformazioni canoniche che genera siano regolari. Allora la soluzione delle equazioni del moto può essere descritta così: se la fase del sistema al tempo  $t = 0$  è data da  $\omega_0^\mu$ , allora la fase al tempo  $t$  si ottiene facendo la trasformazione canonica finita

$$\omega^\mu(t) = e^{-tX_H(\omega_0)} \omega_0^\mu \quad (2.36)$$

dove

$$X_H(\omega_0) = \epsilon^{\mu\nu} \frac{\partial H(\omega_0)}{\partial \omega_0^\mu} \frac{\partial}{\partial \omega_0^\nu} \quad (2.37)$$

che è proprio il campo hamiltoniano (2.4). L'operatore di evoluzione temporale

$$U(t) = e^{-tX_H(\omega_0)} \quad (2.38)$$

definisce una mappa dallo spazio delle fasi in sè stesso.

Dato un osservabile  $f(\omega)$ , tenendo conto della (2.31), la sua evoluzione temporale è data da

$$f(\omega(t)) = e^{-tX_H(\omega_0)} f(\omega_0). \quad (2.39)$$

### 2.6 Formulazione alla Liouville

Abbiamo visto che in meccanica classica uno stato è caratterizzato dalle coordinate  $\omega = (q, p)$ . L'evoluzione temporale del sistema si ottiene risolvendo le equazioni di Hamilton. Per condizioni iniziali fissate  $\omega_0$  c'è un'unica soluzione  $\omega(t)$  che dà le  $2n$  coordinate per ogni  $t$ .

Esistono molte situazioni fisiche in cui la condizione iniziale non è nota con precisione, perciò dobbiamo sviluppare un formalismo che permetta di ottenere informazioni anche da una conoscenza incompleta dello stato del sistema. Supponiamo perciò che per il sistema in studio i valori di  $\omega$  al tempo  $t = 0$  non siano noti, ma che sia assegnata una densità di probabilità  $\rho(\omega_0)$  per tali valori (per analogia con la meccanica quantistica lo chiameremo stato misto). La funzione  $\rho(\omega_0)$  obbedisce alle relazioni

$$\rho(\omega_0) \geq 0, \quad \int \rho(\omega_0) d\omega_0 = 1 \quad (2.40)$$

Supponiamo di conoscere la probabilità  $\rho(\omega_0) d\omega_0$  che il punto rappresentativo del sistema si trovi al tempo  $t = 0$  nel generico volumetto  $d\omega_0$  dello spazio delle fasi. Di conseguenza non avremo più il valore esatto di un generico osservabile al tempo  $t = 0$  ma solo il valore medio, che chiameremo valore di aspettazione definito da

$$\langle \omega^\mu \rangle_0 = \int \omega_0^\mu \rho(\omega_0) d\omega_0 \quad (2.41)$$

$$\langle f \rangle_0 = \int f(\omega_0) \rho(\omega_0) d\omega_0 \quad (2.42)$$

Naturalmente un'incertezza nel valore delle variabili dinamiche al tempo  $t = 0$  introdurrà un'incertezza al tempo successivo  $t$ ; per ottenere il valore atteso

## 2.6 Formulazione alla Liouville

---

della variabile al tempo  $t > 0$ , dobbiamo fare la media delle soluzioni delle equazioni del moto sulle condizioni iniziali. Quindi, ricordando la (2.39) dobbiamo avere

$$\begin{aligned}\langle \omega^\mu \rangle_t &= \int \omega^\mu(t, \omega_0) \rho(\omega_0) d\omega_0 = \int e^{-tX_H(\omega_0)} \omega_0^\mu \rho(\omega_0) d\omega_0 \\ \langle f \rangle_t &= \int e^{-tX_H(\omega_0)} f(\omega_0) \rho(\omega_0) d\omega_0\end{aligned}\quad (2.43)$$

Nel formalismo sviluppato la dipendenza dal tempo dei valori attesi delle variabili dinamiche  $f(\omega)$  è solo quello delle variabili  $\omega^\mu$ , la forma funzionale di  $f(\omega)$  resta inalterata nel tempo.

Inoltre, ricordando la relazione (2.8) si può scrivere:

$$\dot{\omega}^\mu = \{\omega^\mu, H(\omega)\}, \quad (2.44)$$

$$\dot{f}(\omega) = \{f(\omega), H(\omega)\}. \quad (2.45)$$

Dalla sua espressione nell'equazione (2.6) e dall'invarianza canonica dell'integrale sullo spazio delle fasi vediamo immediatamente che possiamo scriverla nella forma alternativa:

$$\begin{aligned}\langle f \rangle_t &= \int e^{-tX_H(\omega_0)} f(\omega_0) \rho(\omega_0) d\omega_0 = \\ &= \int f(\omega_0) (e^{-tX_H(\omega_0)} \rho(\omega_0)) d\omega_0\end{aligned}\quad (2.46)$$

ed in particolare per le coordinate stesse

$$\langle \omega^\mu \rangle_t = \int \omega_0^\mu (e^{tX_H(\omega_0)} \rho(\omega_0)) d\omega_0. \quad (2.47)$$

In questa forma si vede chiaramente che la dipendenza temporale è stata trasferita dalle variabili dinamiche  $f$  o  $\omega$  alla funzione di distribuzione  $\rho$ .

La funzione di distribuzione dipendente dal tempo  $\rho_t(\omega_0) = e^{tX_H(\omega_0)} \rho(\omega_0)$  obbedisce all'equazione di Liouville:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(\omega_0) = \{\rho_t(\omega_0), X_H(\omega_0)\} \quad (2.48)$$

In analogia con la meccanica quantistica, queste due forme di dinamica sono chiamate formulazione di Heisenberg e Schrödinger rispettivamente.

Nella formulazione di Heisenberg lo stato del sistema è specificato da una funzione densità  $\rho(\omega_0)$  indipendente dal tempo nello spazio delle fasi. Ogni variabile dinamica obbedisce all'equazione del moto (2.43).

Nella formulazione di Schrödinger lo stato del sistema è specificato da un funzione densità dipendente dal tempo secondo la  $\rho_t(\omega_0)$  che obbedisce all'equazione di Liouville.

In entrambi i casi si perviene allo stesso valore per  $\langle f \rangle_t$ .

Consideriamo il caso in cui  $\rho(\omega_0) = \delta(\omega_0)$ : sostituendo la distribuzione  $\delta$  nella (2.43) si ottiene

$$\langle f \rangle_t = \int e^{-tX_H(\omega_0)} f(\omega_0) \delta(\omega_0) d\omega_0 = e^{-tX_H(\omega_0)} f(\omega_0) \quad (2.49)$$

che coincide con la (2.39). In conclusione nel caso in cui  $\rho(\omega_0) = \delta(\omega_0)$  si ottengono i risultati ottenuti per gli stati puri.

## Capitolo 3

# Evoluzione Temporale in Meccanica Quantistica

*“Einstein, non dire a Dio cosa deve fare”*

*N. Bohr*

La meccanica quantistica nasce nella prima metà del ventesimo secolo per descrivere il comportamento della materia a livello microscopico, a scale di lunghezza inferiori o dell'ordine di quelle dell'atomo o ad energie nella scala delle interazioni nucleari. Essa permette di interpretare e quantificare fenomeni che non possono essere giustificati dalla meccanica classica.

In questo capitolo daremo una breve introduzione alla meccanica quantistica nella sua formulazione usuale; a tale fine richiameremo innanzitutto i concetti di stato, osservabile e misura quantistici, valutando le differenze con quelli classici.

Vedremo infatti che, mentre in meccanica classica la conoscenza del valore delle variabili coniugate a un dato istante permette, attraverso le equazioni del moto, di predirne l'evoluzione con precisione arbitraria, in meccanica quantistica possiamo prevedere solo la probabilità di misurarne determinati valori all'atto dell'esperimento; questo conferisce un carattere probabilistico intrinseco alla teoria.

Un'altra importante caratteristica della meccanica quantistica è che es-

istono coppie di grandezze, come posizione e impulso di una particella, il cui valore non può essere conosciuto simultaneamente con precisione arbitraria, indipendentemente dall'accuratezza delle misure (Principio di Indeterminazione di Heisenberg).

Descriveremo l'evoluzione temporale, prima in termini generali, attraverso il formalismo di Heisenberg e Schrödinger, poi attraverso l'operatore densità in modo da avere un equivalente quantistico dell'equazione di Liouville classica. La descrizione dell'evoluzione temporale quantistica in termini usuali, cioè attraverso gli operatori, non consente un confronto diretto con la meccanica classica.

Per questo motivo concentreremo la nostra attenzione sul passaggio da meccanica classica a meccanica quantistica e, di conseguenza, sulle mappe di quantizzazione. Queste forniscono una maniera canonica di associare funzioni classiche a operatori quantistici e viceversa. La meccanica quantistica, quindi, sarà descritta in termini di funzioni sullo spazio delle fasi. In particolare descriveremo la mappa di Weyl-Wigner che sarà utile per scrivere l'evoluzione temporale in un formalismo che permette un confronto diretto con la meccanica classica.

## 3.1 Stati e Osservabili

In questo paragrafo definiremo i concetti di stato e osservabile in meccanica quantistica, ponendo l'accento su analogie e differenze con la meccanica classica.

### 3.1.1 Stati

In meccanica classica, lo stato di una particella viene definito come un punto dello spazio delle fasi, attraverso il valore esatto di posizione e impulso  $(q_0, p_0)$ , o più in generale, come una densità di probabilità  $\rho(q, p) \equiv \rho(\omega)$ . Nel primo caso parliamo di stati puri, nel secondo di stati miscela.

In meccanica quantistica non possiamo parlare di spazio delle fasi, per cui

### 3.1 Stati e Osservabili

---

la definizione di stato sarà meno immediata, ma, vedremo, ci sono comunque degli aspetti in comune con la meccanica classica. Un opportuno elemento  $\psi$  di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , detto *vettore di stato*, con norma uguale a 1, definisce lo stato del sistema. Uno *stato puro* può essere rappresentato attraverso un vettore di stato  $\psi$  che contiene tutte le informazioni sul sistema.

D'ora in poi useremo la notazione introdotta da Dirac o notazione bra-ket per descrivere uno stato quantistico. Il nome deriva dal fatto che il prodotto scalare di due stati è denotato con una bracket,  $\langle\phi|\psi\rangle$ , consistente in due parti, la sinistra  $\langle\phi|$  chiamata bra, e la parte destra  $|\psi\rangle$ , chiamata ket. I vettori di  $\mathcal{H}$  sono caratterizzati da  $|\psi\rangle$ , il ket. Introduciamo ora lo spazio  $\mathcal{H}^\dagger$ , lo spazio duale allo spazio dei ket, i cui elementi sono i funzionali lineari su  $\mathcal{H}$ . Rappresentiamo i vettori di  $\mathcal{H}^\dagger$  come  $\langle\phi|$  i bra. Riscriviamo il prodotto interno tra elementi di  $\mathcal{H}$  come il prodotto scalare tra un bra e un ket

$$\langle\phi, \psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \quad (3.1)$$

in questa notazione le proprietà del prodotto scalare si riscrivono come:

1.  $\langle\psi|\psi\rangle$  reale e  $\geq 0 \forall \psi \in \mathcal{H}$  e  $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$
2.  $\langle\psi|\phi\rangle = \overline{\langle\phi|\psi\rangle} \forall \psi, \phi \in \mathcal{H}$
3.  $\langle\lambda\psi|\phi\rangle = \bar{\lambda}\langle\psi|\phi\rangle \forall \psi, \phi \in \mathcal{H}$
4.  $\langle\psi + \phi|\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle + \langle\phi|\varphi\rangle \forall \psi, \phi, \varphi \in \mathcal{H}$

Inoltre la norma indotta dal prodotto scalare è  $\langle\psi|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}$ .

In seguito introdurremo un formalismo che permetta di trattare situazioni in cui lo stato iniziale del sistema non sia uno stato puro. Questo formalismo è l'analogo per la meccanica quantistica del formalismo della funzione densità della meccanica classica.

Rappresenteremo lo stato di un sistema attraverso l'operatore  $\hat{\rho}$  che prende il nome di operatore densità. Esso permette di rappresentare in maniera unificata sia il caso in cui lo stato iniziale è completamente specificato, *stato puro*, sia la situazione più generale in cui lo stato iniziale sia conosciuto in maniera probabilistica, *stato miscela*.

### 3.1.2 Osservabili

In generale un osservabile è una grandezza per cui è definito un ben determinato procedimento di misura.

In meccanica classica abbiamo definito una grandezza osservabile come una funzione di posizione e momento,  $f(q, p)$ . Se lo stato del sistema è descritto da uno stato puro  $(q_0, p_0)$  il valore dell'osservabile è  $f(q_0, p_0)$ , se è descritto da una densità di probabilità il valore dell'osservabile è dato dal valore medio  $\langle f \rangle_\rho$ .

In meccanica quantistica a ciascuna grandezza osservabile  $A$  è associato un operatore lineare ed autoaggiunto  $\hat{A}$  nello spazio  $\mathcal{H}$ . L'insieme dei valori possibili per la misura di una grandezza è dato dallo spettro dell'operatore ad essa associato. La linearità dell'operatore assicura che esso possa essere rappresentato come una matrice (eventualmente infinito-dimensionale) in una qualche base, mentre l'autoaggiuntezza assicura che lo spettro dell'operatore sia reale.

Vediamo come vengono rappresentati e che proprietà hanno gli operatori nel formalismo alla Dirac: un operatore si applica su di un ket da sinistra e la sua immagine è ancora un ket  $\hat{A}|\alpha\rangle$ . Il vettore  $|\alpha\rangle$  è detto *autostato* di  $\hat{A}$  se

$$\hat{A}|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \tag{3.2}$$

in tal caso  $a$  è detto *autovalore* di  $\hat{A}$ .

Definiamo  $\langle\alpha|\hat{A}$  come il bra che risulta dall'azione dell'operatore  $\hat{A}$  sul bra  $\langle\alpha|$ ; in particolare, nel caso in cui  $\hat{A}$  sia un operatore autoaggiunto  $\langle\alpha|\hat{A}$  coincide con il complesso coniugato  $\langle\alpha|\hat{A}^\dagger$  di  $\hat{A}|\alpha\rangle$ .

In questa notazione riscriviamo la definizione di operatore autoaggiunto:

$$\text{autoaggiunto} \quad \langle\hat{A}\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\hat{A}\psi\rangle \tag{3.3}$$

Per gli sviluppi successivi, dal momento che useremo solo operatori autoaggiunti  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$  può essere utile introdurre la seguente notazione

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\hat{A}\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\hat{A}\psi\rangle \tag{3.4}$$

## 3.2 Probabilità Quantistica

---

In meccanica quantistica, contrariamente a quanto avviene in meccanica classica, il valore dell'osservabili è sempre dato dal valor medio. Nel caso di stati puri il valore medio  $\langle \hat{A} \rangle_\phi$  di  $\hat{A}$  relativo al vettore di stato  $\phi$ , in questo formalismo, coincide con il valore di aspettazione:

$$\langle \hat{A} \rangle_\phi = \langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle \quad (3.5)$$

Nel caso di stati miscela, vedremo nel paragrafo (3.4) che il valore medio verrà scritto in termini dell'operatore  $\hat{\rho}$ , analogamente a quanto visto in meccanica classica.

A questo punto è utile definire la struttura di *commutatore* tra operatori

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (3.6)$$

Questa mappa definisce il commutatore e gode delle seguenti proprietà:

1.  $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
2.  $[a, \hat{A}] = 0$
3.  $[a\hat{A} + b\hat{B}, \hat{C}] = a[\hat{A}, \hat{C}] + b[\hat{B}, \hat{C}]$
4.  $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$
5.  $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$

con  $a$  e  $b$  numeri complessi.

Queste proprietà per i commutatori sono le stesse proprietà formali delle parentesi di Poisson.

## 3.2 Probabilità Quantistica

In questa sezione analizzeremo uno degli aspetti più importanti della meccanica quantistica, l'aspetto probabilistico. Per fare questo dobbiamo chiarire la natura dell'informazione contenuta nel vettore  $|\psi\rangle$ .

### 3. Evoluzione Temporale in Meccanica Quantistica

---

Sia  $A$  la grandezza che vogliamo osservare e  $\hat{A}$  l'operatore autoaggiunto ad essa associato. Consideriamo, per semplicità notazionale, l'equazione agli autovalori per  $\hat{A}$  nel caso in cui non ci sia degenerazione negli autovalori e lo spettro sia discreto:

$$\hat{A}|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle \quad (3.7)$$

possiamo sempre sviluppare il vettore di stato nella forma

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\alpha_n\rangle \quad (3.8)$$

La probabilità che un'osservazione di  $A$  all'istante  $t$  fornisca il valore  $a_n$  è nel caso di uno stato puro

$$P(a_n) = |c_n(t)|^2 = |\langle \alpha_n | \psi \rangle|^2 \quad (3.9)$$

Questo, anche nel caso, di stati puri introduce una predizione probabilistica relativa all'esito della misura.

Una delle differenze più profonde tra meccanica classica e meccanica quantistica è il fatto che, in meccanica classica, nel caso di stati puri, dato  $\omega_0 = (q_0, p_0)$  il valore di  $f(\omega_0)$  è univocamente determinato, mentre in meccanica quantistica, anche nel caso di stato puro, la predizione sulla misura dell'osservabile è probabilistica, a meno che il sistema sia in un autostato associato alla grandezza osservata. Un'altra peculiarità della misura quantistica risiede nel fatto che, lo stato del sistema viene proiettato, per effetto della misura, nel particolare autostato  $|\alpha_n\rangle$  relativo all'autovalore  $a_n$  misurato.

Questo aiuta a comprendere l'incompatibilità che può esistere tra le misurazioni successive di due diverse osservabili  $A$  e  $B$ . La prima misurazione prepara il sistema in un autostato di  $\hat{A}$ . Quando si procede a misurare  $B$  se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  non commutano non avranno autostati comuni e perciò la seconda misurazione modificherà sostanzialmente lo stato del sistema proiettandolo in un autostato di  $\hat{B}$ . In questo modo l'informazione su  $A$  ottenuta con la prima misura è distrutta a causa della seconda.

## 3.2 Probabilità Quantistica

---

Contrariamente a quanto avviene in meccanica classica, in meccanica quantistica si incontrano dei limiti all'informazione ottenibile sul sistema. Questi limiti sono legati alla natura stessa del processo di osservazione e costituiscono il *Principio di Indeterminazione di Heisenberg*.

Siano  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  due operatori che non commutano. Siano  $\langle \hat{A} \rangle$  e  $\langle \hat{B} \rangle$  i valori medi di  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sullo stato  $\psi$  del sistema e gli scarti quadratici medi da tali valori:

$$(\Delta \hat{A})^2 = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle \quad (3.10)$$

$$(\Delta \hat{B})^2 = \langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \rangle \quad (3.11)$$

Supponendo che  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$  il principio di indeterminazione nella sua forma più generale sarà:

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{\| \langle \hat{C} \rangle \|}{2} \quad (3.12)$$

Di conseguenza, se due operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  commutano, è possibile trovare una base di autovettori comune e quindi misure indipendenti di queste due grandezze non si influenzano l'un l'altra.

Consideriamo in particolare gli osservabili posizione e impulso. Dalla relazione di commutazione

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (3.13)$$

segue immediatamente che

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.14)$$

in cui  $\Delta \hat{q}$  è l'errore sulla posizione e  $\Delta \hat{p}$  quello sulla quantità di moto, mentre  $\hbar$  è la costante di Planck rinormalizzata. Quindi possiamo affermare che non è possibile conoscere simultaneamente posizione e quantità di moto di un dato oggetto con precisione arbitraria.

### 3.3 Evoluzione Temporale

Resta da analizzare l'evoluzione temporale. Esistono diversi tipi di descrizione, tutti equivalenti. Descriviamo i due formalismi più importanti, il formalismo sviluppato da Heisenberg, Bohr, Jordan, che si basa sull'approccio matriciale, e il formalismo sviluppato da de Broglie e Schrödinger che si basa sull'approccio ondulatorio.

#### 3.3.1 Descrizione di Schrödinger

L'evoluzione temporale di un vettore di stato puro  $|\psi_S(t)\rangle$  è governata dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi_S(t)\rangle \quad (3.15)$$

dove  $\hat{H}(t)$  è l'osservabile associato all'energia totale del sistema ed è chiamato operatore Hamiltoniano. Secondo i requisiti interpretativi, il ket  $|\psi_S(t)\rangle$  deve mantenersi normalizzato durante la sua evoluzione temporale all'interno dello spazio di Hilbert. Allora l'insieme dei ket di norma unitaria che rappresentano il sistema nei vari istanti successivi può essere riguardato come le successive posizioni nello spazio di Hilbert occupate dal ket iniziale, come se l'evoluzione temporale fosse una sorta di rotazione indotta da una trasformazione unitaria dipendente dal tempo.

L'equazione di Schrödinger è un'equazione lineare, perciò per un  $t$  fissato  $|\psi_S(t)\rangle$  dipende linearmente da  $|\psi_S(t_0)\rangle$ . Allora possiamo scrivere

$$|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi_S(t_0)\rangle \quad (3.16)$$

dove  $\hat{U}(t)$  è un operatore lineare che prende il nome di operatore di evoluzione temporale. Corrispondentemente  $|\psi_S(t)\rangle$  viene chiamato evoluto temporale di  $|\psi_S(t_0)\rangle$  al tempo  $t$ . Dalla (3.15) e dalla (3.16) segue che

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) |\psi_S(t_0)\rangle = \hat{H} \hat{U}(t) |\psi_S(t_0)\rangle \quad (3.17)$$

### 3.3 Evoluzione Temporale

---

questa, insieme alla condizione iniziale  $\hat{U}(0) = 1$  determina univocamente  $\hat{U}(t)$  ed è immediato verificare che entrambe sono soddisfatte se

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \quad (3.18)$$

che ha una forma analoga all'operatore di evoluzione temporale in meccanica classica definito dalla (2.38).

Spesso l'equazione di Schrödinger si scrive in rappresentazione di coordinate e diventa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_S(q, t) = \hat{H}(t) \psi_S(q, t) \quad (3.19)$$

In realtà ciò che ci interessa fisicamente è la dipendenza dal tempo dei valori di aspettazione delle osservabili, cioè di

$$\langle \hat{A}_S \rangle_t = \langle \psi | \hat{A}_S | \psi \rangle \quad (3.20)$$

L'evoluzione temporale di  $\hat{A}_S$  nella descrizione di Schrödinger si ottiene tenendo fisso l'operatore  $\hat{A}_S$  e facendo dipendere dal tempo solo  $|\psi_S\rangle$ :

$$\langle \hat{A}_S \rangle_t = \langle \psi_S(t_0) | \hat{U}^\dagger | \hat{A}_S | \hat{U} \psi_S(t_0) \rangle \quad (3.21)$$

#### 3.3.2 Descrizione di Heisenberg

Nella descrizione di Heisenberg l'evoluzione di un osservabile si ottiene mantenendo fisso lo stato e facendo dipendere dal tempo l'operatore corrispondente.

Il vettore di stato  $|\psi_S(t)\rangle$  al tempo  $t$  è espresso in termini di  $|\psi_S(t_0)\rangle$  dalla relazione (3.16) dove  $\hat{U}(t)$  è l'operatore di evoluzione temporale. Dal momento che questo operatore è unitario, è sufficiente fare una trasformazione unitaria associata all'operatore  $\hat{U}^\dagger(t)$  per ottenere un vettore trasformato

$$|\psi_H\rangle = \hat{U}^\dagger(t) |\psi_S(t)\rangle = \hat{U}^\dagger(t) \hat{U}(t) |\psi_S(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle \quad (3.22)$$

Nella descrizione di Heisenberg, quindi, il vettore di stato è costante ed è uguale a  $|\psi_S(t_0)\rangle$ . Il trasformato  $\hat{A}_H(t)$  di un operatore  $\hat{A}_S(t)$  è dato da

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S(t) \hat{U}(t) \quad (3.23)$$

e quindi dipende dal tempo indipendentemente da  $\hat{A}_S$ .

Calcoliamo l'evoluzione dell'operatore  $\hat{A}_H(t)$  quando  $\hat{A}_S$  non dipende esplicitamente dal tempo. Usando la (3.17) e la sua aggiunta otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = -\frac{1}{i\hbar}\hat{U}^\dagger(t)\hat{H}(t)\hat{A}_S(t)\hat{U}(t) + \frac{1}{i\hbar}\hat{U}^\dagger(t)\hat{A}_S(t)\hat{H}(t)\hat{U}(t) \quad (3.24)$$

In accordo con la definizione (3.23) otteniamo

$$i\hbar\frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H(t), \hat{H}(t)] \quad (3.25)$$

Le formulazioni di Heisenberg e di Schrödinger sono, sia in meccanica classica che in meccanica quantistica, completamente equivalenti ma concettualmente molto diverse. Nella formulazione di Schrödinger classica lo stato del sistema è specificato da una funzione densità dipendente dal tempo in accordo con l'equazione di Liouville, in quella quantistica lo stato del sistema dipende dal tempo in accordo con la (3.15). In entrambi i casi abbiamo definito un operatore temporale che agisce sullo stato facendolo ruotare. Nella formulazione di Heisenberg sia classica che quantistica lo stato del sistema è indipendente dal tempo e gli osservabili dipendono dal tempo in accordo con la (3.25).

## 3.4 Operatore densità

Quanto detto finora riguarda i casi in cui lo stato del sistema è definito assegnando una singola funzione d'onda. Questo stato corrisponde alla preparazione del sistema con la massima informazione possibile e abbiamo detto che la sua evoluzione è governata dall'equazione di Schrödinger. Il vettore di stato è adatto a descrivere solo quei sistemi di cui si conosca esattamente lo stato iniziale; questo formalismo mostra che, nonostante si abbia la massima informazione sul sistema, c'è sempre un aspetto probabilistico relativo alle predizioni sull'esito delle misure.

In questo paragrafo introdurremo un formalismo che permette di rappresentare in maniera unificata sia il caso di stati puri che il caso di stati miscela.

### 3.4 Operatore densità

---

Abbiamo già detto che uno stato puro può essere rappresentato attraverso un unico vettore di stato  $|\psi\rangle$ . Sappiamo che il vettore di stato si può esprimere come sovrapposizione di autostati di un generico osservabile. Sia  $A$  la grandezza che vogliamo osservare e  $\hat{A}$  l'operatore autoaggiunto ad essa associato.

Dalla (3.9) sappiamo che la probabilità che un'osservazione di  $A$  al tempo  $t$  fornisca il valore  $a_n$  è

$$P(a_n) = |c_n|^2 = \langle \psi | \alpha_n \rangle \langle \alpha_n | \psi \rangle \quad (3.26)$$

In generale, per il sistema nello stato  $|\psi\rangle$  il valor medio di un osservabile  $B$  è:

$$\langle \hat{B} \rangle = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle \quad (3.27)$$

dal momento che, nel caso di stati puri il valore di aspettazione coincide con il valor medio. Definiamo l'operatore di proiezione  $P_n = |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$  e riscriviamo la probabilità  $P(a_n)$  e il valore di aspettazione in termini di  $P_n$ :

$$P(a_n) = Tr(P_n |\psi\rangle\langle\psi|) \quad (3.28)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = Tr(\hat{B} |\psi\rangle\langle\psi|) \quad (3.29)$$

Entrambe le relazioni coinvolgono l'operatore  $|\psi\rangle\langle\psi|$  detto *operatore densità*:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (3.30)$$

Le relazioni precedenti possono essere riscritte nella forma

$$P(a_n) = Tr(P_n \hat{\rho}) \quad (3.31)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = Tr(\hat{B} \hat{\rho}) \quad (3.32)$$

Consideriamo adesso il caso in cui siano presenti componenti di incertezza non più legate soltanto al processo di misura quantistica del sistema, ma estrinseche ad esso, legate alla nostra impossibilità di conoscere sufficientemente lo stato del sistema. Supponiamo che il sistema si trovi in uno degli stati rappresentati dai vettori:

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j, \dots \quad (3.33)$$

rispettivamente con probabilità

$$p_1, p_2, \dots, p_j, \dots \quad (3.34)$$

dove naturalmente  $\sum_i p_i = 1$ .

Lo stato  $|\psi_i\rangle$  si scrive sempre come sovrapposizione degli autostati di  $\hat{A}$ :

$$|\psi_i\rangle = \sum_n c_n^i |\alpha_n^i\rangle \quad (3.35)$$

Di conseguenza, in questo caso, la probabilità che un'osservazione di  $A$  al tempo  $t$  fornisca il valore  $a_n$  è

$$P(a_n) = \sum_i p_i |c_n^i|^2 = \sum_i p_i \text{Tr} (P_n |\psi_i\rangle \langle \psi_i|), \quad (3.36)$$

mentre il valore medio di un operatore  $\hat{B}$  sarà:

$$\langle \hat{B} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{B} | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \text{Tr} (\hat{B} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \quad (3.37)$$

Quindi, anche nel caso degli stati miscela, sebbene non possiamo caratterizzare il sistema tramite un vettore  $|\psi\rangle$ , possiamo introdurre un operatore densità in termini del quale caratterizzare completamente il sistema

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (3.38)$$

In particolare si può dimostrare che la probabilità  $P(a_n)$  e il valore medio sono dati rispettivamente da

$$P(a_n) = \text{Tr} (P_n \hat{\rho}) \quad (3.39)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = \text{Tr} (\hat{B} \hat{\rho}) \quad (3.40)$$

L'operatore densità gode di alcune proprietà generali:

1.  $\hat{\rho}$  è autoaggiunto
2.  $\hat{\rho} \geq 0$

### 3.4 Operatore densità

---

3.  $Tr(\hat{\rho}) = 1$

4.  $Tr(\hat{\rho}^2) \leq 1$

Infine, nel caso degli stati puri  $\hat{\rho}$  ha particolari proprietà che possono essere dedotte direttamente dalla definizione (3.30):

1.  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$

2.  $Tr\hat{\rho}^2 = 1$

Nel prossimo paragrafo studieremo l'evoluzione temporale degli operatori densità, introducendo un analogo dell'equazione di Liouville classica.

#### 3.4.1 Evoluzione temporale degli operatori densità

Lo scopo di questo paragrafo è descrivere l'evoluzione temporale in meccanica quantistica attraverso un formalismo analogo alla meccanica classica. Abbiamo introdotto il formalismo dell'operatore densità come l'analogo del formalismo della funzione densità in meccanica classica, dove, abbiamo visto che l'evoluzione temporale nel caso di stati miscela è descritta dall'equazione di Liouville. Per studiare l'evoluzione temporale dell'operatore densità, dal momento che rappresenta uno stato, useremo la rappresentazione di Schrödinger. A partire dall'equazione di Schrödinger (3.15), deriveremo un'equazione di evoluzione per l'operatore densità analoga alla (2.48), che definiremo equazione di Liouville quantistica.

Consideriamo lo stato puro

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|; \quad (3.41)$$

Calcoliamo il complesso coniugato della (3.15) e otteniamo l'equazione di evoluzione di  $\langle\psi|$

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|\hat{H}^\dagger = \langle\psi(t)|\hat{H} \quad (3.42)$$

l'ultimo passaggio è dovuto all'autoaggiuntezza di  $\hat{H}$ .

Moltiplicando la (3.15) a destra per  $\langle\psi|$  e la (3.42) a sinistra per  $|\psi\rangle$  e sommando le due equazioni risultanti, si ottiene:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho} = (H|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|H) = -[\hat{\rho}, H] \quad (3.43)$$

Quindi l'evoluzione temporale dell'operatore  $\hat{\rho}(t)$  è

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -[\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (3.44)$$

In rappresentazione di coordinate l'equazione di Schrödinger è data dalla (3.19) e, di conseguenza, l'evoluzione di  $\hat{\rho}(t)$  è data da:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = -[\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (3.45)$$

Naturalmente quanto detto in relazione agli stati puri vale anche per stati miscela. Utilizzando la (3.38) e ripetendo l'analisi fatta per gli stati puri otteniamo

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \sum_i p_i \left( \hat{H}|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| - |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|\hat{H} \right) = -[\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (3.46)$$

Attraverso questo formalismo abbiamo derivato un'equazione di evoluzione temporale valida qualunque sia la nostra conoscenza sul sistema, sia nel caso di stati puri che nel caso di stati miscela.

## 3.5 Dalla Meccanica Classica alla Meccanica Quantistica

In meccanica quantistica posizioni e momenti diventano operatori che non commutano su uno spazio di Hilbert. Ora gli osservabili non sono più funzioni su una varietà, ma operatori autoaggiunti sullo spazio di Hilbert. Uno stato non è più un punto nello spazio delle fasi ma una matrice densità che può essere vista come una mappa da osservabili in numeri reali.

### 3.5 Dalla Meccanica Classica alla Meccanica Quantistica

---

La quantizzazione di un sistema classico si può fare attraverso il *principio di corrispondenza*, il quale associa ad ogni osservabile classico  $f$  un operatore  $\hat{f}$  sullo spazio di Hilbert con la richiesta che la parentesi di Poisson sia rimpiazzata dal commutatore:

$$\{f, g\} \mapsto -\frac{i}{\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (3.47)$$

Per le funzioni coordinate la corrispondenza è semplicemente

$$q \mapsto \hat{q} = q \quad (3.48)$$

$$p \mapsto \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \quad (3.49)$$

La conseguenza di questa relazione è la non commutatività di posizione e momento:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (3.50)$$

che conduce al principio di Indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.51)$$

Attraverso il principio di corrispondenza si può scrivere l'equazione del moto degli operatori che abbiamo ricavato nella descrizione di Heisenberg.

A partire dall'equazione del moto in meccanica classica

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.52)$$

applicando il principio di corrispondenza, cioè sostituendo alla funzione  $f$  l'operatore  $\hat{f}$  e alla parentesi di Poisson il commutatore si ha:

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{f}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \quad (3.53)$$

Il principio di corrispondenza, tuttavia, è piuttosto problematico. Uno dei problemi più rilevanti risiede nel fatto che presenta un'ambiguità. Consideriamo ad esempio la funzione classica  $p^2q$ . Ad essa corrispondono diversi operatori quantistici:  $\hat{p}^2\hat{q}$ ,  $\hat{p}\hat{q}\hat{p}$ ,  $\hat{q}\hat{p}^2$  e le combinazioni lineari.

Nel paragrafo successivo studieremo le mappe che portano osservabili classici in operatori quantistici per superare i problemi connessi al principio di corrispondenza.

## 3.6 Mappe di Quantizzazione

In questo paragrafo stabiliremo una connessione tra spazio delle fasi classico e quantistico almeno per quei sistemi che hanno una ben definita controparte classica. Vogliamo associare ad ogni osservabile classico uno e un solo operatore su  $\mathcal{H}$ . Cominciamo col definire una mappa di quantizzazione generica.

Dato un operatore  $\hat{A}$  su  $\mathcal{H}$ , consideriamo un set di operatori  $\hat{U}(\bar{x})$  su  $\mathcal{H}$  dove  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ . La funzione corrispondente all'operatore  $\hat{A}$ , che chiameremo *simbolo*, è definita in [2] dalla seguente formula

$$f_{\hat{A}}(\bar{x}) = Tr \left[ \hat{A} \hat{U}(\bar{x}) \right] \quad (3.54)$$

L'operatore  $\hat{U}(\bar{x})$  definisce la mappa da operatori quantistici a funzioni sullo spazio delle fasi, e per questo motivo verrà chiamato *dequantizer*. Supponiamo che la relazione (3.54) abbia un inverso, cioè supponiamo esista una famiglia di operatori  $\hat{D}(\bar{x})$  agenti sullo spazio di Hilbert tale che:

$$\hat{A} = \int f_{\hat{A}}(\bar{x}) \hat{D}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.55)$$

$$Tr \hat{A} = \int f_{\hat{A}}(\bar{x}) Tr \hat{D}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.56)$$

L'operatore  $\hat{D}(\bar{x})$  verrà chiamato *quantizer*.

Queste relazioni definiscono una mappa invertibile dall'operatore  $\hat{A}$  nella funzione  $f_{\hat{A}}$ . Moltiplicando entrambi i membri della (3.55) per l'operatore  $\hat{U}(\bar{x}')$  e facendone la traccia, otteniamo la relazione di consistenza soddisfatta dagli operatori  $\hat{U}(\bar{x})$  e  $\hat{D}(\bar{x})$ :

$$Tr[\hat{U}(\bar{x}') \hat{D}(\bar{x})] = \delta(\bar{x}' - \bar{x}) \quad (3.57)$$

Se si definisce una mappa in modo che il simbolo dell'operatore identità  $\mathbf{1}$  sia la funzione unità, allora il dequantizer  $\hat{U}(\bar{x})$  soddisfa

$$Tr \hat{U}(\bar{x}) = 1 \quad (3.58)$$

### 3.6 Mappe di Quantizzazione

---

e il quantizer  $\hat{D}(\bar{x})$  soddisfa

$$\int \hat{D}(\bar{x}) d\bar{x} = 1; \quad (3.59)$$

in questo modo non ci sono ambiguità nella definizione di  $\hat{U}(\bar{x})$  e  $\hat{D}(\bar{x})$ .

Attraverso questa mappa possiamo descrivere gli osservabili quantistici in termini di funzioni classiche. Ciò che cambia è l'algebra, che non sarà più quella associata al prodotto puntuale, come in meccanica classica, ma un'algebra associativa con un prodotto  $\star$  non commutativo derivato dal prodotto tra operatori:

$$f_{\hat{A}\hat{B}}(\bar{x}) = f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}} := Tr[\hat{A}\hat{B}\hat{U}(\bar{x})] \quad (3.60)$$

L'associatività del prodotto  $\star$

$$f_{\hat{A}} \star (f_{\hat{B}} \star f_{\hat{C}}) = (f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}}) \star f_{\hat{C}} \quad (3.61)$$

è garantita dall'associatività del prodotto standard di operatori di  $\mathcal{H}$ , cioè  $\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$ .

Il commutatore associato al prodotto  $\star$  sarà

$$[f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}] = f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}} - f_{\hat{B}} \star f_{\hat{A}} \quad (3.62)$$

#### 3.6.1 Mappa di Weyl-Wigner

La mappa che useremo per risolvere le ambiguità relative al principio di corrispondenza è la mappa di Weyl-Wigner. Questa mappa ha numerosi vantaggi utili per la descrizione della meccanica quantistica. Innanzitutto si può vedere che il quantizer e il dequantizer sono uguali a meno di una costante, inoltre questa mappa trasforma funzioni reali in operatori autoaggiunti e funzioni di  $L^2$  in operatori di Hilbert-Schmidt.

Dato un operatore  $\hat{A}$  che agisce nello spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato integrabile  $\psi(x)$  su  $\mathbb{R}$ , il simbolo di Weyl-Wigner di  $\hat{A}$  e la mappa di ricostruzione sono definite attraverso le famiglie di operatori

$$\hat{U}(\bar{x}) = 2\hat{\mathcal{D}}(z)(-\hat{1})^{a^\dagger a}\hat{\mathcal{D}}(-z) \quad (3.63)$$

$$\hat{D}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi}\hat{U}(\bar{x}) \quad (3.64)$$

### 3. Evoluzione Temporale in Meccanica Quantistica

---

dove  $(-\hat{1})^{a^\dagger a}$  è l'operatore di parità e  $\mathcal{D}(z)$  l'operatore unitario di spostamento con  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$

Possiamo usare una notazione simplettica per il vettore reale e scrivere  $\bar{x} = (q, p)$  dove le variabili  $q$  e  $p$  sono variabili adimensionali. Gli operatori di creazione e distruzione  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  sono

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p}) \quad (3.65)$$

e vale  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = i\hbar$ . L'operatore unitario di spostamento, che realizza una rappresentazione del gruppo delle traslazioni del piano, può essere scritto nella forma:

$$\hat{\mathcal{D}}(z) = \exp(z\hat{a}^\dagger - z^* \hat{a}) \quad (3.66)$$

Usando le seguenti proprietà dell'operatore  $\hat{\mathcal{D}}(z)$

$$\hat{\mathcal{D}}(-z) = (-\hat{1})^{a^\dagger a} \hat{\mathcal{D}}(z) (-\hat{1})^{a^\dagger a} \quad (3.67)$$

$$Tr \hat{\mathcal{D}}(z) = \pi \delta(\Re(z)) \delta(\Im(z)) \quad (3.68)$$

si può verificare che il quantizer e il dequantizer, nella mappa di Weyl, soddisfano la relazione di consistenza (3.57), che nel caso esplicito è

$$Tr \hat{U}_{(q,p)} \hat{\mathcal{D}}_{(q',p')} = \delta(q - q') \delta(p - p') \quad (3.69)$$

La funzione corrispondente all'operatore  $\hat{A}$  si chiama *simbolo di Weyl* dell'operatore  $\hat{A}$  ed è

$$f_{\hat{A}}(q, p) = Tr \left( \hat{U}(q, p) \hat{A} \right) \quad (3.70)$$

che, come si può vedere in [1], in rappresentazione di coordinate diventa

$$f_{\hat{A}}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int du \hat{A} \left( q + \frac{u}{2}, p - \frac{u}{2} \right) e^{-\frac{ipu}{\hbar}} \quad (3.71)$$

con  $\hat{A}(x, x') = \langle x | \hat{A} | x' \rangle$ .

Uno dei vantaggi di questa mappa sta nel fatto che il simbolo di Weyl dell'operatore identità è  $f_1(q, p) = 1$  dove 1 è l'identità nell'algebra delle funzioni su  $\mathbb{R}^2$ , mentre i simboli di Weyl di posizione e momento sono  $f_{\hat{q}}(q, p) = q$ ,  $f_{\hat{p}}(q, p) = p$ .

### 3.6 Mappe di Quantizzazione

---

L'operatore  $\hat{A}$  può essere espresso in termini del suo simbolo di Weyl attraverso la formula di ricostruzione

$$\hat{A} = \frac{1}{\pi} \int f_{\hat{A}}(q, p) \hat{\mathcal{D}}(z) (-\hat{1})^{a^\dagger a} \hat{\mathcal{D}}(-z) dq dp \quad (3.72)$$

La mappa così costruita porta il nome di *mappa di Weyl*. Si può verificare, calcolando esplicitamente l'operatore corrispondente a funzioni che presentano ambiguità di ordinamento, come  $pq^2$ , che l'ordinamento prescritto dalla mappa di Weyl è quello simmetrico. Altri ordinamenti sono possibili, per esempio quello normale o antinormale e corrispondono a leggere modifiche nella mappa (3.72). La costruzione di una mappa di quantizzazione può essere usata per riscrivere la meccanica quantistica in termini di osservabili classici attraverso la definizione (3.60) di un nuovo prodotto di funzioni sullo spazio delle fasi. In questo modo la meccanica quantistica è vista come una deformazione della meccanica classica, nel senso che i risultati classici sono ritrovati nel limite  $\hbar \rightarrow 0$ .

Usando la mappa di Weyl possiamo definire un prodotto deformato dalla (3.60), chiamato *prodotto di Grönewold-Moyal* [5]:

$$f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}} := e^{\left(\frac{i\hbar}{2} \epsilon^{ij} \partial_{\omega^i} \partial_{\omega'^j}\right)} f_{\hat{A}}(\omega) f_{\hat{B}}(\omega') \Big|_{\omega=\omega'} \quad (3.73)$$

dove  $\omega = (q, p)$  e  $\epsilon^{ij}$  è il tensore di Poisson (2.24). Il prodotto di Moyal è un prodotto associativo e non commutativo, cioè  $f \star g \neq g \star f$ . Inoltre, sviluppandolo in termini di  $\hbar$  si ha

$$f_{\hat{A}}(\omega) \star f_{\hat{B}}(\omega) = f_{\hat{A}}(\omega) f_{\hat{B}}(\omega) + \frac{i\hbar}{2} \{f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}\} + \dots = f_{\hat{A}}(\omega) f_{\hat{B}}(\omega) + o(\hbar) \quad (3.74)$$

Il prodotto ottenuto dalla mappa di Weyl è perciò una deformazione del prodotto puntuale tra funzioni. Di conseguenza possiamo affermare che attraverso questa mappa abbiamo deformato l'algebra commutativa degli osservabili sullo spazio delle fasi in un'algebra non commutativa con parametro  $\hbar$ .

Dotiamo quest'algebra di una struttura di commutatore, che chiameremo *parentesi di Moyal*:

$$[f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}]_{\star} = f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}} - f_{\hat{B}} \star f_{\hat{A}} \quad (3.75)$$

L'algebra costruita soddisfa le stesse regole degli operatori posizione e momento, infatti

$$[f_{\hat{q}}, f_{\hat{p}}]_{\star} = i\hbar \quad (3.76)$$

#### 3.6.2 Simbolo di Wigner

Consideriamo in particolare l'operatore densità  $\hat{\rho}$  di uno stato normalizzato e calcoliamone il simbolo di Weyl:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \rho \left( q + \frac{u}{2}, p - \frac{u}{2} \right) e^{-\frac{ipu}{\hbar}} du \quad (3.77)$$

Questa funzione è chiamata *simbolo* o *funzione di Wigner*. La distribuzione di probabilità (o, più precisamente, di quasi probabilità) di Wigner è stata introdotta nel 1932 [6]. Wigner suggerì una rappresentazione della meccanica quantistica attraverso distribuzioni di probabilità per coordinate e momenti sullo spazio delle fasi. Vedremo che, attraverso questa rappresentazione si può riscrivere la meccanica quantistica in termini di perturbazione della meccanica classica. Il simbolo di Wigner, tuttavia, non soddisfa tutte le proprietà di una distribuzione di probabilità convenzionale in quanto può assumere valori negativi; per questo motivo diciamo che è una distribuzione di quasi probabilità.

In meccanica classica lo stato di un sistema può essere descritto da un punto sullo spazio delle fasi, che abbiamo definito stato puro, oppure da una funzione di probabilità  $\rho(p, q)$  e lo abbiamo definito stato miscela. Ricordiamo che l'aspetto probabilistico, in questo caso, emerge solo a causa di una conoscenza incompleta sul sistema.

In meccanica quantistica, invece, uno stato puro è rappresentato attraverso un solo vettore di stato o attraverso l'operatore  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ , mentre uno stato miscela si rappresenta solo attraverso l'operatore densità  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ .

Consideriamo lo stato puro  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ : dalla definizione (3.77) segue che uno stato puro nella rappresentazione di Wigner è una distribuzione di quasi

### 3.7 Stati coerenti

---

probabilità. Ciò significa che, ad uno stato puro quantistico, la mappa di Weyl-Wigner associa ad uno stato miscela classico.

È interessante notare che, oltre alla relazione di indeterminazione standard, la funzione di Wigner soddisfa anche un'altra limitazione. Si può vedere, per esempio in [3], che essa è limitata dalla condizione  $|W(q, p)| \leq (\pi\hbar)^{-1}$  per ogni  $q$  e  $p$ . Questo significa che le regioni di valori negativi sono piccole: non possono estendersi a regioni più grandi di  $\hbar$  e quindi scompaiono nel limite classico. Inoltre il principio di indeterminazione non permette una localizzazione nello spazio delle fasi più precisa di  $\hbar$  e quindi rende le probabilità negative meno paradossali.

La formula di ricostruzione (3.72) applicata all'operatore densità, permette di ricostruire l'operatore densità a partire dal simbolo di Wigner. In coordinate sarà

$$\hat{\rho}(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int W\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) e^{\frac{ip(x-x')}{\hbar}} dp \quad (3.78)$$

Dal momento che l'aspetto più problematico del simbolo di Wigner è il fatto che può assumere valori negativi, nel prossimo paragrafo analizzeremo più in dettaglio questo problema e le sue eccezioni.

### 3.7 Stati coerenti

Abbiamo detto che il simbolo di Wigner non è una distribuzione di probabilità dal momento che in generale non è definito positivo. Per questo motivo il simbolo di Wigner viene chiamato distribuzione di quasi probabilità. Tuttavia vedremo che esistono stati quantistici la cui funzione di Wigner è definita positiva.

Si può dimostrare che, [3], condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione di Wigner di uno stato puro sia non negativa, è che sia relativa ad una funzione d'onda della forma:

$$\psi_{t,u}(q) = \exp\left[-\frac{1}{2}(tq^2 + 2uq + v)\right], \quad \Re(t) > 0 \quad t, u, v \in \mathbb{C} \quad (3.79)$$

### 3. Evoluzione Temporale in Meccanica Quantistica

---

La dimostrazione che la condizione sia sufficiente è banale: infatti la funzione di Wigner  $W_{t,u}$  corrispondente allo stato (3.79) è una distribuzione gaussiana di coordinate e momenti ed è quindi definita positiva.

Notiamo che per  $t^* = t$  cioè  $\Im(t) = 0$  la funzione d'onda (3.79) descrive uno *stato coerente*  $|z\rangle$ , il quale è autofunzione dell'operatore di annichilazione  $\hat{b} = \frac{\hat{q}}{2l} + il\hat{p}$

$$\hat{b}|z\rangle = z|z\rangle \quad (3.80)$$

con  $l = (2\Re(t))^{-\frac{1}{2}}$ .

Nel caso in cui  $\Re(t) = 1$  si ottiene  $\hat{b} = \hat{a}$  definito nella (3.65) e lo stato coerente corrispondente è

$$\psi(q) = \exp \left[ -\frac{1}{2}(q^2 - 2zq + z^2) \right] \quad (3.81)$$

Dal momento che  $\hat{a}$  è un operatore non autoaggiunto, l'autovalore  $z$  è complesso e può essere rappresentato come  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_z + ip_z)$ .

Gli stati  $|z\rangle$  costituiscono un insieme di pacchetti di onde di minima indeterminazione, cioè

$$(\Delta q)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (3.82)$$

indipendentemente dal valore  $z$  considerato. Lo stato coerente evolve nel tempo rimanendo stato coerente, cioè autostato di  $\hat{a}$ , ovviamente con autovalore diverso. Siccome la struttura di stato coerente non cambia nel tempo, segue che le relazioni di indeterminazione rimangono invariate, quindi lo stato coerente non si allarga.

Calcoliamo la funzione di Wigner relativa all'operatore  $\rho = |z\rangle\langle z|$  (il calcolo in dettaglio è nell'Appendice B).

Il simbolo di Wigner, scritto per comodità in variabili adimensionali, è

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \rho \left( q + \frac{u}{2}, p - \frac{u}{2} \right) e^{-ipu} du \quad (3.83)$$

dove  $\rho_z$  è il valore di aspettazione

$$\rho_z = \left\langle q + \frac{u}{2} \middle| z \right\rangle \langle z \middle| q - \frac{u}{2} \rangle \quad (3.84)$$

### 3.8 Evoluzione temporale dei Simboli di Weyl

---

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \exp [-(q_z - q)^2 - (p_z - p)^2] \quad (3.85)$$

che, come predetto, è una distribuzione gaussiana. Nel caso generale, se lo stato iniziale di un sistema è descritto da una funzione d'onda della forma (3.79), tale che la funzione di Wigner sia definita positiva, allora nel corso del tempo la funzione  $W(q, p)$  non rimane una gaussiana e di conseguenza prende valori negativi. Un'eccezione è il caso in cui l'Hamiltoniana del sistema sia quadratica. In questo caso la proprietà di non negatività della funzione di Wigner è preservata nel tempo.

### 3.8 Evoluzione temporale dei Simboli di Weyl

Il nostro scopo adesso sarà di definire l'evoluzione temporale sulle funzioni associate dalla mappa di Weyl agli osservabili quantistici appena definite. In questo modo potremo fare un confronto diretto tra l'evoluzione temporale, su una stessa funzione, nel caso classico e nel caso quantistico e vedere la meccanica quantistica come deformazione della meccanica classica.

In meccanica classica l'evoluzione temporale di una funzione  $f(\omega) = f(q, p)$ , non dipendente esplicitamente dal tempo, è data da

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad (3.86)$$

mentre l'evoluzione di una densità di probabilità  $\rho(\omega) = \rho(q, p)$  è data dall'equazione di Liouville

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\} \quad (3.87)$$

Possiamo concludere che la struttura che definisce l'evoluzione in meccanica classica è la parentesi di Poisson.

In meccanica quantistica l'evoluzione temporale può essere equivalentemente calcolata facendo ruotare lo stato, nel formalismo alla Schrödinger, o facendo ruotare l'operatore, nel formalismo alla Heisenberg.

### 3. Evoluzione Temporale in Meccanica Quantistica

---

Ricordiamo che, nella descrizione di Heisenberg, l'equazione del moto è stata ottenuta con delle considerazioni fatte a partire dall'operatore di evoluzione temporale di Schrödinger ed è, per operatori che non dipendono esplicitamente dal tempo,

$$i\hbar \frac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{f}, \hat{H}] \quad (3.88)$$

Anche in meccanica quantistica abbiamo definito un'equazione di Liouville per la descrizione dell'evoluzione dell'operatore densità:

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = -[\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (3.89)$$

Di conseguenza possiamo concludere che la struttura che definisce l'evoluzione in meccanica quantistica è il commutatore tra operatori.

Agli stessi risultati si perviene attraverso considerazioni puramente geometriche. Dato un sistema a  $n$  gradi di libertà  $\dot{x} = F(x)$  la derivata di una funzione  $f(x)$  lungo una soluzione  $x(t)$  è la derivata direzionale di  $f$  lungo il campo vettoriale

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \nabla f \cdot F(x) := \mathcal{L}f(x) \quad (3.90)$$

L'operatore  $\mathcal{L}$  si chiama derivata di Lie.

Quindi date l'Hamiltoniana e le soluzioni del moto  $x(t) = (q(t), p(t))$ , l'evoluzione temporale di una funzione, che è la variazione della funzione lungo le soluzioni del moto, sarà data da:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \mathcal{L}_H f(x) = \nabla f \cdot \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (3.91)$$

l'ultimo membro di questa relazione è proprio la parentesi di Poisson canonica tra la funzione  $f$  e l'Hamiltoniana  $H$ , quindi

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad (3.92)$$

In generale possiamo costruire la derivata di Lie a partire dalla definizione di algebra di Lie (Appendice A). Data un'algebra associativa possiamo costruire un'algebra di Lie attraverso la seguente definizione:

$$[f, g] = f \cdot g - g \cdot f \quad (3.93)$$

### 3.8 Evoluzione temporale dei Simboli di Weyl

---

La derivata di Lie è proprio

$$\mathcal{L}_g(f) = [f, g] \quad (3.94)$$

Perciò, in meccanica quantistica, dal momento che il prodotto tra operatori è associativo, possiamo costruire un'algebra di Lie attraverso la definizione del commutatore  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ , che quindi sarà la struttura che descrive l'evoluzione temporale.

Ora vogliamo definire la struttura che descrive l'evoluzione temporale sulle funzioni corrispondenti agli osservabili quantistici.

L'algebra costruita con la definizione delle parentesi di Moyal (3.75) quindi è un'algebra di Lie e, per quanto detto, la derivata di Lie sarà

$$\mathcal{L}_{f_{\hat{B}}}(f_{\hat{A}}) = [f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}]_{\star} \quad (3.95)$$

La struttura che definisce l'evoluzione temporale di osservabili quantistici in termini di funzioni classiche è la parentesi di Moyal.

Consideriamo il simbolo di Weyl di un generico osservabile  $A$ . Abbiamo visto che, in meccanica quantistica, gli osservabili evolvono in accordo all'equazione di Heisenberg (3.25). Il simbolo di questa equazione è

$$i\hbar \frac{df_{\hat{A}}}{dt} = [f_{\hat{A}}, H]_{\star} \quad (3.96)$$

che chiameremo *equazione di Moyal*.

Il simbolo di Wigner, invece, è la funzione associata all'operatore densità che evolve in accordo all'equazione di Schrödinger in rappresentazione di coordinate (3.45). Di conseguenza l'equazione di Moyal per il simbolo di Wigner sarà

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = -[W, H]_{\star} \quad (3.97)$$

Notiamo che questa equazione descrive l'evoluzione di una distribuzione di probabilità e per questo motivo la chiameremo *equazione di Liouville quantistica*.

### 3. Evoluzione Temporale in Meccanica Quantistica

---

Sostituendo l'espressione esplicita del prodotto di Moyal (3.73) posso scrivere la parentesi di Moyal come

$$[f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}]_{\star} = \sum_n \frac{1}{n!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n [\epsilon^n(f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}) - \epsilon^n(f_{\hat{B}}, f_{\hat{A}})]. \quad (3.98)$$

dove  $\epsilon^n = (\epsilon^{ij} \partial_{\omega^i} \partial_{\omega^j})^n$ . Sviluppriamo ai primi ordini in  $\hbar$ :

$$[f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}]_{\star} = \frac{i\hbar}{2} [\epsilon(f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}) - \epsilon(f_{\hat{B}}, f_{\hat{A}})] + o(\hbar^3) = i\hbar \{f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}\} + o(\hbar^3) \quad (3.99)$$

e riscriviamo l'equazione di Moyal (3.96) in termini espliciti:

$$\frac{df_{\hat{A}}}{dt} = \{f_{\hat{A}}, H\} + o(\hbar^2) \quad (3.100)$$

Analogamente l'equazione di Moyal per il simbolo di Wigner (3.97) diventa

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = -\{W, H\} + o(\hbar^2) \quad (3.101)$$

Attraverso la definizione del prodotto di Moyal abbiamo riscritto la meccanica quantistica in termini di osservabili classici, e, analogamente, attraverso la definizione delle parentesi di Moyal abbiamo riscritto l'evoluzione temporale quantistica in termini di funzioni sullo spazio delle fasi. In questo modo, la meccanica quantistica può essere vista come deformazione della meccanica classica. Infatti la (3.100) mostra come, nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  ritroviamo la parentesi di Poisson e quindi i risultati della meccanica classica. Inoltre attraverso questo formalismo il confronto tra evoluzione classica ed evoluzione quantistica sarà immediato.

D'ora in poi useremo sempre variabili adimensionali, nei termini delle quali l'equazione di Moyal diventa

$$\frac{df_{\hat{A}}}{dt} = \frac{1}{i} [f_{\hat{A}}, H]_{\star} \quad (3.102)$$

Nel prossimo capitolo risolveremo, in particolare, l'equazione di Liouville quantistica di uno stato coerente

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{i} [W, H]_{\star} \quad (3.103)$$

e confronteremo la sua evoluzione con quella descritta dall'equazione di Liouville classica.

# Capitolo 4

## Potenziale Quartico

*“Se credete di aver capito la teoria dei quanti,  
vuol dire che non l'avete capita.”*

*R. Feynman*

Lo scopo di questo capitolo è il confronto tra l'evoluzione temporale classica e quantistica. Abbiamo visto che, in generale, osservabili classici e osservabili quantistici sono descritti da oggetti matematici diversi. In questo capitolo, invece, useremo un formalismo in cui ogni concetto fisico sia descritto da oggetti della stessa categoria matematica in entrambe le teorie, in modo da rendere più agevole il confronto.

In particolare, stati e osservabili saranno realizzati attraverso i simboli di Wigner definiti nel capitolo precedente. In questo modo possiamo leggere la meccanica quantistica come una perturbazione della meccanica classica in termini della costante di Planck.

Ci occuperemo dell'evoluzione temporale del simbolo di Wigner associato ad uno stato coerente che, come abbiamo visto, è una distribuzione gaussiana. Il potenziale scelto per lo studio dell'evoluzione è un potenziale quartico in  $q$ .

La scelta dello stato coerente è dettata dal fatto che il simbolo di Wigner ad esso associato è una funzione definita positiva, quindi ha senso fisico anche in meccanica classica, dove rappresenta uno stato miscela classico.

L'evoluzione temporale di uno stato miscela in meccanica classica è descritta dall'equazione di Liouville; vedremo che, la soluzione di questa equazione è molto semplice. L'evoluzione temporale del simbolo di Wigner in meccanica quantistica, invece, è descritta dall'equazione di Moyal la cui soluzione non è altrettanto semplice. Per questo motivo deriveremo, a partire dall'equazione di Schrödinger, un'analogo quantistico dell'equazione di Liouville che risolveremo scrivendo la soluzione in termini di un'equazione integrale pura.

## 4.1 Dinamica

Nel capitolo precedente abbiamo anticipato che, in generale, se lo stato iniziale di un sistema quantistico è descritto da una gaussiana, nel corso del tempo la funzione non rimane gaussiana ed in particolare assume valori negativi. Un'eccezione è il caso in cui l'Hamiltoniana del sistema è quadratica. In questo caso, infatti, la proprietà di non negatività della funzione di Wigner è preservata nel tempo. La comprensione di questa eccezione ci guiderà nella scelta di una dinamica adatta al confronto tra evoluzione classica e quantistica.

Consideriamo il caso dell'oscillatore armonico e confrontiamo le equazioni di evoluzione nelle due teorie.

In meccanica classica l'evoluzione temporale di una densità di probabilità è descritta dall'equazione di Liouville

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\{W, H\} = -\frac{\partial W}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial W}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \quad (4.1)$$

In meccanica quantistica il simbolo di Wigner evolve in accordo all'equazione di Moyal

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{i} [W, H]_{\star} = -\frac{1}{i} (W \star H - H \star W) \quad (4.2)$$

Nel capitolo precedente abbiamo mostrato che la parentesi di Moyal può

## 4.1 Dinamica

---

essere riscritta come

$$\begin{aligned}
 [f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}]_{\star} &= i \{f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}\} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^2 [\epsilon^2(f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}) - \epsilon^2(f_{\hat{B}}, f_{\hat{A}})] + \\
 &+ \frac{1}{6} \left(\frac{i}{2}\right)^3 [\epsilon^3(f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}) - \epsilon^3(f_{\hat{B}}, f_{\hat{A}})] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove  $\epsilon = \epsilon^{ij} \partial_{\omega^i} \partial_{\omega'^j}$  e  $\epsilon^{ij}$  è il tensore di Poisson, definito nel Capitolo 1

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu, \nu \leq k \text{ e } \mu, \nu > k \\ 1 & \text{se } \mu \leq k \\ -1 & \text{se } \nu \leq k \end{cases} \tag{4.4}$$

Dal momento che è un tensore antisimmetrico, in questa espansione sopravvivono solo i termini di potenza dispari:

$$[f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}]_{\star} = i \{f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}\} + \frac{1}{6} \left(\frac{i}{2}\right)^3 [\epsilon^3(f_{\hat{A}}, f_{\hat{B}}) - \epsilon^3(f_{\hat{B}}, f_{\hat{A}})] + \dots \tag{4.5}$$

Riscriviamo in questi termini l'equazione di Moyal (4.2):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \{W, H\} - \frac{1}{6i} \left(\frac{i}{2}\right)^3 [\epsilon^3(W, H) - \epsilon^3(H, W)] + \dots \tag{4.6}$$

Di conseguenza ci aspettiamo che la soluzione dell'equazione di Moyal sia la somma della soluzione classica e di un termine perturbativo.

Nel caso dell'oscillatore armonico, l'equazione di Moyal risulta uguale a quella classica, infatti

$$[W, H_{osc}]_{\star} = i \{W, H_{osc}\} + \frac{1}{6} \left(\frac{i}{2}\right)^3 [\epsilon^3(W, H_{osc}) - \epsilon^3(H_{osc}, W)] + \dots \tag{4.7}$$

e poiché

$$\begin{aligned}
 [\epsilon^3(W, H_{osc}) - \epsilon^3(H_{osc}, W)] &= 2 \frac{\partial^3 W}{\partial q^3} \frac{\partial^3 H_{osc}}{\partial p^3} - 2 \frac{\partial^3 W}{\partial p^3} \frac{\partial^3 H_{osc}}{\partial q^3} + \\
 &+ 6 \frac{\partial^3 W}{\partial q \partial p^2} \frac{\partial^3 H_{osc}}{\partial q^2 \partial p} - 6 \frac{\partial^3 W}{\partial p \partial q^2} \frac{\partial^3 H_{osc}}{\partial p^2 \partial q}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

le derivate terze agenti su  $H_{osc} = \frac{p^2}{2} + q^2$  si annullano. Per cui in definitiva abbiamo che in questo caso l'equazione di Liouville e l'equazione di Moyal coincidono. Di conseguenza la gaussiana nel corso del tempo non si deforma e non assume valori negativi, come anticipato, perché evolve come in meccanica classica.

Quindi per poter evidenziare le differenze tra l'evoluzione classica e l'evoluzione quantistica dobbiamo scegliere un'Hamiltoniana  $H = \frac{p^2}{2} + V(q)$  dove il potenziale sia tale che il termine perturbativo sopravviva, quindi almeno una potenza  $q^3$ . Il potenziale  $V(q) = q^3$  è piuttosto problematico perché non limitato inferiormente

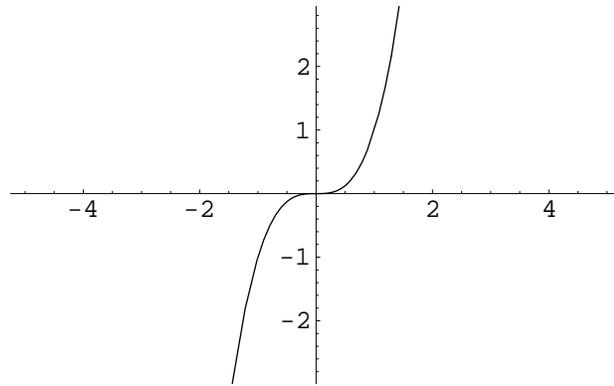


Figura 4.1: *Potenziale Cubico*

## 4.1 Dinamica

---

Per questo motivo abbiamo scelto  $V(q) = q^4$  che, come mostra il grafico:

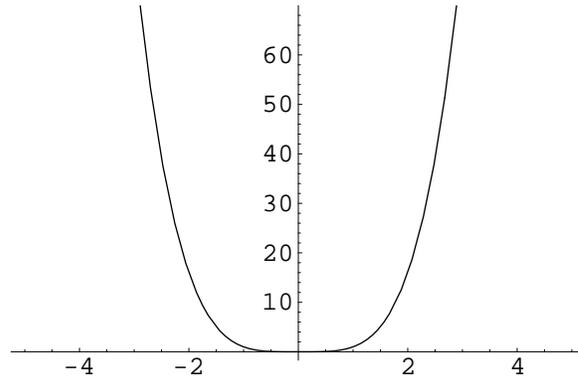


Figura 4.2: *Potenziale Quartico*

è limitato inferiormente. Questo potenziale avrà, come nel caso dell'oscillatore armonico, orbite periodiche.

In definitiva, l'Hamiltoniana scelta è

$$H = \frac{p^2}{2m} + kq^4 \quad (4.9)$$

che, riscritta nelle variabili adimensionali,

$$\alpha x = k^{\frac{1}{4}} \hbar^{-\frac{1}{4}} x \rightarrow x \quad (4.10)$$

$$\beta p = \hbar^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} p \rightarrow p \quad (4.11)$$

$$\gamma H = \hbar^{\frac{3}{4}} m^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{4}} H \rightarrow H \quad (4.12)$$

diventa

$$H = \frac{p^2}{2} + q^4 \quad (4.13)$$

Studiamo la dinamica ad essa associata. Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad (4.14)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -4q^3 \quad (4.15)$$

da cui otteniamo un'equazione differenziale non lineare

$$\ddot{q} + q^3 = 0 \tag{4.16}$$

La soluzione di questa equazione è:

$$q(t) = \sqrt[4]{2a} SN \left[ -\frac{u(a, b, t)}{\sqrt{2}}, -1 \right] \tag{4.17}$$

che, sostituita in  $\dot{q} = p$  dà:

$$p(t) = -\frac{\sqrt[4]{a} (2\sqrt{2ab} + 2\sqrt{2at}) CN \left[ -\frac{u(a, b, t)}{\sqrt{2}}, -1 \right] DN \left[ -\frac{u(a, b, t)}{\sqrt{2}}, -1 \right]}{2^{\frac{5}{4}} u(a, b, t)} \tag{4.18}$$

dove abbiamo definito

$$u(a, b, t) = \sqrt{\sqrt{2at^2} + 2\sqrt{2t}\sqrt{ab} + \sqrt{2ab^2}} \tag{4.19}$$

Le funzioni  $SN$ ,  $CN$ ,  $DN$  sono funzioni di Jacobi (appendice A.3). I coefficienti  $a$  e  $b$  sono soluzioni del sistema

$$q(0) = \sqrt[4]{2a} SN \left[ -\frac{u(a, b, 0)}{\sqrt{2}}, -1 \right] \tag{4.20}$$

$$p(0) = -\frac{\sqrt[4]{a} (2\sqrt{2ab}) CN \left[ -\frac{u(a, b, 0)}{\sqrt{2}}, -1 \right] DN \left[ -\frac{u(a, b, 0)}{\sqrt{2}}, -1 \right]}{2^{\frac{5}{4}} u(a, b, 0)} \tag{4.21}$$

Risolviamo questo sistema per un punto e sostituiamo i valori ottenuti per  $a$  e  $b$  in  $q(t)$  e  $p(t)$ . Usando il tempo come parametro possiamo vedere l'orbita che percorre un punto:

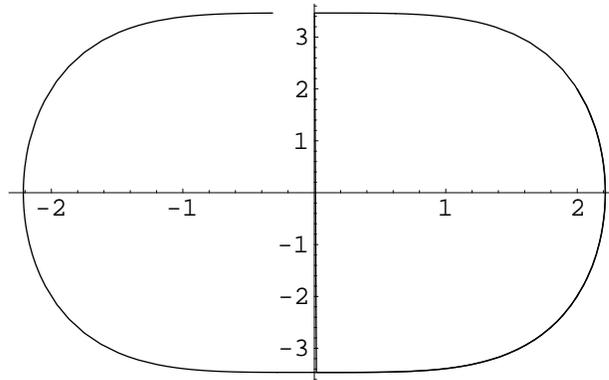


Figura 4.3: *Orbita per  $t$  da 0 a 4*

Abbiamo fatto variare il parametro  $t$  in un intervallo  $(0, 4)$  in corrispondenza al dato iniziale  $(2, 2)$  e si vede che l'orbita non è ancora chiusa. Per questo motivo possiamo affermare che il periodo sarà circa  $T \approx 4$ .

## 4.2 Evoluzione Classica

Nel capitolo precedente abbiamo calcolato il simbolo di Wigner associato all'operatore densità  $\hat{\rho} = |z\rangle\langle z|$  dove  $|z\rangle$  è uno stato coerente. Il risultato ottenuto è una distribuzione di probabilità gaussiana (3.85) che, in meccanica classica rappresenta uno stato miscela. In questo paragrafo ci occuperemo dell'evoluzione temporale, in meccanica classica, di questo stato.

In meccanica classica abbiamo visto che l'evoluzione temporale, nel caso di conoscenza incompleta del sistema, può essere descritta attraverso due formalismi, il formalismo di Heisenberg e il formalismo di Schrödinger. Nel formalismo di Heisenberg lo stato del sistema è definito da una funzione densità indipendente dal tempo e l'operatore di evoluzione temporale agisce direttamente sugli osservabili. Nel formalismo di Schrödinger lo stato del sistema è specificato da una funzione densità dipendente dal tempo in accordo con l'equazione di Liouville (4.1). Dal momento che siamo interessati all'evoluzione dello stato useremo il formalismo di Schrödinger.

L'equazione di Liouville (4.1), unitamente alla condizione iniziale  $W(q, p, 0) = W_0(q, p)$  determina  $W(q, p, t)$  univocamente e quindi vedremo come evolve questo stato in meccanica classica.

Ricordiamo che  $W_0(q, p)$  soddisfa le relazioni

$$W_0(q, p) \geq 0 \quad \int dqdp W_0(q, p) = 1 \quad (4.22)$$

Vedremo che le stesse relazioni devono valere per  $W(q, p, t)$

$$W(q, p, t) \geq 0 \quad \int dqdp W(q, p, t) = 1 \quad (4.23)$$

Infatti si può dimostrare innanzitutto che

$$\int dqdp \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial p} = \int dqdp \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial q}, \quad (4.24)$$

da questa relazione segue immediatamente che

$$\int dqdp \left( \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial q} \right) = \int dqdp \{W, H\} = 0 \quad (4.25)$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} \int dqdp W(q, p, t) = 0; \quad (4.26)$$

Inoltre, in accordo con l'equazione di Liouville (4.1) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} W(q, p, t + dt) &= W(q, p, t) - \left( \frac{\partial W}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial W}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) dt = \\ &= W \left( q - \frac{\partial H}{\partial p} dt, p + \frac{\partial H}{\partial q} dt; t \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Da questa uguaglianza possiamo dire che, se la funzione di Wigner soddisfa la relazione  $W \geq 0$  al tempo  $t$  allora la verifica al tempo  $t + dt$ . Ciò significa che una funzione definita positiva nel corso del tempo resta tale, contrariamente a quanto avviene in meccanica quantistica. Inoltre dal momento che possiamo scrivere le equazioni di Hamilton come

$$q(t + dt) = q(t) + dt \frac{\partial H}{\partial p} \quad (4.28)$$

$$p(t + dt) = p(t) - dt \frac{\partial H}{\partial q} \quad (4.29)$$

## 4.2 Evoluzione Classica

---

possiamo scrivere

$$W(q, p, t + dt) = W\left(q - \frac{\partial H}{\partial p} dt, p + \frac{\partial H}{\partial q} dt; t\right) = W(q(t + dt), p(t + dt); t)$$

è evidente che se al tempo  $t = 0$  la funzione di Wigner non ha dipendenza esplicita dal tempo, al tempo  $t$  questo sarà ancora vero e quindi la soluzione dell'equazione di Liouville si trova banalmente attraverso la sostituzione

$$q \rightarrow q(t) \quad (4.30)$$

$$p \rightarrow p(t) \quad (4.31)$$

In generale, quindi, la soluzione dell'equazione di Liouville ha la forma:

$$W(q, p, t) = W(q(t), p(t)) \quad (4.32)$$

Nel nostro caso, al tempo  $t = 0$  si ha

$$W(q, p, 0) = W_0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q_z - q)^2 - (p_z - p)^2} \quad (4.33)$$

Dalle considerazioni fatte possiamo concludere che la soluzione dell'equazione di Liouville con la condizione iniziale (4.33) sarà

$$W^{(0)}(q, p, t) = \frac{1}{\pi} e^{-(q_z - q(t))^2 - (p_z - p(t))^2} \quad (4.34)$$

dove  $q(t)$  e  $p(t)$  sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton (4.14) associate al potenziale quartico e hanno la forma (4.17), (4.18).

Al tempo  $t = 0$  la distribuzione è una gaussiana centrata in  $(q_z, p_z)$  la cui larghezza è fissata dal fatto che corrisponde ad uno stato coerente. Nel paragrafo precedente abbiamo visto la forma dell'orbita di un punto determinata dalle equazioni di Hamilton, quindi possiamo affermare che ogni punto della nostra distribuzione descriverà un'orbita analoga a quella della figura 4.3. Inoltre, dal momento che la nostra Hamiltoniana è  $H = p^2 + q^4$ , possiamo dire che i punti della distribuzione più lontani dal centro si muoveranno con velocità maggiore. In conclusione ci aspettiamo che la nostra distribuzione parte come una gaussiana e col passare del tempo girerà e si deformerà come

un gelato variegato e dopo un certo tempo perderà completamente la sua forma a campana. Vediamo i grafici di questa evoluzione in un intervallo di tempo  $(0, 2.5)$ <sup>1</sup>

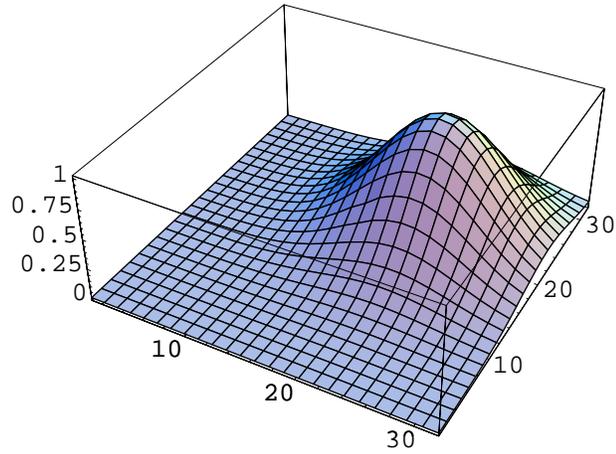


Figura 4.4: *Distribuzione classica al tempo  $t=0$*

---

<sup>1</sup>abbiamo preferito, per avere maggiore chiarezza nei grafici, moltiplicare tutto per  $\pi$ ; per questo la distribuzione sarà  $|W(q, p, t)| \leq 1$

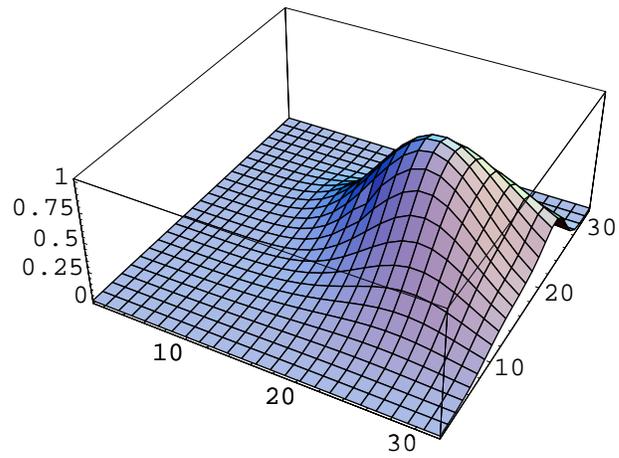


Figura 4.5: *Distribuzione classica al tempo  $t=0.5$*

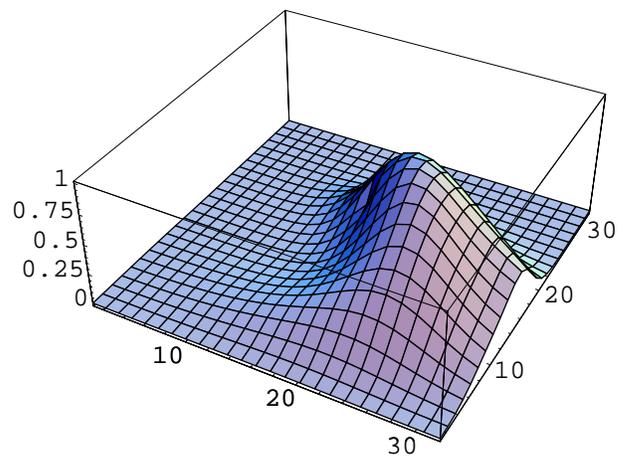


Figura 4.6: *Distribuzione classica al tempo  $t=1$*

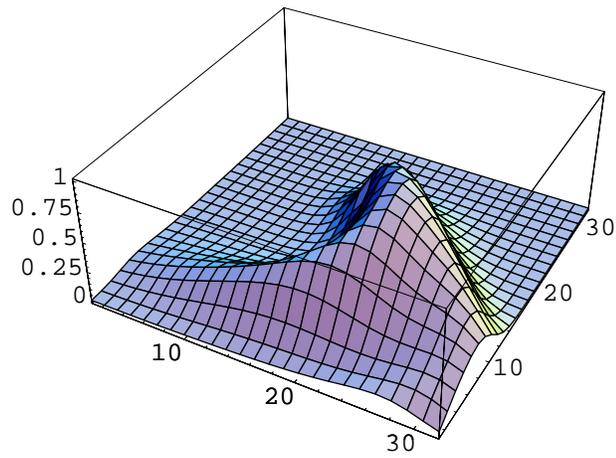


Figura 4.7: *Distribuzione classica al tempo  $t=1.5$*

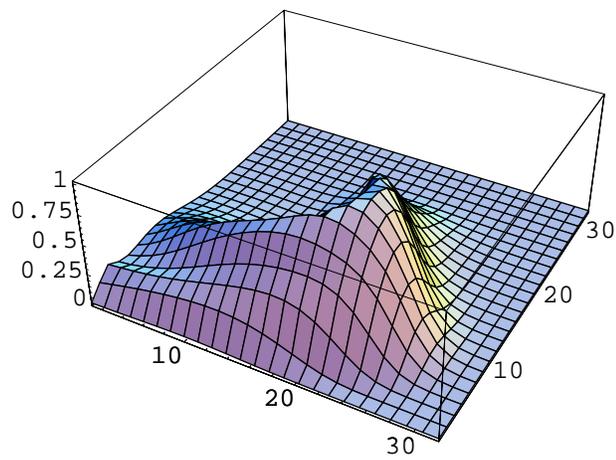


Figura 4.8: *Distribuzione classica al tempo  $t=2$*

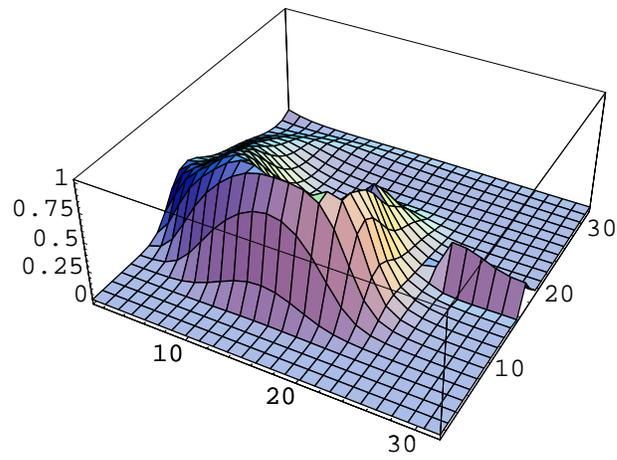


Figura 4.9: *Distribuzione classica al tempo  $t=2.5$*

La distribuzione evolve come predetto, ma perde la sua forma caratteristica prima ancora che abbia compiuto un giro, quindi ad un tempo inferiore rispetto al periodo. Questi grafici sono stati fatti per  $q_z = p_z = 0.7$  che corrisponde ad un'energia pari a  $E = 0.73$ . Se diamo alla distribuzione un'energia maggiore ci aspettiamo che giri più velocemente. Osserviamo il caso in cui  $q_z = p_z = 2$  che corrisponde all'energia  $E = 20$

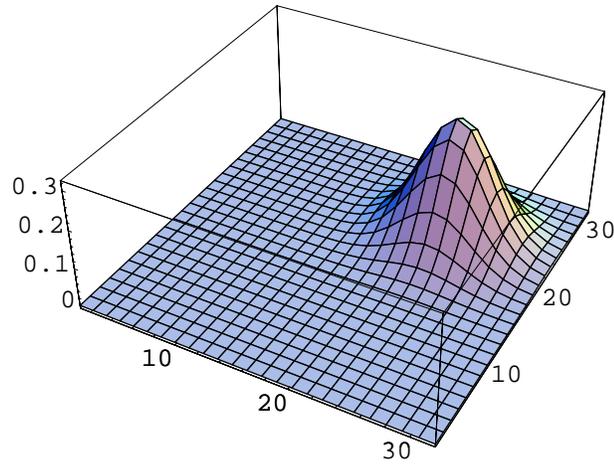


Figura 4.10: *Distribuzione classica al tempo  $t=0$*

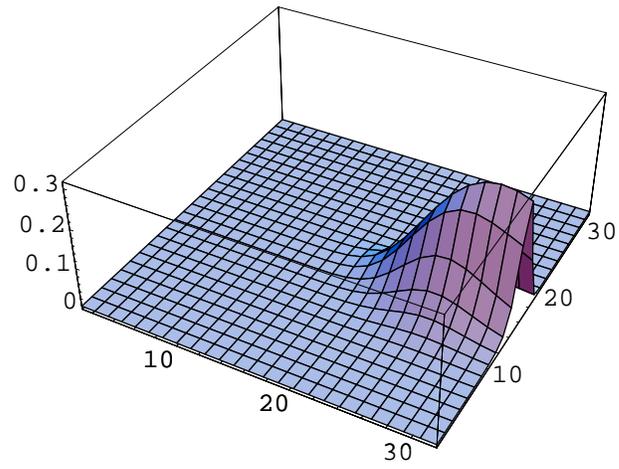


Figura 4.11: *Distribuzione classica al tempo  $t=0.5$*

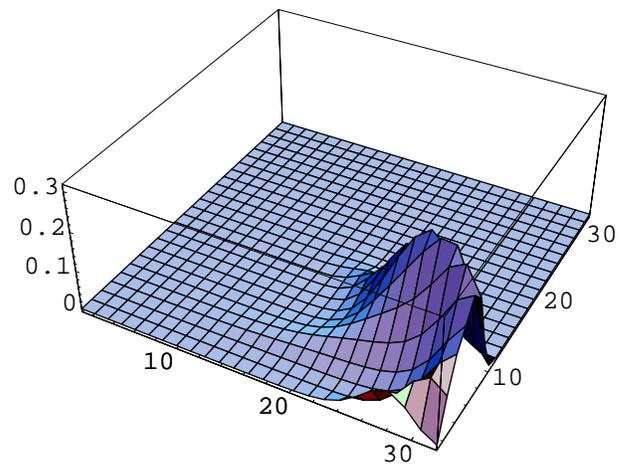


Figura 4.12: *Distribuzione classica al tempo  $t=1$*

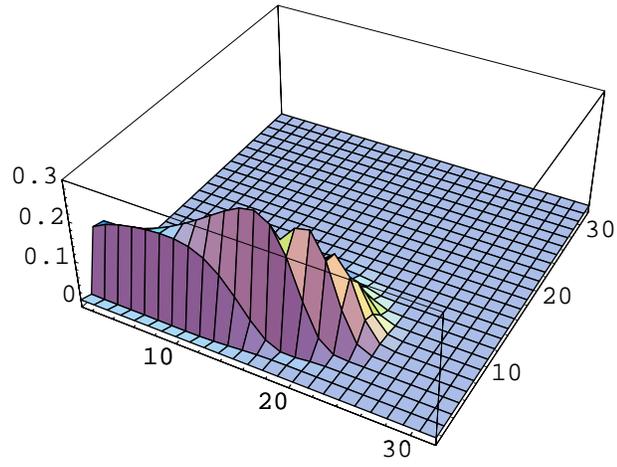


Figura 4.13: *Distribuzione classica al tempo  $t=1.5$*

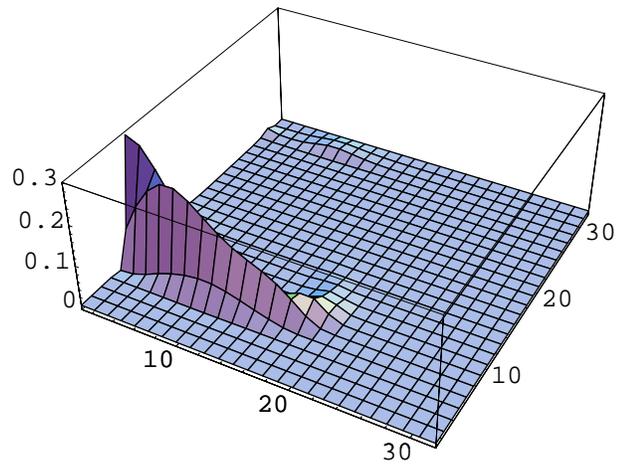


Figura 4.14: *Distribuzione classica al tempo  $t=2$*

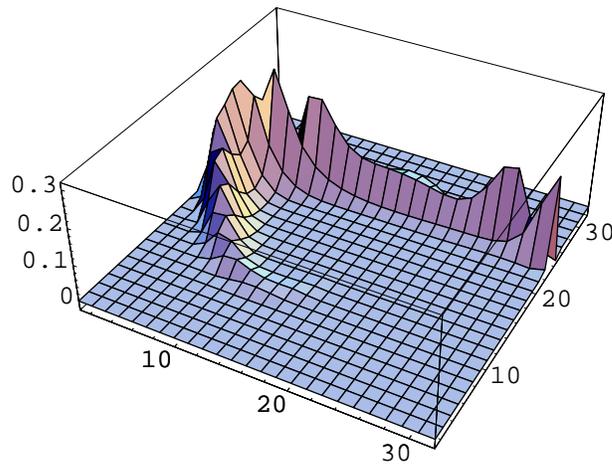


Figura 4.15: *Distribuzione classica al tempo  $t=2.5$*

La distribuzione gira più velocemente, tuttavia anche in questo caso, come mostrato dalle figure, perde la sua forma ad un tempo inferiore rispetto al periodo.

### 4.3 Evoluzione Quantistica

Nel capitolo precedente abbiamo definito l'evoluzione temporale quantistica dei simboli di Weyl attraverso l'equazione di Moyal

$$\frac{df_{\hat{A}}}{dt} = \frac{1}{i} [f_{\hat{A}}, H]_{\star} \quad (4.35)$$

In meccanica quantistica la soluzione di questa equazione non è immediata come in meccanica classica, infatti, abbiamo visto che la soluzione dell'equazione di Liouville si trova banalmente attraverso la sostituzione (4.30) nella condizione iniziale, mentre in meccanica quantistica questo non è possibile. Ricordiamo che una delle caratteristiche della mappa di Weyl è i simboli di Weyl di posizione e momento sono  $f_{\hat{q}} = q$  e  $f_{\hat{p}} = p$ ; di conseguenza, dalla (4.35) si ha

$$\dot{q} = \frac{1}{i} [q, H]_{\star} \quad (4.36)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{i} [p, H]_{\star} \quad (4.37)$$

allora possiamo scrivere

$$q(t + dt) = q(t) + \frac{1}{i} [q, H]_{\star} dt \quad (4.38)$$

$$p(t + dt) = p(t) + \frac{1}{i} [p, H]_{\star} dt \quad (4.39)$$

Sviluppando le parentesi di Moyal sopravvive solo il primo termine perché le derivate terze di  $q$  e  $p$  si annullano, quindi

$$q(t + dt) = q(t) + \frac{1}{i} \{q, H\} dt \quad (4.40)$$

$$p(t + dt) = p(t) + \frac{1}{i} \{p, H\} dt \quad (4.41)$$

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

Per il simbolo di Weyl di un generico operatore  $\hat{A}$ , invece, si ha

$$f_{\hat{A}}(q, p, t + dt) = f_{\hat{A}}(q, p, t) - \frac{1}{i} [f_{\hat{A}}, H]_{\star} dt = f_{\hat{A}} - \frac{1}{i} \{f_{\hat{A}}, H\} dt + \dots \quad (4.42)$$

dove gli ordini superiori in generale non si annullano.

In particolare, vogliamo studiare l'evoluzione del simbolo di Wigner (3.85), quindi dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{i} [W, H]_{\star} = -\frac{1}{i} \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n [\epsilon^n(W, H) - \epsilon^n(H, W)] \quad (4.43)$$

Cerchiamo di derivare l'equazione di evoluzione temporale per la funzione  $W$  in una forma che renda più immediato il confronto con l'equazione di Liouville. Per fare questo osserviamo che il prodotto di Moyal può essere riscritto nella forma

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) g(q, p) \quad (4.44)$$

Riscriviamo la nostra parentesi di Moyal in questi termini:

$$[W, H]_{\star} = W\left(q + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) H(q, p) - H\left(q + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) W(q, p)$$

Sostituendo  $H = p^2 + V(q)$  si ha

$$\begin{aligned} [W, H]_{\star} &= W\left(q + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) p^2 + W\left(q + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) V(q) + \\ &\quad - \left(p - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 W(q, p) - V\left(q + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) W(q, p) \end{aligned} \quad (4.45)$$

sviluppando i termini di questa relazione in serie di Taylor si ottiene

$$[W, H]_{\star} = -ip \frac{\partial W}{\partial q} + \left[ V\left(q - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] W \quad (4.46)$$

In definitiva l'equazione di Moyal (3.97) si può riscrivere nella forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -p \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{1}{i} \left[ V\left(q - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] W \quad (4.47)$$

che chiameremo equazione di Liouville quantistica. Vedremo che, per come è stata costruita, la soluzione di questa equazione è proprio la somma della soluzione dell'equazione di Liouville e di un termine perturbativo.

Per risolvere questa equazione, riscriviamola in forma di equazione di Liouville classica non omogenea, come si può vedere in [3]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial q} - V'(q) \frac{\partial W}{\partial p} = \Phi(q, p, t) \quad (4.48)$$

attraverso la definizione della funzione

$$\Phi(q, p, t) = \frac{1}{i} \left[ V\left(q - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V'(q) \frac{\partial}{\partial p} \right] W. \quad (4.49)$$

La soluzione dell'equazione (4.48) con la condizione iniziale  $W(q, p, 0) = W_0(q, p)$  può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} W(q, p, t) = & \iint G(p, q, t; p_0, q_0, 0) W_0(p_0, q_0) dp_0 dq_0 + \\ & + \int_t^0 dt_0 \iint G(p, q, t; p_0, q_0, t_0) \Phi(p_0, q_0, t_0) dp_0 dq_0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

qui  $G$  è la funzione di Green dell'equazione di Liouville classica

$$G(p, q, t; p_0, q_0, t_0) = \delta(p - \bar{p}(t; t_0, p_0, q_0)) \delta(q - \bar{q}(t; t_0, p_0, q_0)) \quad (4.51)$$

e  $q$  e  $p$  sono le soluzioni delle equazioni del moto classiche. Il risultato di questa equazione è

$$\begin{aligned} W(p, q, t) = & W^{(0)}(p, q, t) + \int_t^0 dt_0 \iint dp_0 dq_0 G(p, q, t; p_0, q_0, t_0) \times \\ & \times \frac{1}{i} \left[ V\left(q - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V'(q) \frac{\partial}{\partial p} \right] W(p_0, q_0, t_0) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Qui abbiamo introdotto la notazione

$$W^{(0)}(p, q, t) = \iint G(p, q, t; p_0, q_0, 0) W_0(p_0, q_0) dp_0 dq_0 \quad (4.53)$$

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

Se usiamo la trasformata di Fourier della funzione  $W(p_0, q_0, t_0)$  rispetto a  $p_0$  nel termine destro dell'equazione e facciamo agire l'operatore  $\frac{\partial}{\partial p_0}$  l'equazione prende la forma di un'equazione integrale pura:

$$\begin{aligned}
 W(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' dq' \\
 &\iint d\lambda dp_0 \lambda G(p, q, t; p_0, q', t') \sin[\lambda(p_0 - p')] \times \\
 &\times \left[ V'(q') - \frac{1}{\lambda} \left( V(q' + \frac{\lambda}{2}) - V(q' - \frac{\lambda}{2}) \right) \right] W(p', q', t')
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Questa equazione è stata derivata da Shirokov nel 1977 [4]. Spieghiamone il significato: la funzione  $W^{(0)}(p, q, t)$ , definita dall'equazione (4.53), è formalmente la soluzione dell'equazione classica di Liouville corrispondente alla distribuzione iniziale  $W_0(q, p)$ . Quindi se consideriamo la soluzione dell'equazione (4.54) in forma di una serie iterativa, i suoi termini successivi saranno correzioni quantistiche alla soluzione classica.

La soluzione nel nostro caso è

$$\begin{aligned}
 W(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' dq' \iint d\lambda dp_0 \lambda \\
 &G(p, q, t; p_0, q', t') \sin[\lambda(p_0 - p')] \times \\
 &\times \left[ 4q'^3 - \frac{1}{\lambda} \left( (q' + \frac{\lambda}{2})^4 - (q' - \frac{\lambda}{2})^4 \right) \right] W(p', q', t') = \\
 &= W^{(0)}(p, q, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' dq' \iint d\lambda dp_0 \lambda \\
 &G(p, q, t; p_0, q', t') (-\lambda^2 q') \sin[\lambda(p_0 - p')] W(p', q', t')
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

La (4.55) è un'equazione integrale pura che si risolve iterativamente. Il primo ordine si ottiene sostituendo a  $W(p', q', t')$  la nostra condizione iniziale  $W_0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(qz-q)^2 - (pz-p)^2}$ :

$$\begin{aligned}
 W_1(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' dq' \iint d\lambda dp_0 \lambda \\
 &G(p, q, t; p_0, q', t') \sin[\lambda(p_0 - p')] (-\lambda^2 q') W_0(q', p')
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Sviluppando i calcoli (Appendice B) otteniamo

$$W_1(p, q, t) = W^{(0)}(p, q, t) + \frac{1}{2} \int_0^t dt' q(t') (p(t') - p_z) \left[ -\frac{3}{2} + (p(t') - p_z)^2 \right] W_0(q', p') \quad (4.57)$$

L'integrale rispetto al tempo che compare nel termine perturbativo è stato risolto numericamente (Appendice C). Innanzitutto abbiamo costruito una griglia  $32 \times 32$  di valori iniziali  $(q(0), p(0))$  che, sostituita nel sistema (4.20) restituisce una matrice formata dai valori  $(a, b)$ . Questi valori sono stati sostituiti nelle espressioni di  $q(t)$  e  $p(t)$  e abbiamo ottenuto le orbite in funzione solo del tempo. L'integrale, infine, è stato risolto numericamente per diversi valori del tempo. Analogamente a quanto fatto per l'evoluzione classica analizzeremo l'evoluzione per due diversi valori dell'energia.

### 4.3.1 Evoluzione per un Energia $E=0.7$

Abbiamo detto che in generale uno stato quantistico descritto al tempo  $t = 0$  da una distribuzione gaussiana, con il passare del tempo dovrebbe assumere valori negativi. Nel formalismo usato l'evoluzione quantistica è descritta dalla somma di un termine perturbativo e della soluzione classica, quindi ci aspettiamo che la nostra distribuzione assuma valori negativi a causa del termine perturbativo. Per questo osserviamo innanzitutto la sua evoluzione in un intervallo di tempo  $(0, 2.5)$  nel caso visto nella sezione precedente di  $q_z = p_z = 0.7$

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

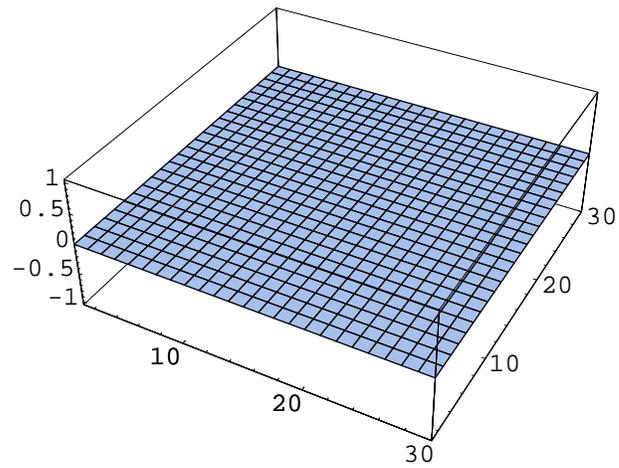


Figura 4.16: Termine Perturbativo al tempo  $t=0$

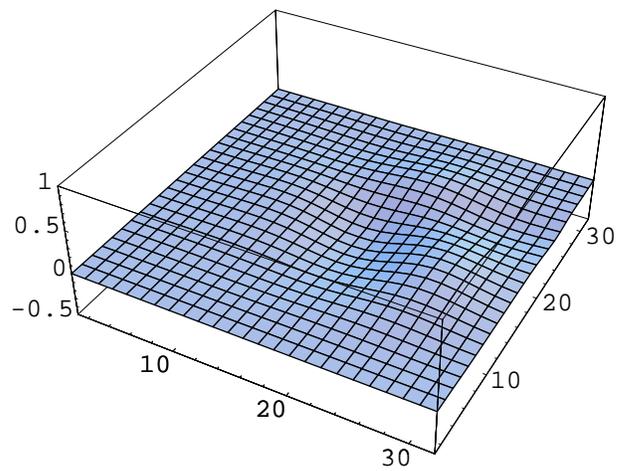


Figura 4.17: Termine Perturbativo al tempo  $t=0.5$

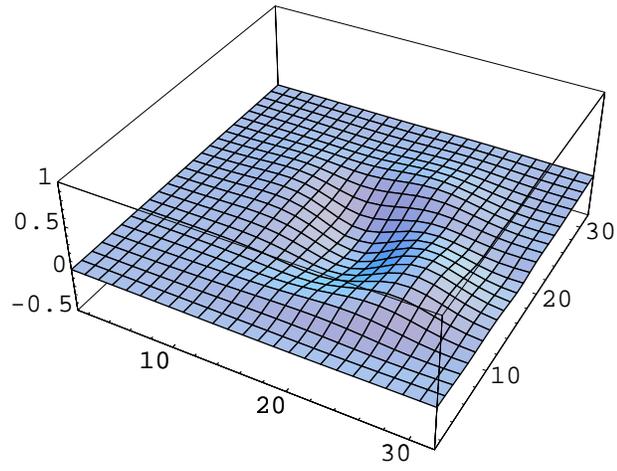


Figura 4.18: Termine Perturbativo al tempo  $t=1$

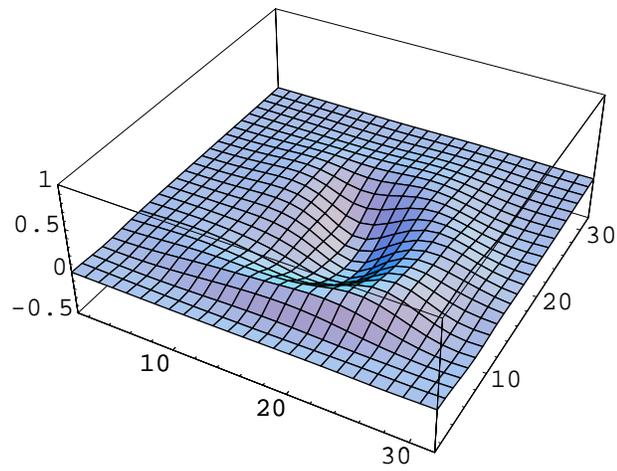


Figura 4.19: Termine Perturbativo al tempo  $t=1.5$

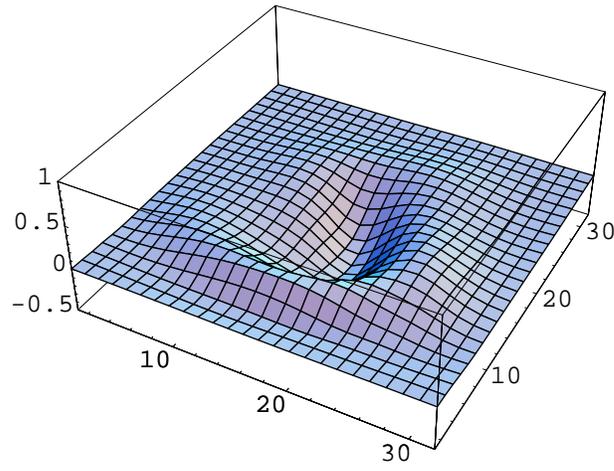


Figura 4.20: Termine Perturbativo al tempo  $t=2$

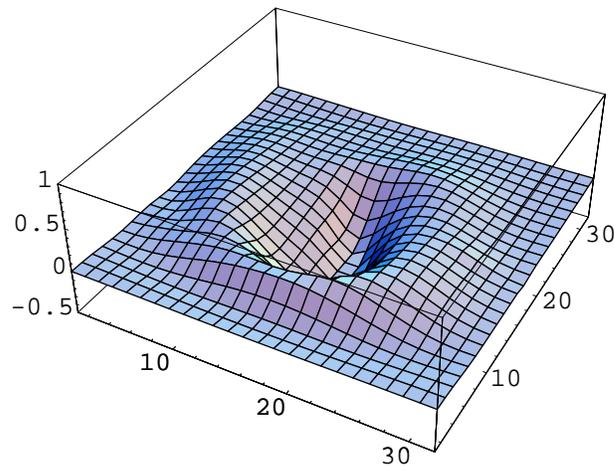


Figura 4.21: Termine Perturbativo al tempo  $t=2.5$

Da queste immagini si vede che al tempo  $t = 0$  il contributo del termine perturbativo è nullo, mentre con il passare del tempo comincia ad assumere valori negativi. Per comprendere l'effetto, qualitativo e quantitativo, del termine perturbativo sulla distribuzione classica osserviamo l'evoluzione di  $W_1(q, p, t) = W^{(0)}(q, p, t) + W_{pert}^1(q, p, t)$

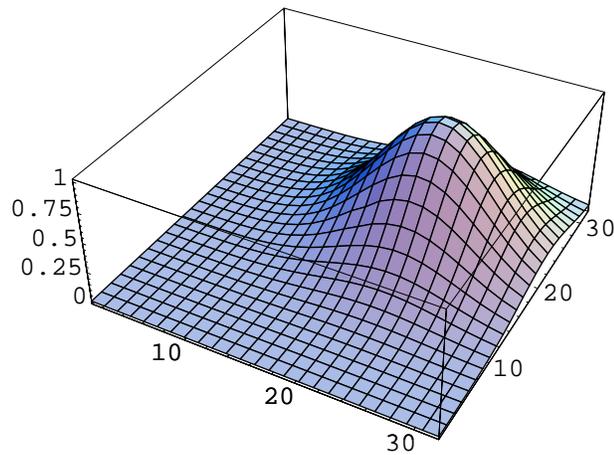


Figura 4.22: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=0$*

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

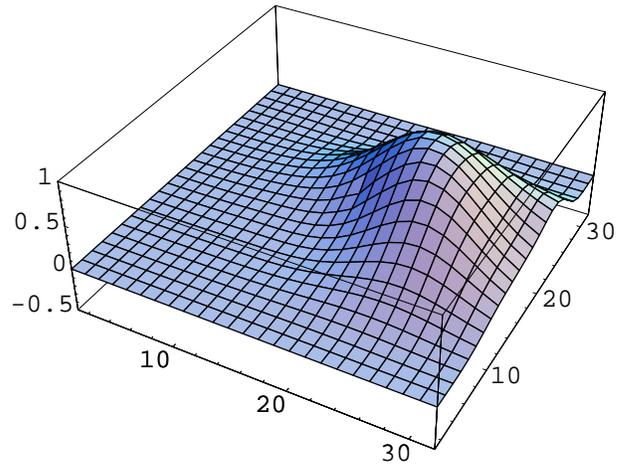


Figura 4.23: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=0.5$*

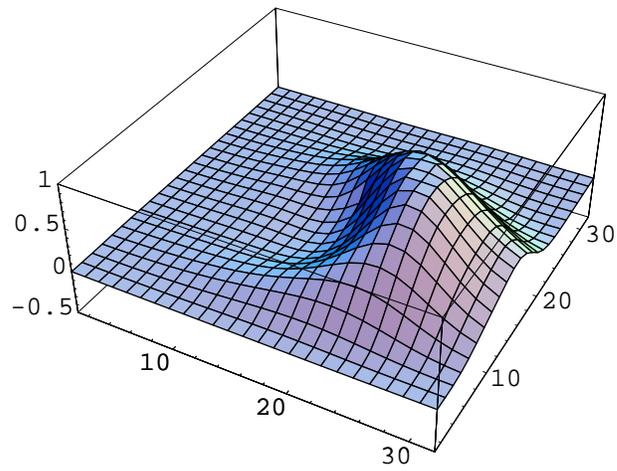


Figura 4.24: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1$*

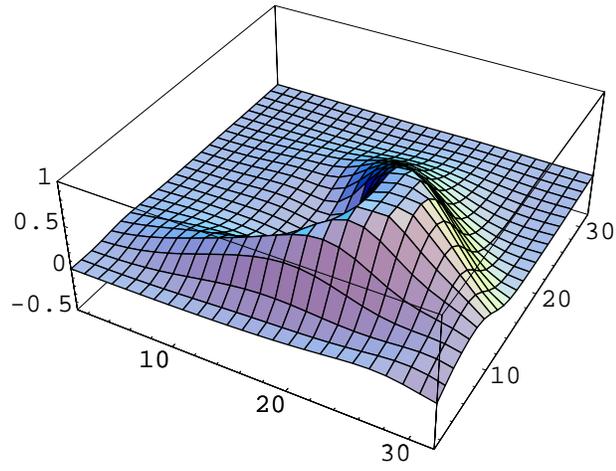


Figura 4.25: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1.5$*

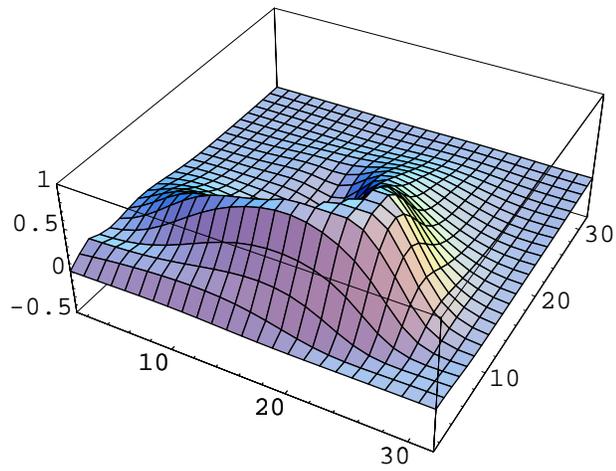


Figura 4.26: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2$*

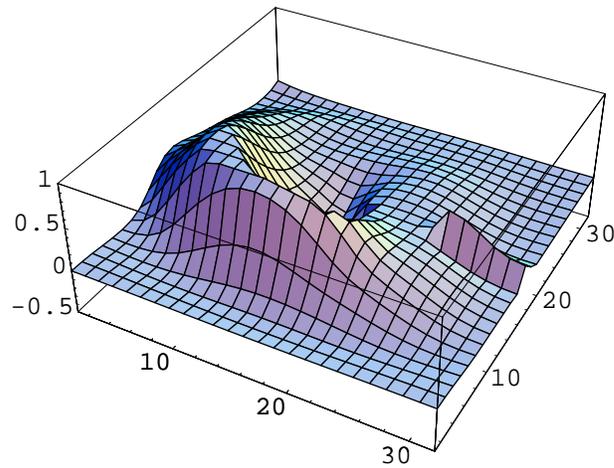


Figura 4.27: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2.5$*

Da questi grafici si vede che  $W_1(q, p, t)$  al tempo  $t = 0$  coincide con la distribuzione classica  $W^{(0)}(q, p)$ ; in seguito evolve in modo molto simile alla soluzione classica, tuttavia già al tempo  $t = 2$ , quando la distribuzione classica non ha ancora completato il primo giro, il termine perturbativo dà un contributo non trascurabile e la nostra distribuzione assume valori negativi, come possiamo vedere più chiaramente nei seguenti grafici

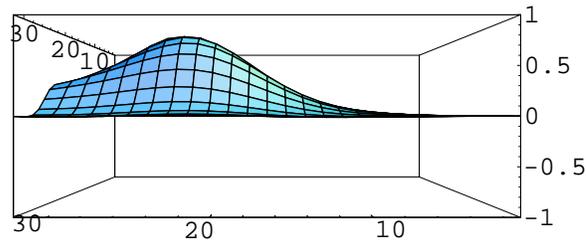


Figura 4.28: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=0.5$*

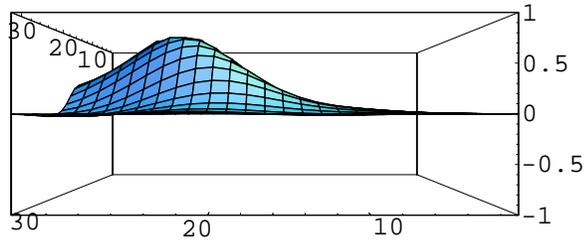


Figura 4.29: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1$*

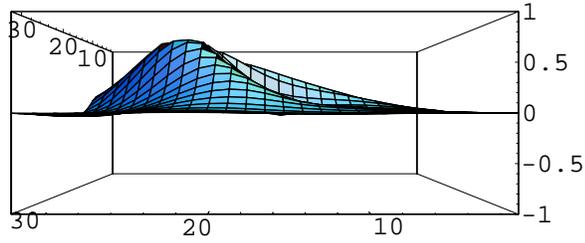


Figura 4.30: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1.5$*

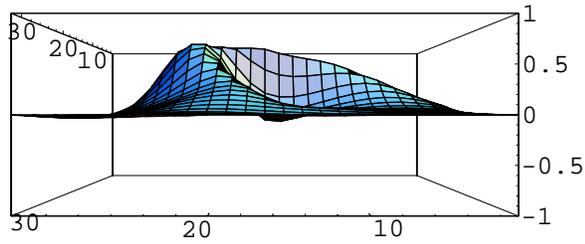


Figura 4.31: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2$*

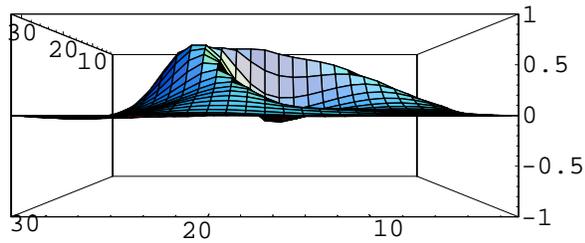


Figura 4.32: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2.5$*

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

Queste figure sono state fatte per  $q_z = p_z = 0.7$  quindi con un'energia iniziale di  $E = 0.73$ . In questo caso osserviamo che già ad un tempo  $t = 2$  la distribuzione assume valori negativi. Questo significa che nei casi di energia piccola il regime quantistico vince su quello classico molto presto. Ci aspettiamo che aumentando l'energia il regime in cui ci troviamo sia maggiormente classico e il contributo del termine perturbativo inferiore.

#### 4.3.2 Evoluzione per un Energia $E=20$

In questa sezione analizzeremo il comportamento dell'evoluzione quantistica in un caso di energia maggiore rispetto al caso precedente. In questo modo possiamo vedere il comportamento nella distribuzione nel tempo in un regime più classico, dove, abbiamo detto, ci aspettiamo che il termine perturbativo incida meno sull'andamento della distribuzione. Osserviamo l'evoluzione del termine perturbativo nel caso in cui  $q_z = p_z = 2$  e di conseguenza si abbia  $E = 20$ .

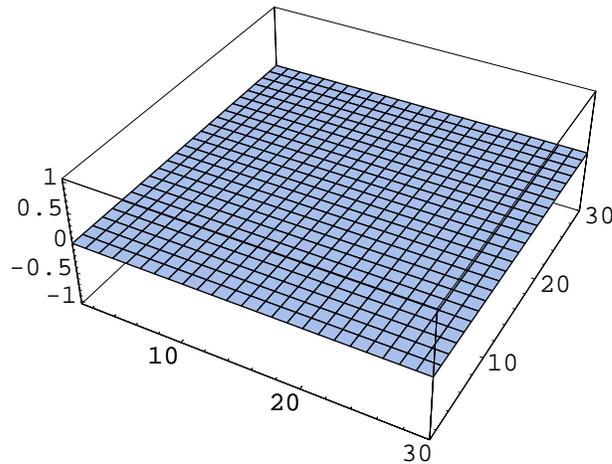


Figura 4.33: Termine Perturbativo al tempo  $t=0$

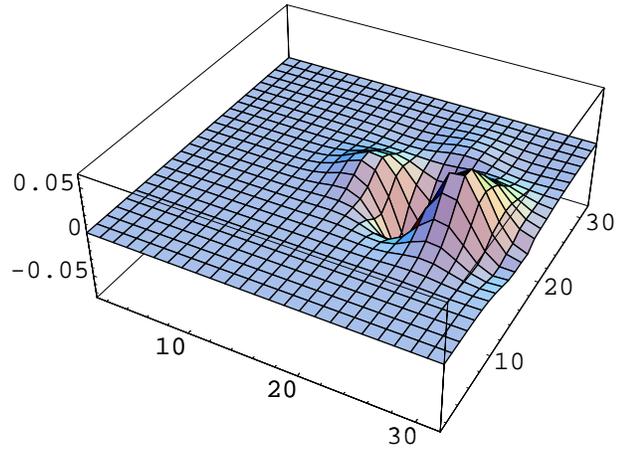


Figura 4.34: Termine Perturbativo al tempo  $t=0.5$

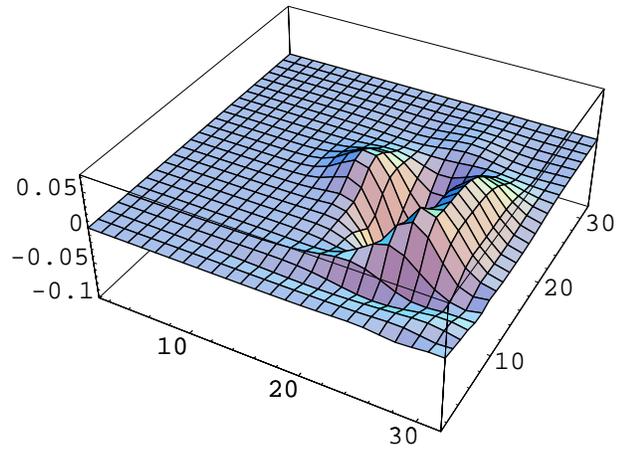


Figura 4.35: Termine Perturbativo al tempo  $t=1$

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

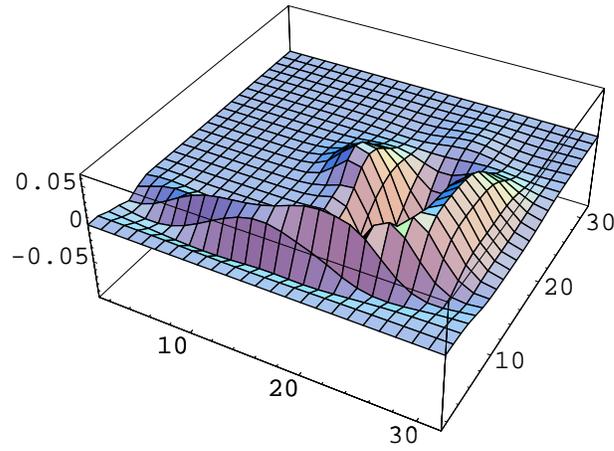


Figura 4.36: Termine Perturbativo al tempo  $t=1.5$

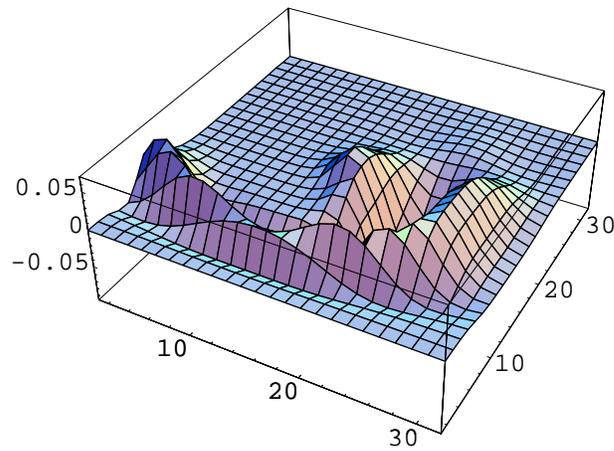


Figura 4.37: Termine Perturbativo al tempo  $t=2$

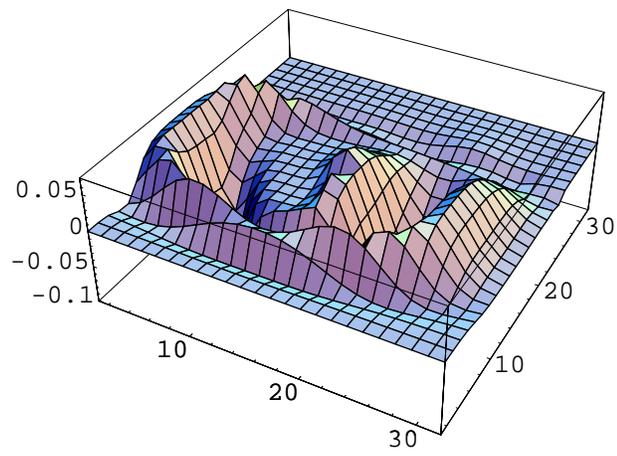


Figura 4.38: Termine Perturbativo al tempo  $t=2.5$

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

Ora osserviamo l'evoluzione di  $W_1(q, p, t)$  in questo regime di energia

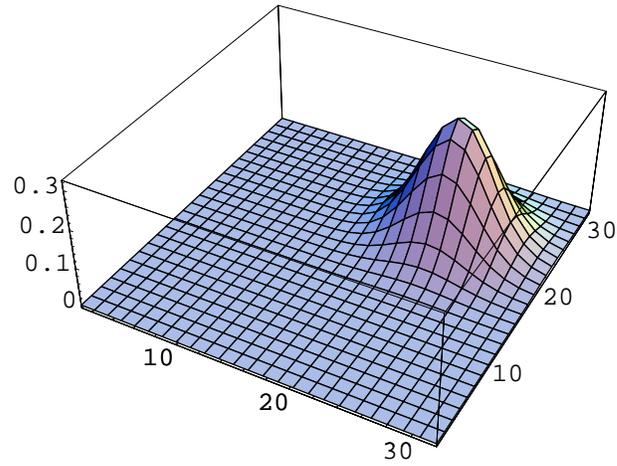


Figura 4.39: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=0$*

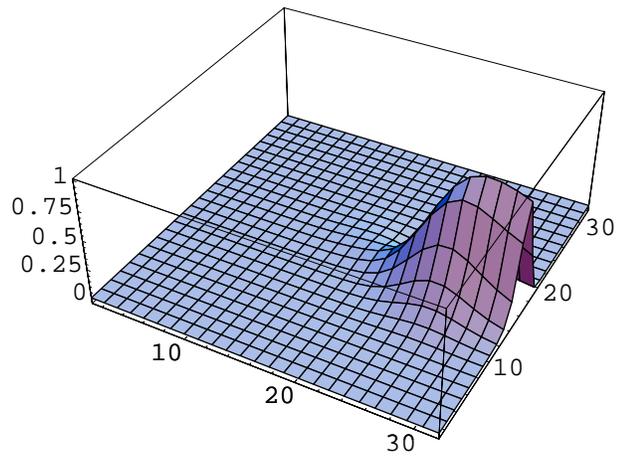


Figura 4.40: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=0.5$*

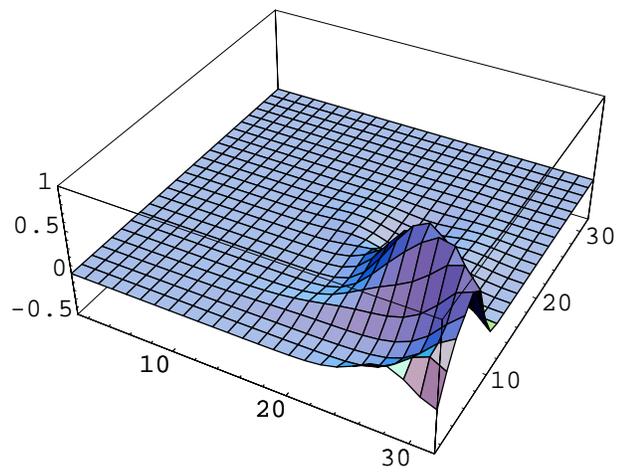


Figura 4.41: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1$*

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

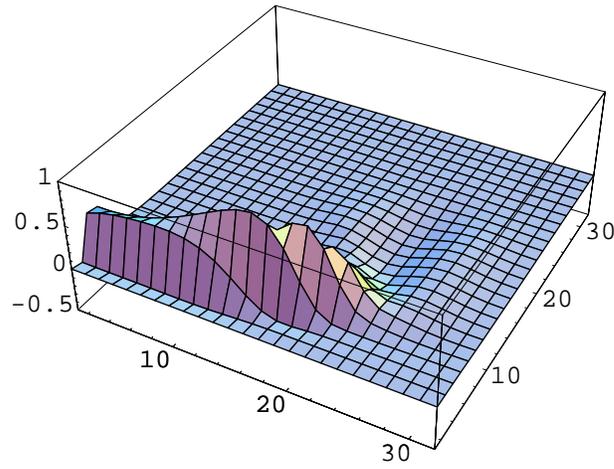


Figura 4.42: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1.5$*

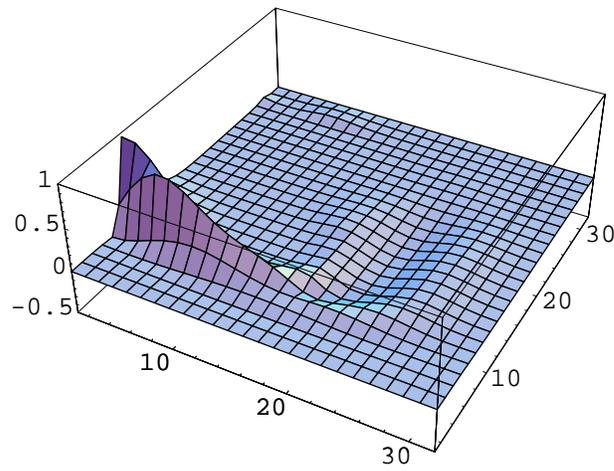


Figura 4.43: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2$*

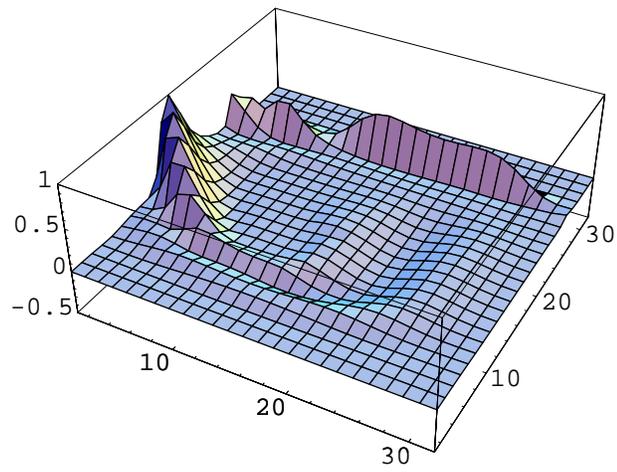


Figura 4.44: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2.5$*

### 4.3 Evoluzione Quantistica

---

Anche in questo caso al tempo  $t = 0$  la distribuzione coincide con quella classica dal momento che il termine perturbativo è nullo e in seguito evolve in modo molto simile a  $W^{(0)}(q, p, t)$ . In più possiamo vedere che, come ci aspettavamo, il picco di valori negativi è molto più piccolo, come mostrano le seguenti figure:

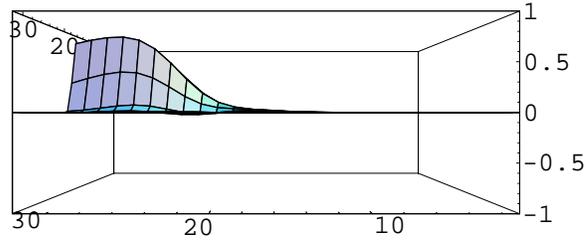


Figura 4.45: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=0.5$*

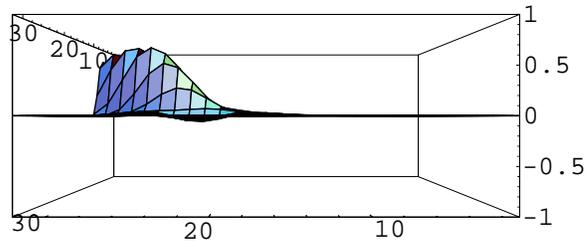


Figura 4.46: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1$*

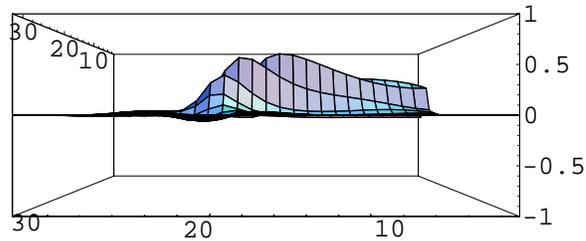


Figura 4.47: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=1.5$*

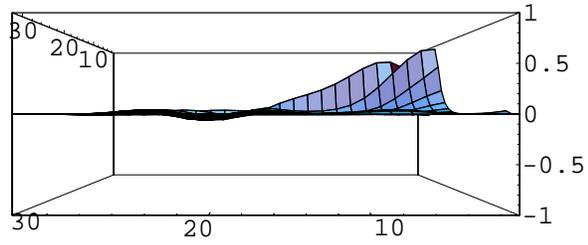


Figura 4.48: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2$*

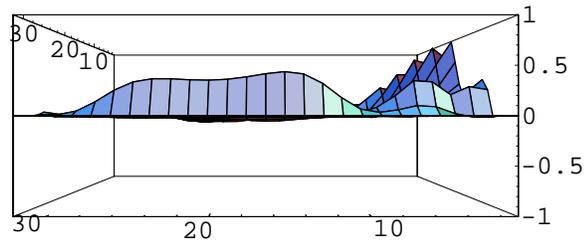


Figura 4.49: *Distribuzione Quantistica al tempo  $t=2.5$*

Notiamo che i valori negativi in questo caso sono molto più piccoli, quindi il regime quantistico in questo caso è meno incisivo.

## 4.4 Analisi dei Risultati

In questa sezione daremo una più dettagliata analisi dei risultati ottenuti.

La distribuzione di Wigner di uno stato coerente al tempo  $t = 0$  è una gaussiana, la cui larghezza è imposta dal fatto che deve rappresentare uno stato coerente, che può essere interpretata come un distribuzione di probabilità classica e quindi può essere fatta evolvere come prescritto dall'equazione di Liouville (2.48). Consideriamo la distribuzione centrata nel punto  $(0.7, 0.7)$ . In accordo con quanto prescritto dalle equazioni di Hamilton, ogni punto della distribuzione evolve muovendosi lungo un'orbita simile a quella descritta dalla figura 4.3, quindi la distribuzione gira. Inoltre i punti più distanti dal centro si muovono più velocemente e di conseguenza la distribuzione si deforma assumendo la forma di un gelato variegato, come possiamo vedere nella figura 4.9. Abbiamo visto che la forma caratteristica della gaussiana scompare prima ancora che abbia compiuto in giro completo. Anche aumentando l'energia, come nel caso della gaussiana centrata in  $(2, 2)$  la forma si perde entro il periodo, nonostante la distribuzione giri più velocemente. È evidente, quindi, che per le energie considerate e la larghezza della gaussiana la distribuzione contiene momenti tali che la caratteristica forma a campana non venga mantenuta.

Analizziamo ora i risultati ottenuti per l'evoluzione quantistica a partire dal caso in cui  $q_z = p_z = 0.7$ . Abbiamo visto nelle figure 4.22-4.27 che nel caso quantistico l'andamento della distribuzione che rappresenta lo stato coerente è molto simile all'andamento classico. Al tempo  $t = 0$  la distribuzione coincide con quella classica dal momento che il termine perturbativo è nullo, poi comincia a girare e a deformarsi sostanzialmente allo stesso modo della distribuzione classica. Come predetto, durante l'evoluzione il termine perturbativo fa assumere alla nostra distribuzione valori negativi. Dalla figura 4.32 si vede che il picco negativo raggiunge un valore di 0.1 che corrisponde

ad una percentuale del 10 %. Il termine perturbativo, quindi, influisce fortemente sulla distribuzione classica dal momento che ad un tempo inferiore ad un periodo fa assumere già alla distribuzione valori negativi e in percentuale non trascurabili. Il regime di energia considerato, perciò, è un regime fortemente quantistico. Questo rende molto interessante il caso analizzato di energia pari a  $E = 2$  che, proprio perché maggiore, dovrebbe rappresentare un regime più classico in cui ci aspettiamo che il termine perturbativo sia meno incisivo. Anche in questo caso i valori negativi giungono prima che la distribuzione abbia fatto un giro, ma, come mostra la figura 4.49 il picco raggiunge il valore 0.05 che corrisponde ad una percentuale del 5 % in accordo con quanto predetto. Notiamo inoltre che, in generale, nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  il termine perturbativo si annulla e si ottengono le distribuzioni classiche.

In conclusione abbiamo costruito una teoria perturbativa attraverso la quale si può confrontare l'evoluzione temporale classica e l'evoluzione temporale quantistica. In questo lavoro abbiamo analizzato il caso di un'Hamiltoniana di cui non si conosce esattamente lo spettro quantistico, ma questo sistema può essere anche per casi in cui lo spettro è noto per comprendere l'influenza sull'evoluzione quantistica della presenza di autostati.

# Appendice A

## Richiami matematici

### A.1 Algebre

#### A.1.1 Algebre

Uno *spazio vettoriale* è un insieme arbitrario  $M$  dotato di una legge di composizione interna detta addizione e di una legge di composizione esterna detta prodotto. L'addizione si definisce come

$$(x, y) \in M \otimes M \rightarrow x + y \in M \quad (\text{A.1})$$

Un insieme  $M$  possiede una struttura di *Algebra* se è uno spazio vettoriale e se esiste un'operazione binaria interna

$$\cdot : (x, y) \in M \otimes M \rightarrow x \cdot y \in M \quad (\text{A.2})$$

detta *prodotto interno*, per cui vale la proprietà distributiva.

Se il prodotto interno è associativo, cioè se vale

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (\text{A.3})$$

l'algebra si dirà *associativa*.

Se possiede un elemento neutro

$$1 \in M : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in M \quad (\text{A.4})$$

l'algebra si dirà *unitale*.

Uno spazio vettoriale  $M$  possiede una struttura di *algebra di Lie* se è assegnata un'operazione interna a  $M$ , detta commutatore, con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} [\alpha x + \beta y, z] &= \alpha [x, z] + \beta [y, z] \\ [z, \alpha x + \beta y] &= \alpha [z, x] + \beta [z, y] \end{aligned} \quad \text{Bilinearità} \quad (\text{A.5a})$$

$$[x, x] = 0 \quad \text{Nilpotenza} \quad (\text{A.5b})$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{Identità di Jacobi} \quad (\text{A.5c})$$

Data un'algebra associativa possiamo costruire un'algebra di Lie tramite la seguente posizione

$$[x, y] = xy - yx \quad \forall x, y \in \mathcal{M} \quad (\text{A.6})$$

### A.1.2 Varietà Differenziabili

Si definisce *varietà topologica n-dimensionale* uno spazio topologico  $X$  tale che,  $\forall x \in X$ , esistono un intorno aperto  $U$  di  $x$  e un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ . La coppia  $(U, \phi)$  si denomina *carta* o *sistema di coordinate* di dominio  $U$  ed applicazione coordinata  $\phi$ . Infine gli  $n$  numeri  $(x^1, \dots, x^n) = \phi(x) \in \phi(U)$  si dicono coordinate di  $x$  nella carta  $(U, \phi)$ .

Per *atlante di classe  $C^k$*  su una varietà topologica  $n$ -dimensionale  $X$  si intende una collezione  $\alpha$  di carte soddisfacenti le seguenti condizioni:

1. i domini delle carte di  $\alpha$  costituiscono un ricoprimento aperto di  $X$ ;
2. per ogni coppia di carte  $(U, \phi), (V, \psi) \in \alpha$ , con  $U \cap V \neq \emptyset$ , l'applicazione  $\phi \circ \psi^{-1}$  è un diffeomorfismo di classe  $C^k$ .

Una *varietà differenziabile n-dimensionale  $V_n$*  si ottiene assegnando una atlante su una varietà topologica.

### A.1.3 Spazio Tangente e Cotangente

Sia  $V_n$  una varietà e  $\mathcal{F} = \{V_n, \mathbb{R}\}$  l'insieme delle funzioni  $C^\infty$  da  $V_n$  a  $\mathbb{R}$ . Definiamo il vettore tangente alla varietà  $V_n$  nel punto  $x$  la mappa

$$X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.7})$$

con le seguenti proprietà:

- $v(af + bg) = av(f) + bv(g) \forall f, g \in \mathcal{F}; a, b \in \mathbb{R}$
- $v(fg) = f(x)v(g) + v(f)g(x)$  Identità di Leibnitz

Un vettore tangente è dunque un operatore di derivazione. Si dimostra che l'insieme dei vettori tangenti forma uno spazio vettoriale che chiameremo *spazio tangente*  $T_x V_n$ .

Un *campo vettoriale*  $\Xi$  su una varietà  $V_n$  è un'applicazione

$$\Xi : x \in V_n \rightarrow X_x \in T_x V_n \quad (\text{A.8})$$

cioè un'applicazione che associa ad ogni punto sulla varietà un vettore tangente sullo spazio tangente.

Sia dato uno spazio vettoriale a  $n$  dimensioni  $M$ . Definiamo lo *spazio duale*  $M^*$  di  $M$  come lo spazio delle applicazioni lineari (covettori)

$$\omega : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.9})$$

Si può dimostrare che ha struttura di spazio vettoriale.

Un tensore  $T$  di tipo  $(k, l)$  è un'applicazione

$$T : \underbrace{M^* \times \dots \times M^*}_k \times \underbrace{M \times \dots \times M}_l \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.10})$$

Consideriamo in particolare una varietà  $V_n$ , un punto  $x$  su di essa e lo spazio tangente a questo punto  $T_x V_n$ . Possiamo considerare il duale di tale spazio, detto *spazio cotangente* a  $V_n$  in  $x$  e denotato con  $T_x^* V_n$

### A.1.4 Algebra di Lie e Derivata di Lie

Sia data una varietà  $V_n$ , un punto  $x$  su di essa e siano per ogni intorno di  $x$  due campi vettoriali  $X$  e  $Y$ . Definiamo il *commutatore* dei due campi come

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{A.11}$$

al variare di  $f$ . Si può dimostrare che è anch'esso un campo vettoriale

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y] f \tag{A.12}$$

Lo spazio vettoriale  $V_n$  munito dell'operazione interna  $[X, Y]$  diventa un'*algebra di Lie*. Dato un campo vettoriale  $X$  definisco la *derivata di Lie* come l'applicazione

$$\mathcal{L}_X : T(k, l) \rightarrow T(k, l) \tag{A.13}$$

con le seguenti proprietà:

- lineare
- soddisfa Leibnitz  $\mathcal{L}_X(TV) = \mathcal{L}_X(T)V + T\mathcal{L}_X(V)$
- $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$
- $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$

### A.1.5 Spazi Fibrati

Si consideri l'insieme

$$TV_n = \{(x, X_x), x \in V_n, X_x \in T_x V_n\} \tag{A.14}$$

Ogni elemento di  $TV_n$  è una coppia  $(x, X_x)$  formata da un punto  $x \in V_n$  e da un vettore  $X_x$  appartenente allo spazio tangente  $T_x V_n$  in quello stesso punto. L'applicazione

$$\pi : (x, X_x) \in TV_n \rightarrow x \in V_n \tag{A.15}$$

è detta applicazione proiezione; la controimmagine  $\pi^{-1}(x)$  di  $x$  è detta *fibra* su  $x$ . In una carta  $(U, \phi)$  su  $V_n$  un punto  $x \in U$  è individuato dalle sue

## A.2 Spazi di Hilbert

---

coordinate  $x^i$ . Inoltre, un generico vettore  $X_x$  con  $x \in U$ , resta definito dalle sue componenti  $X^i$ . Pertanto resta definita una corrispondenza biunivoca

$$\phi : \mathcal{U} \rightarrow \varphi \times \mathbb{R}^n \quad (\text{A.16})$$

dove  $\mathcal{U} = \{(x, X_x), x \in U, X_x \in T_x V_n\}$ . Si prova inoltre che all'insieme  $TV_n$  può associarsi una topologia in modo che  $\phi$  sia un omeomorfismo e che le carte  $(\mathcal{U}, \phi)$  costituiscono un atlante per  $TV_n$  di classe pari a quella di  $V_n$ . Alla varietà differenziabile  $2n$ -dimensionale che così si ottiene si dà il nome di *spazio fibrato tangente* a  $V_n$  mentre le coordinate  $(x^i, X^i)$  si denominano coordinate naturali per  $TV_n$ .

Quanto detto può ripetersi per l'insieme

$$T^*V_n = \{(x, \omega_x), x \in V_n, \omega_x \in T_x^*V_n\} \quad (\text{A.17})$$

che prende il nome di *spazio fibrato cotangente* di  $V_n$ .

## A.2 Spazi di Hilbert

### A.2.1 Spazi Metrici

Uno *spazio metrico* si indica con  $(M, d)$ . Esso è costituito da un supporto  $M$  che è l'insieme degli elementi che costituiscono lo spazio, e da una nozione di distanza  $d$  che è un'applicazione da  $M \otimes M$  in  $\mathbb{R}^+$ .  $d$  viene chiamata metrica e deve soddisfare le seguenti proprietà

1.  $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in M, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in M$

Uno spazio metrico viene detto *completo* se ogni successione di Cauchy dello spazio ammette limite nello spazio

### A.2.2 Spazi Euclidei

Uno *spazio euclideo* è uno spazio vettoriale  $X$  in cui è definita una corrispondenza:  $X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  che rispetta le seguenti proprietà:

1.  $\langle x, x \rangle$  reale e  $\geq 0 \forall x \in X$  e  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \forall x, y \in X$
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle \forall x, y \in X$
4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \forall x, y, z \in X$

### A.2.3 Spazi di Hilbert

Si chiama *spazio di Hilbert* uno spazio  $\mathcal{H}$ , di dimensione finita o infinita, Euclideo e completo.

Una volta definito lo spazio di Hilbert, che d'ora in avanti indicheremo sempre con  $\mathcal{H}$ , definiamo gli operatori su tali spazi.

**Operatori** Un operatore su  $\mathcal{H}$  è una mappa da  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}$ :  $\hat{A} : \psi \mapsto \hat{A}(\psi) = \hat{A}\psi$ .

Un operatore  $\hat{A}$  si dice:

1. nullo se  $\hat{A}(\psi) = 0_H \forall \psi \in \mathcal{H}$
2. identità se  $\hat{A}(\psi) = \psi \forall \psi \in \mathcal{H}$
3. lineare se  $\hat{A}(a\psi + b\phi) = a\hat{A}(\psi) + b\hat{A}(\phi) \forall \psi, \phi \in \mathcal{H} a, b \in \mathbb{C}$

Un operatore lineare si dice:

1. aggiunto  $\hat{A}^\dagger$  di  $\hat{A}$  se verifica  $\langle \hat{A}^\dagger \psi, \phi \rangle = \langle \psi, \hat{A}\phi \rangle$
2. autoaggiunto se  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$  e i domini coincidono  $\mathcal{D}(\hat{A}^\dagger) = \mathcal{D}(\hat{A})$

In questa tesi considereremo solo operatori lineari.

## A.3 Funzioni ellittiche di Jacobi

In matematica, le funzioni ellittiche di Jacobi costituiscono una famiglia di funzioni ellittiche basilari che sono state introdotte dal matematico tedesco Carl Gustav Jakob Jacobi intorno al 1830. Esse presentano utili analogie con le funzioni trigonometriche, come rivelato dalla scelta della notazione  $SN$  per una funzione associabile alla funzione seno.

Ci sono dodici funzioni ellittiche Jacobiane. Ognuna di queste corrisponde a una freccia tracciata da un angolo a un altro di uno stesso rettangolo. Gli angoli del rettangolo vengono chiamati, per convenzione,  $s, c, d, n$ . Il rettangolo è inteso giacente sul piano complesso, con  $s$  nell'origine,  $c$  corrisponde al punto  $K$  sull'asse reale,  $d$  corrisponde al punto  $K + iK'$  and  $d$  è sul punto  $iK'$  sull'asse immaginario. I numeri  $K$  e  $K'$  sono detti i quarti di periodo. Le dodici funzioni ellittiche di Jacobi sono quindi  $pq$ , dove  $p$  e  $q$  denotano una delle lettere  $s, c, d, n$ .

Più in generale, non è necessario imporre un rettangolo; un parallelogramma è sufficiente. Comunque, se  $K$  e  $iK'$  vengono mantenuti rispettivamente sull'asse reale ed immaginario allora le funzioni ellittiche di Jacobi  $pq$  u assumono valori reali quando  $u$  è reale.

Le funzioni ellittiche sono funzioni di due variabili. La prima variabile può essere data in termini di un'ampiezza  $\varphi$  o più comunemente in termini di  $u$  definito sopra. La seconda variabile può essere data in termini di un parametro  $m$  o come il modulo ellittico  $k$  dove  $k^2 = m$ .

Ricordiamo che l'integrale ellittico è definito come una funzione  $f$  che può essere scritta nella forma

$$f(x) = \int_c^x R(t, P(t)) dt \quad (\text{A.18})$$

dove  $R$  è una funzione razionale,  $P$  è la radice di un polinomio cubico o quartico senza radici ripetute e  $c$  è una costante. Definiamo le funzioni ellittiche come le inverse di un integrale ellittico. Sia

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \quad (\text{A.19})$$

Allora le funzioni ellittiche  $SN, CN$  e  $DN$  sono date da

$$SN(u) = \sin \varphi \quad (\text{A.20})$$

$$CN(u) = \cos \varphi \quad (\text{A.21})$$

$$DN(u) = \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} \quad (\text{A.22})$$

Qui l'angolo  $\varphi$  è chiamato ampiezza. Il valore  $m$  è un parametro libero, usualmente reale e  $0 \leq m \leq 1$  e così le funzioni ellittiche possono essere pensate come date da due variabili, l'ampiezza  $\varphi$  e il parametro  $m$ .

Le funzioni di Jacobi soddisfano le seguenti relazioni algebriche

$$CN^2 + SN^2 = 1 \quad (\text{A.23})$$

$$DN^2 + k^2 SN^2 = 1 \quad (\text{A.24})$$

Da questo vediamo che  $(CN, SN, DN)$  parametrizza una curva ellittica che è l'intersezione di due quadriche definite dalle relazioni precedenti. Possiamo definire una legge di gruppo per i punti su questa curva attraverso la formula di addizione per le funzioni di Jacobi.

$$CN(x+y) = \frac{CN(x)CN(y) - SN(x)SN(y)DN(x)DN(y)}{1 - k^2 SN^2(x)SN^2(y)} \quad (\text{A.25})$$

$$SN(x+y) = \frac{SN(x)CN(y)DN(y) + SN(y)CN(x)DN(x)}{1 - k^2 SN^2(x)SN^2(y)} \quad (\text{A.26})$$

$$DN(x+y) = \frac{DN(x)DN(y) - k^2 SN(y)SN(x)CN(x)CN(y)}{1 - k^2 SN^2(x)SN^2(y)} \quad (\text{A.27})$$

Le derivate delle tre basilari funzioni di Jacobi sono:

$$\frac{d}{dz} SN(z; k) = CN(z; k)DN(z; k) \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{d}{dz} CN(z; k) = -SN(z; k)DN(z; k) \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{d}{dz} DN(z; k) = -k^2 SN(z; k)CN(z; k). \quad (\text{A.30})$$

Con le formule di addizione date sopra e per un dato valore di  $K$  con  $0 < k < 1$  vediamo che esse sono soluzioni delle seguenti equazioni differenziali ordinarie non lineari:

### A.3 Funzioni ellittiche di Jacobi

---

- $SN(y; k)$  risolve le equazioni differenziali

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + k^2)y - 2k^2y^3 = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (1 - y^2)(1 - k^2y^2) = 0 \quad (\text{A.32})$$

- $CN(y; k)$  risolve le equazioni differenziali

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 2k^2)y + 2k^2y^3 = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (1 - y^2)(1 - k^2 + k^2y^2) = 0 \quad (\text{A.34})$$

- $DN(y; k)$  risolve le equazioni differenziali

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (2 - k^2)y + 2y^3 = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (y^2 - 1)(1 - k^2 - y^2) = 0 \quad (\text{A.36})$$



# Appendice B

## Dettaglio di alcuni calcoli

### B.1 Simbolo di Wigner di uno stato coerente

In questa sezione faremo il conto esplicito del simbolo di Wigner di uno stato coerente  $|z\rangle$ . Il simbolo di Wigner è la funzione sullo spazio delle fasi corrispondente all'operatore densità  $\hat{\rho}$ . In generale il simbolo di Wigner è dato da

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) e^{-ipu} du \quad (\text{B.1})$$

dove  $\rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right)$  è il valore di aspettazione  $\langle q + \frac{u}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{u}{2} \rangle$ . Nel caso dello stato coerente l'operatore densità è  $\hat{\rho} = |z\rangle\langle z|$ ; calcoliamone il valore di aspettazione

$$\begin{aligned} \rho_z\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) &= \left\langle q + \frac{u}{2} \left| z \right\rangle \left\langle z \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-\frac{(q+\frac{u}{2})^2}{2} - \frac{|z|^2}{2} + \sqrt{2}z(q+\frac{u}{2}) - \frac{z^2}{2}} e^{-\frac{(q-\frac{u}{2})^2}{2} - \frac{|z|^2}{2} + \sqrt{2}z^*(q-\frac{u}{2}) - \frac{z^{*2}}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Sostituendo questa espressione nella (B.1) si ha

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-|z|^2 - \frac{z^{*2}}{2} - \frac{|z|^2}{2}} \int du e^{-\frac{1}{2}(q+\frac{u}{2})^2 - \frac{1}{2}(q-\frac{u}{2})^2} e^{\sqrt{2}z(q+\frac{u}{2}) + \sqrt{2}z^*(q-\frac{u}{2})} e^{-ipu} \quad (\text{B.3})$$

Per risolvere l'integrale in  $du$  useremo la seguente relazione:

$$\int e^{-cu^2 + fu} du = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{\frac{f^2}{4c}} \quad (\text{B.4})$$

Confrontandola con la (B.3) si vede che, nel nostro caso  $c = \frac{1}{4}$  e  $f = \frac{\sqrt{2}}{2}(z - z^*) - ip$ . Quindi si ottiene:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-|z|^2 - \frac{z^{*2}}{2} - \frac{|z|^2}{2}} e^{-q^2} e^{\sqrt{2}(z+z^*)q} \sqrt{4\pi} e^{(\frac{\sqrt{2}}{2}(z-z^*)q - ip)^2} = \text{(B.5)}$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-|\sqrt{2}z - (q+ip)|^2} \quad \text{(B.6)}$$

Sostituiamo nella (B.5)  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_z + ip_z)$  e scriviamo il simbolo di Wigner associato allo stato coerente nella forma:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-|(q-q_0)+i(p-p_0)|^2} = \frac{1}{\pi} e^{-(q-q_z)^2 - (p-p_z)^2} \quad \text{(B.7)}$$

## B.2 Equazione di Liouville Quantistica

In questa sezione deriveremo con maggiore dettaglio l'equazione di Liouville quantistica e la sua soluzione. Dal momento che la dinamica di un sistema quantistico é determinata dall'equazione di Schrödinger partiamo da questa e deriviamo un'equazione per  $W(q, p, t)$

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \right] |\Psi\rangle, \quad |\Psi\rangle(t_0) = |\Psi_0\rangle \quad \text{(B.8)}$$

Il simbolo di Wigner in variabili dimensionali è

$$W(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \rho(q - \frac{u}{2}, q + \frac{u}{2}) e^{\frac{ipu}{\hbar}} du \quad \text{(B.9)}$$

A partire dalla (B.8) deriviamo l'equazione di evoluzione per  $\rho(q_1, q_2, t) = \Psi(q_1, t)\Psi^*(q_2, t)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[ i\hbar \left( \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{1}{i\hbar} (V(q_1) - V(q_2)) \right] \rho(q_1, q_2) \quad \text{(B.10)}$$

In questa equazione poniamo  $q_1, 2 = q \mp \frac{u}{2}$  e otteniamo, nelle nuove variabili

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[ -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial q \partial u} + \frac{1}{i\hbar} \left( V(q - \frac{u}{2}) - V(q + \frac{u}{2}) \right) \right] \rho(q - \frac{u}{2}, q + \frac{u}{2}) \quad \text{(B.11)}$$

## B.2 Equazione di Liouville Quantistica

---

Differenziamo la funzione  $W(q, p, t)$  rispetto al tempo e sostituiamola nella (B.11):

$$\frac{\partial W(q, p, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int du e^{\frac{ipu}{\hbar}} \left[ -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial q \partial u} + \frac{1}{i\hbar} \left( V\left(q - \frac{u}{2}\right) - V\left(q + \frac{u}{2}\right) \right) \right] \rho \quad (\text{B.12})$$

In questa relazione possiamo trasformare il primo termine portando  $\frac{\partial}{\partial q}$  fuori il segno di integrale e integrando per parti su  $u$ ; in questo modo otteniamo

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int -\frac{i\hbar}{m} e^{\frac{ipu}{\hbar}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial q \partial u} du = \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{2\pi\hbar} \int \rho \frac{\partial}{\partial u} e^{\frac{ipu}{\hbar}} du = \frac{i\hbar}{m} \frac{ip}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial q} \quad (\text{B.13})$$

Il secondo termine, invece, può essere trasformato attraverso la relazione

$$u^n e^{\frac{ipu}{\hbar}} = \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right)^n e^{\frac{ipu}{\hbar}} \quad (\text{B.14})$$

da cui segue che, per funzioni  $V$  analitiche nel punto  $q$

$$V\left(q \pm \frac{u}{2}\right) e^{\frac{ipu}{\hbar}} = V\left(q \pm \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) e^{\frac{ipu}{\hbar}} \quad (\text{B.15})$$

Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int du \rho \left[ V\left(q - \frac{u}{2}\right) - V\left(q + \frac{u}{2}\right) \right] e^{\frac{ipu}{\hbar}} = \\ & = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int du \rho \left[ V\left(q - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] e^{\frac{ipu}{\hbar}} = \\ & = \frac{1}{i\hbar} \left[ V\left(q - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] W(q, p, t) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

In definitiva l'equazione di evoluzione per il simbolo di Wigner è

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{1}{i\hbar} \left[ V\left(q - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] W \quad (\text{B.17})$$

che chiameremo equazione di Liouville quantistica.

Se sviluppiamo il potenziale in serie nel punto  $q$ , questa equazione si può scrivere in forma del seguente sviluppo:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial q} - V'(q) \frac{\partial W}{\partial p} = \frac{\hbar}{24} V'''(q) \frac{\partial^3 W}{\partial p^3} + \dots \quad (\text{B.18})$$

quando trascuriamo le quantità dell'ordine di  $\hbar^2$  l'equazione di Liouville quantistica diventa la classica.

Esaminiamo più in dettaglio. Rappresentiamo l'equazione (B.17) nella forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial q} - V'(q) \frac{\partial W}{\partial p} = \frac{1}{i\hbar} \left[ V\left(q - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V'(q) \frac{\partial}{\partial p} \right] W \quad (\text{B.19})$$

e introduciamo la notazione

$$\Phi(q, p, t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ V\left(q - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V'(q) \frac{\partial}{\partial p} \right] W \quad (\text{B.20})$$

In questo modo possiamo scrivere l'equazione (B.19) in forma di equazione di Liouville classica non omogenea,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial q} - V'(q) \frac{\partial W}{\partial p} = \Phi(q, p, t) \quad (\text{B.21})$$

La soluzione dell'equazione (B.21), con la condizione iniziale  $W(q, p, 0) = W_0(q, p)$ , può essere scritta nella forma

$$W(q, p, t) = \iint G(p, q, t; p_0, q_0, 0) W_0(p_0, q_0) dp_0 dq_0 + \int_0^t dt_0 \iint G(p, q, t; p_0, q_0, t_0) \Phi(p_0, q_0, t_0) dp_0 dq_0 \quad (\text{B.22})$$

La  $G(p, q, t; p_0, q_0, 0)$  è la funzione di Green dell'equazione di Liouville classica ed ha la forma

$$G(p, q, t; p_0, q_0, t_0) = \delta(p - \bar{p}(t; t_0, p_0, q_0)) \delta(q - \bar{q}(t; t_0, p_0, q_0)) \quad (\text{B.23})$$

dove  $q$  e  $p$  sono le soluzioni delle equazioni del moto classiche

$$\frac{d}{dq} = \frac{\bar{p}}{m}, \quad \frac{d}{d\bar{p}} = -V'(\bar{q}) \quad (\text{B.24})$$

con le condizioni iniziali

$$\bar{p}(t_0; t_0, p_0, q_0) = p_0 \quad \bar{q}(t_0; t_0, p_0, q_0) = q_0 \quad (\text{B.25})$$

### B.3 Soluzione esplicita

---

Sostituiamo la  $\Phi$  nell'equazione (B.22) e otteniamo

$$\begin{aligned}
 W(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \int_t^0 dt_0 \iint G(p, q, t; p_0, q_0, t_0) \frac{1}{i\hbar} \times \\
 &\quad \times \left[ V\left(q - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - V'(q) \frac{\partial}{\partial p} \right] W(p_0, q_0, t_0) dp_0 dq_0
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

In questa relazione abbiamo introdotto la notazione

$$W^{(0)}(p, q, t) = \iint G(p, q, t; p_0, q_0, 0) W_0(p_0, q_0) dp_0 dq_0 \tag{B.27}$$

Se usiamo la trasformata di Fourier della funzione  $W(p_0, q_0, t_0)$  rispetto a  $p_0$  nel termine destro dell'equazione e facciamo agire l'operatore  $\frac{\partial}{\partial p_0}$  l'equazione prende la forma di un'equazione integrale pura:

$$\begin{aligned}
 W(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' dq' \iint d\lambda dp_0 \lambda G(p, q, t; p_0, q', t') \times \\
 &\quad \times \sin[\lambda(p_0 - p')] \left[ V'(q') - \frac{1}{\lambda\hbar} \left( V\left(q' + \frac{\lambda\hbar}{2}\right) - V\left(q' - \frac{\lambda\hbar}{2}\right) \right) \right] W(p', q', t')
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

La funzione  $W^{(0)}(p, q, t)$  è formalmente la soluzione dell'equazione classica di Liouville corrispondente alla distribuzione iniziale  $W_0(q, p)$

### B.3 Soluzione esplicita

Nella sezione precedente abbiamo scritto la soluzione dell'equazione di Liouville quantistica in termini di equazione integrale pura (B.28). Questa equazione si risolve iterativamente, quindi al primo ordine (in variabili

adimensionali) sarà

$$\begin{aligned}
 W(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' dq' \iint d\lambda dp_0 \lambda G(p, q, t; p_0, q', t') \times \\
 &\times \sin[\lambda(p_0 - p')] \left[ V'(q') - \frac{1}{\lambda} \left( V(q' + \frac{\lambda}{2}) - V(q' - \frac{\lambda}{2}) \right) \right] W_0(p', q')
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Sostituiamo in questa espressione il potenziale  $V(q) = q^4$

$$\begin{aligned}
 W^1(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' dq' \iint d\lambda dp_0 \lambda G(p, q, t; p_0, q', t') \times \\
 &\times \sin[\lambda(p_0 - p')] [-\lambda^2 q'] W_0(p', q')
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

La funzione di Green ha la forma (B.23) quindi il termine perturbativo diventa

$$\begin{aligned}
 W_{pert}^1(p, q, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' d\lambda \lambda^3 q'(t') \times \\
 &\times \sin[\lambda(p(t') - p')] W_0(p', q'(t'))
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

Risolviamo l'integrale in  $dp'$ :

$$\int dp' \sin[\lambda(p(t') - p')] e^{-(p'-p_z)^2} = -\sqrt{\pi} \sin[\lambda(p(t') - p_z)] e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \tag{B.32}$$

e sostituiamolo nel termine perturbativo (B.31)

$$\begin{aligned}
 W_{pert}^1(p, q, t) &= \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \iint dp' d\lambda \lambda^3 q(t') \sin[\lambda(p(t') - p')] W_0(p', q'(t')) = \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} \int_0^t dt' q(t') \int d\lambda \lambda^3 \sin[\lambda(p(t') - p_z)] e^{-\frac{\lambda^2}{4}} W_0(p', q'(t'))
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

## B.4 Adimensionalizzazione delle variabili

---

Resta l'integrale in  $d\lambda$

$$\begin{aligned} \int d\lambda \lambda^3 \sin[\lambda(p(t') - p_z)] e^{-\frac{\lambda^2}{4}} &= \\ &= -16\sqrt{\pi}(p(t') - p_z) [-3/2 + (p(t') - p_z)^2] e^{-(p(t') - p_z)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

che, sostituito nel termine perturbativo dà:

$$W_{pert}^1(p, q, t) = 8 \int_0^t dt' q'(t')(p(t') - p_z) [-3/2 + (p(t') - p_z)^2] W_0(q(t'), p(t')) \quad (\text{B.35})$$

In definitiva la soluzione dell'equazione di Liouville quantistica al primo ordine è

$$\begin{aligned} W^1(p, q, t) &= W^{(0)}(p, q, t) + \\ &+ 8 \int_0^t dt' q'(t')(p(t') - p_z) [-3/2 + (p(t') - p_z)^2] W_0(q(t'), p(t')) \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

## B.4 Adimensionalizzazione delle variabili

L'Hamiltoniana scelta per il confronto tra le evoluzioni classica e quantistica è

$$H = \frac{p^2}{2m} + kq^4 \quad (\text{B.37})$$

per semplicità ridefiniremo le variabili in modo da poter riscrivere tutto in variabili adimensionali:

$$\alpha q \rightarrow q \quad (\text{B.38})$$

$$\beta p \rightarrow p \quad (\text{B.39})$$

$$\tau t \rightarrow t \quad (\text{B.40})$$

$$\gamma H \rightarrow H \quad (\text{B.41})$$

Innanzitutto dobbiamo calcolare dimensione delle costanti:

$$[k] = \frac{E}{l^4} = \frac{m}{l^2 t^2} \quad (\text{B.42})$$

$$[\hbar] = \frac{ml^2}{t} \quad (\text{B.43})$$

$$[m] = m \quad (\text{B.44})$$

Cominciamo con  $\alpha$ :

$$\alpha = k^{\alpha_1} \hbar^{\alpha_2} m^{\alpha_3} = m^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} l^{-2\alpha_1 + 2\alpha_2} t^{-2\alpha_1 - \alpha_2} = l^{-1} \quad (\text{B.45})$$

quindi dobbiamo risolvere il sistema di equazioni:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (\text{B.46})$$

$$-2\alpha_1 + 2\alpha_2 = -1 \quad (\text{B.47})$$

$$-2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad (\text{B.48})$$

da cui

$$\alpha_1 = \frac{1}{6} \quad (\text{B.49})$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} \quad (\text{B.50})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{6} \quad (\text{B.51})$$

quindi

$$\alpha = k^{\frac{1}{6}} \hbar^{-\frac{1}{3}} m^{\frac{1}{6}} \quad (\text{B.52})$$

$$\beta = k^{\beta_1} \hbar^{\beta_2} m^{\beta_3} = m^{-1} l^{-1} t \quad (\text{B.53})$$

quindi dobbiamo risolvere il sistema di equazioni:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = -1 \quad (\text{B.54})$$

$$-2\beta_1 + 2\beta_2 = -1 \quad (\text{B.55})$$

$$-2\beta_1 - \beta_2 = 1 \quad (\text{B.56})$$

## B.4 Adimensionalizzazione delle variabili

---

da cui

$$\beta_1 = -\frac{1}{6} \quad (\text{B.57})$$

$$\beta_2 = -\frac{2}{3} \quad (\text{B.58})$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{6} \quad (\text{B.59})$$

$$\beta = k^{-\frac{1}{6}} \hbar^{-\frac{2}{3}} m^{-\frac{1}{6}} \quad (\text{B.60})$$

Infine

$$\gamma = k^{\gamma_1} \hbar^{\gamma_2} m^{\gamma_3} = m^{-1} l^{-2} t^2 \quad (\text{B.61})$$

quindi dobbiamo risolvere il sistema di equazioni:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -1 \quad (\text{B.62})$$

$$-2\gamma_1 + 2\gamma_2 = -2 \quad (\text{B.63})$$

$$-2\gamma_1 - \gamma_2 = 2 \quad (\text{B.64})$$

da cui

$$\gamma_1 = -\frac{1}{3} \quad (\text{B.65})$$

$$\gamma_2 = -\frac{4}{3} \quad (\text{B.66})$$

$$\gamma_3 = \frac{2}{3} \quad (\text{B.67})$$

$$\gamma = \hbar^{-\frac{4}{3}} m^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{B.68})$$



# Appendice C

## Programma

In questa appendice metteremo il programma usato per generare le figure. Dalle equazioni di Hamilton 4.14 si ottiene l'equazione differenziale non lineare:

```
FullSimplify[DSolve[x''[t] + x[t]^3 == 0, x, t]]
```

la cui soluzione è

$$q(t) = \sqrt[4]{2a} SN \left[ -\frac{\sqrt{\sqrt{2at^2} + 2\sqrt{2t}\sqrt{ab} + \sqrt{2ab^2}}}{\sqrt{2}}, -1 \right] \quad (C.1)$$

Questa sostituita in  $\dot{q} = p$  dà:

$$p(t) = -\frac{\sqrt[4]{a} (2\sqrt{2ab} + 2\sqrt{2at}) CN \left[ -\frac{\sqrt{\sqrt{2at^2} + 2\sqrt{2t}\sqrt{ab} + \sqrt{2ab^2}}}{\sqrt{2}}, -1 \right] DN \left[ -\frac{\sqrt{\sqrt{2at^2} + 2\sqrt{2t}\sqrt{ab} + \sqrt{2ab^2}}}{\sqrt{2}}, -1 \right]}{2^{\frac{5}{4}} \sqrt{\sqrt{2at^2} + 2\sqrt{2t}\sqrt{ab} + \sqrt{2ab^2}}} \quad (C.2)$$

I coefficienti a e b sono funzioni dei valori iniziali. Abbiamo costruito una matrice di zeri  $32 \times 32$

```
npoit = 32
```

```
abtab = Table[{0, 0}, {i, 1, npoit}, {j, 1, npoit}]
```

Poi abbiamo costruito due tabelle di valori iniziali

```

iiniz = -3
ifin = 1
jiniz = -3
jfin = 1

```

```

xx = Table[i + 1, {i, iiniz, ifin, (ifin - iiniz)(npoit - 1)},
  {j, jiniz, jfin, (jfin - jiniz)(npoit - 1)}];
pp = Table[j + 1, {i, iiniz, ifin, (ifin - iiniz)(npoit - 1)},
  {j, jiniz, jfin, (jfin - jiniz)/(npoit - 1)}];

```

e abbiamo sostituito, nella tabella abtab, agli zeri le radici delle equazioni  $x[0]=xx$  e  $p[0]=pp$ .

```

Chop[Do[abtab[[1, i]] = FindRoot[{x[0] == xx[[1, i]],
p[0] == pp[[1, i]]}, {a, a /. abtab[[1, i - 1]]},
{b, b /. abtab[[1, i - 1]]}, MaxIterations -> 1000,
WorkingPrecision -> 40], {i, 2, npoit}]]

```

```

Chop[Do[abtab[[i, 1]] = FindRoot[{x[0] == xx[[i, 1]],
p[0] == pp[[i, 1]]}, {a, a /. abtab[[i - 1, 1]]},
{b, b /. abtab[[i - 1, 1]]}, MaxIterations -> 1000,
WorkingPrecision -> 40], {i, 2, npoit}]]

```

```

Chop[Do[Do[abtab[[i, j]] = FindRoot[{x1[0] == xx[[i, j]],
p1[0] == pp[[i, j]]}, {a, a /. abtab[[i, j - 1]]},
{b, b /. abtab[[i, j - 1]]}, MaxIterations -> 1000,
WorkingPrecision -> 40], {i, 2, npoit}], {j, 2, npoit}]]

```

In questo modo abbiamo costruito una matrice  $32 \times 32$  di valori (a,b) associati ai dati iniziali scelti. Attraverso i due seguenti sistemi abbiamo controllato che, una volta sostituiti i valori a e b restituissero i dati iniziali assegnati

```

xfound = Chop[Table[x[0] /. abtab[[i, j]], {i, npoit}, {j, npoit}]];
N[xx];
Chop[xx - xfound];

```

---

```

pfound = Chop[Table[p[0] /. abtab[[i, j]], {i, npoit}, {j, npoit}]];
pp;
Chop[pp - pfound];

```

In entrambi i casi c'è una riga di valori in cui valore trovato e valore assegnato non coincidono esattamente. Una volta sostituiti i valori di  $a$  e  $b$  nelle soluzioni generiche  $x[t]$  e  $p[t]$  abbiamo calcolato i valori che su questa griglia assume la soluzione dell'equazione di Liouville per diversi valori del tempo

```

classica =Table[Exp[Re[-(x[t] - x0)^2 - (p1[t] - p0)^2] /.
abtab[[i, j]]], {i, npoit}, {j, npoit}]

```

La tabella risultante è stata interpolata per eliminare eventuali errori di calcolo

```

appc = ListInterpolation[classica]

```

Il termine perturbativo è l'integrale rispetto al tempo di

```

pert := (x1[t] - x0)(p1[t] - p0)(-3/2 + (p1[t] - p0)^2)
Exp[-(p1[t] - p0)^2] Exp[-(x1[t] - x0)^2]

```

Anche in questo termine abbiamo sostituito la matrice di valori  $a$  e  $b$  e abbiamo ottenuto una matrice di valori dipendenti solo dal tempo dell'integrando:

```

integrando = Chop[Table[N[pert/.abtab[[i, j]]], {i, npoit}, {j, npoit}]]

```

L'integrale infine è stato risolto numericamente per diversi valori del tempo

```

pert = Table[NIntegrate[integrando[[i, j]], {t, 0, t'},
WorkingPrecision -> 40], {i, npoit}, {j, npoit}]

```

e le tabelle risultanti sono state interpolate

```

app = ListInterpolation[pert]

```



# Bibliografia

- [1] V. Man'ko, O. Man'ko, P.Vitale *Duality symmetry for star products*, arXiv:hep-th/0407131 15 July 2004
- [2] V. Man'ko, O. Man'ko, G. Marmo *Alternative commutation relations, star products and tomography*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**(2002)699-719
- [3] Tatarskii *Foundations of Quantum Group Theory*, Sov. Phys. Usp. **24**(4), April 1983
- [4] Y.M. Shirokov *Perturbation theory with respect to Planck's constant* Teor.Mat. Fizica, Vol.31, No. 3, June 1977
- [5] J.E. Moyal *Quantum mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Cambridge Phyl. Soc. **45** (1949) 99
- [6] E.Wigner *On the Quantum Correction for thermodynamic Equilibrium* Phys. Rev. **40** June 1932
- [7] Sudarshan, Mukunda *Classical Dynamics: A Modern Prospective*
- [8] Arnold *Metodi Matematici della Meccanica Classica*
- [9] A.Romano *Meccanica Analitica*
- [10] Marmo, Esposito, Sudarshan *From Classical to Quantum Mechanics*
- [11] Caldirola, Cirelli, Prosperi *Introduzione alla Fisica Teorica*
- [12] C.Cohen-Tannoudji, F.Laloe, B.Diu *Quantum Mechanics*

- [13] V.I. Smirnov *Corso di Matematica Superiore* Vol.3
- [14] G.Cosenza *Lezioni di Metodi Matematici della Fisica*