

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
FEDERICO II

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

TESI DI LAUREA IN FISICA

**Trasformazioni di Supersimmetria in  
Meccanica Quantistica**

Relatore

Prof. Fedele Lizzi

Candidato

Marco de Cesare

matr. 567/625

ANNO ACCADEMICO 2009/2010



## **Sommario**

La supersimmetria in meccanica quantistica è una simmetria tra i gradi di libertà spaziali e quelli interni fermionici. Si spiegherà cosa si intende per grado di libertà fermionico per poi vedere come si modella una dinamica per un sistema con gradi di libertà di entrambi questi due tipi. Ciò sarà fatto in ambito quantistico e classico.



# Indice

<b>0</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Oscillatore Fermionico</b>	<b>7</b>
1.1	Stati coerenti fermionici e algebra di Grassmann . . . . .	11
1.2	Calcolo differenziale e integrale nell'algebra di Grassmann . . .	13
<b>2</b>	<b>Supersimmetria in meccanica quantistica</b>	<b>19</b>
2.1	Oscillatore armonico supersimmetrico . . . . .	19
2.2	Costruzione di hamiltoniane simmetriche . . . . .	21
2.3	Rottura della supersimmetria . . . . .	23
2.4	Estensione dell'algebra di supersimmetria . . . . .	24
2.5	Superalgebra di Lie . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Costruzione di un modello supersimmetrico classico</b>	<b>27</b>
<b>A</b>	<b>Algebre e gruppi di Lie</b>	<b>35</b>
<b>B</b>	<b>Dettagli sui calcoli relativi all'oscillatore fermionico</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>



# Capitolo 0

## Introduzione

Una simmetria per un sistema fisico è l'invarianza della dinamica rispetto a una certa trasformazione. Tra le simmetrie cui si è abituati classicamente, particolare rilievo spetta ai gruppi continui di trasformazioni, anche nella versione infinitesima di algebre di Lie. Un esempio classico è fornito da traslazioni e rotazioni. Il formalismo di Hamilton ci consente di individuare le simmetrie di un sistema meccanico a partire da quelle della funzione hamiltoniana, che racchiude in sé tutta la dinamica del sistema. L'importanza delle simmetrie in Fisica tuttavia è stabilita da un fondamentale teorema dovuto ad Emy Noether, che associa ad ogni simmetria della funzione hamiltoniana, sotto ipotesi sufficientemente generali, un integrale primo, ovvero una grandezza che viene conservata evolvendo il sistema. Si ha un integrale primo ogni qualvolta la parentesi di Poisson di una funzione con l'hamiltoniana è nulla, ovvero il campo vettoriale tangente al flusso di fase che essa genera commuta con quello dinamico. In meccanica quantistica la situazione è analoga dato che all'algebra di Lie delle funzioni subentra quella degli operatori, e alla parentesi di Poisson il commutatore. Questo è vero per quelli che si dicono sistemi bosonici, ovvero dotati solo di gradi di libertà spaziali. Le simmetrie sono inoltre una guida indispensabile nella modellizzazione di fenomeni fisici, infatti in moltissimi casi si riescono a costruire modelli predittivi semplicemente imponendo che la dinamica osservi determinate simmetrie. Queste possono avere un riscontro sperimentale, come quando si osserva la conservazione di una grandezza fisica associata alla simmetria, oppure nascere sul piano puramente teorico.

Quello che ci si propone in questa tesi è innanzitutto lo studio di sistemi con gradi di libertà interni fermionici, e della corrispondente algebra degli

operatori. L'algebra che viene associata naturalmente a questi sistemi si mostrerà essere differente da quella di Lie, dovendo sostituire in alcuni casi al commutatore l'anticommutatore: ciò è necessario per codificare il principio di esclusione, che vale per i fermioni. Vedremo poi come sia possibile costruire nell'ambito della meccanica quantistica una particolare simmetria, che si distingue in modo netto da tutte le simmetrie 'classiche', nota come supersimmetria e che collega i gradi di libertà spaziali a quelli interni.

Nel primo capitolo introdurremo l'oscillatore fermionico con i relativi operatori e variabili anticommutanti. Studieremo gli stati coerenti fermionici e le variabili grassmanniane (anticommutanti).

Nel secondo capitolo si mostrerà come sia possibile costruire un modello di supersimmetria già in meccanica quantistica unidimensionale, e si illustrerà il concetto di rottura della supersimmetria. La struttura algebrica detta superalgebra è una naturale generalizzazione dell'algebra di Lie al caso in cui al sistema sono associati operatori fermionici oltre agli usuali operatori bosonici.

Nel terzo capitolo si fornisce la corrispondente formulazione classica del modello supersimmetrico ricavando, in forma originale, l'espressione della parentesi di Poisson fermionica. In una prima appendice vengono richiamate le algebre ed i gruppi di Lie, mentre una seconda appendice mostra alcuni dettagli dei calcoli relativi all'oscillatore fermionico.

# Capitolo 1

## Oscillatore Fermionico

Tra i sistemi più semplici che si possono immaginare in meccanica classica, un posto di rilievo spetta all'oscillatore armonico. Come è noto esso è uno dei più importanti ed utili, dato che ogni sistema fisico vicino all'equilibrio può essere descritto con sufficiente precisione da un sistema di tanti oscillatori quanti sono i gradi di libertà del sistema. Lo spazio delle fasi di un oscillatore unidimensionale è il piano  $(q, p)$ , ove  $q$  rappresenta la posizione, mentre  $p$  è il momento canonico. L'hamiltoniana di questo sistema in variabili adimensionali si scrive

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) \quad (1.1)$$

Le parentesi di Poisson dotano lo spazio delle funzioni definite sullo spazio delle fasi, con opportune ipotesi di regolarità, di struttura di algebra di Lie (per le algebre di Lie si rimanda all'appendice). Le parentesi fondamentali sono

$$\{q, q\}_P = \{p, p\}_P = 0 \quad \{q, p\}_P = 1 \quad (1.2)$$

Consideriamo le variabili

$$z = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z} = \frac{q - ip}{\sqrt{2}}, \quad (1.3)$$

il che equivale a identificare lo spazio delle fasi con il piano complesso. In termini del numero complesso  $z$  e del suo coniugato  $\bar{z}$ , l'hamiltoniana si scrive

$$H = z\bar{z}, \quad (1.4)$$

mentre l'algebra di Lie è costruita a partire dalle seguenti parentesi di Poisson

$$\{z, z\}_P = \{\bar{z}, \bar{z}\}_P = 0, \quad \{z, \bar{z}\}_P = -i \quad (1.5)$$

E' bene notare che in queste nuove coordinate le equazioni di Hamilton conservano la forma usuale, pur non essendo  $(q, p) \rightarrow (z, \bar{z})$  una trasformazione canonica.

$$\dot{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q} + i\dot{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\{q, H\}_P + i\{p, H\}_P) = \{z, H\}_P \quad (1.6)$$

$$\dot{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q} - i\dot{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\{q, H\}_P - i\{p, H\}_P) = \{\bar{z}, H\}_P \quad (1.7)$$

ovvero

$$\dot{z} = -iz \quad (1.8)$$

$$\dot{\bar{z}} = i\bar{z}. \quad (1.9)$$

Questo significa che  $z$  è un vettore che ruota nel piano complesso con velocità angolare costante. Ovviamente  $\bar{z}$  ruota con velocità angolare opposta. Gli stati fisici di un sistema quantistico sono vettori dello spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato sommabile sullo spazio delle configurazioni. Per l'oscillatore armonico lo spazio delle configurazioni è una retta, lo spazio di Hilbert sarà allora  $\mathcal{L}^2_{(\mathbb{R})}$ . Le osservabili classiche sono funzioni definite sullo spazio delle fasi: a queste vengono fatte corrispondere operatori hermitiani sullo spazio di Hilbert. L'algebra di Lie degli operatori viene costruita per corrispondenza a partire da quella classica poissoniana tramite l'associazione (a patto che non sorgano ambiguità di ordinamento, che richiedono una opportuna simmetrizzazione)

$$\{, \}_P \rightarrow \frac{1}{i}[, ] \quad (1.10)$$

Questo a patto che non sorgano ambiguità di ordinamento, che richiedono un opportuno schema di quantizzazione. L'Hamiltoniana quantistica si può riscrivere come

$$H = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (1.11)$$

con gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  che rappresentano la versione quantistica delle coordinate complesse classiche  $z$  e  $\bar{z}$ , e che soddisfano le seguenti regole di commutazione

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (1.12)$$

Lo spettro di questa hamiltoniana è risolubile per via algebrica, è puramente discreto e dato dai numeri seminteri positivi. Le caratteristiche dell'algebra di

Lie che si può associare a questo sistema, a livello sia classico che quantistico, saranno fondamentali nello sviluppo di quanto segue.

Per un sistema a particella singola gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$ , agendo su un autostato dell'energia, alzano o abbassano il livello energetico corrispondente al suo autovalore. Per questo ci si riferisce ad essi rispettivamente come agli operatori di distruzione e di creazione, mentre

$$N = a^\dagger a \quad (1.13)$$

è chiamato l'operatore numero, ovvero indicizza i livelli dell'energia. Questa stessa algebra può essere generalizzata per descrivere un sistema di più particelle non interagenti che obbediscono alla statistica di Bose.

Intendiamo ora, guidati dall'analogia formale, costruire un'algebra di operatori da poter associare a gradi di libertà fermionici. Ricordiamo che un fermione è una particella che ubbidisce al principio di esclusione di Pauli, il quale asserisce che due particelle identiche non possono avere gli stessi numeri quantici. Per un sistema unidimensionale, tenendo conto dei soli gradi di libertà spaziali, è possibile avere un unico numero quantico indipendente: l'energia. Se si considera anche lo spin, invece, abbiamo un ulteriore numero quantico, che per un elettrone può assumere i due valori  $\pm\frac{1}{2}$ . Introduciamo dunque gli operatori  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  per i quali valgono le seguenti regole di anticommutazione

$$\{\psi, \psi^\dagger\} = 1 \quad \{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0 \quad (1.14)$$

dove l'anticommutatore di due operatori  $A$  e  $B$  è definito come

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (1.15)$$

Le ultime due ci dicono che  $\psi^2 = (\psi^\dagger)^2 = 0$ , ovvero non è possibile porre due fermioni nello stesso livello energetico e con lo stesso spin, per questo non sono altro che un modo di esprimere il principio di esclusione di Pauli. Come appena ricordato lo spin dell'elettrone lungo un asse di quantizzazione può assumere solo due valori distinti: è quindi naturale aspettarsi che la giusta descrizione della parte di spin della funzione d'onda sia fornita da una rappresentazione bidimensionale. La prima fornisce invece una decomposizione dell'identità in termini dei prodotti di  $\psi$ ,  $\psi^\dagger$ . Le (1.14) ci consentiranno di riferirci ad essi essenzialmente come agli operatori di creazione e di distruzione fermionici, mentre in analogia con la (1.13)

$$F = \psi^\dagger \psi \quad (1.16)$$

sarà detto l'operatore numero fermionico, il tutto in piena analogia con i corrispondenti operatori bosonici. Di questi è possibile dare una rappresentazione in termini di matrici  $2 \times 2$

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \psi^\dagger \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Chiameremo oscillatore armonico fermionico il sistema cui è associata l'hamiltoniana

$$H_F = \frac{1}{2}(\psi^\dagger \psi - \psi \psi^\dagger) = \psi^\dagger \psi - \frac{1}{2} \quad (1.18)$$

Data la nilpotenza degli operatori  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  si può vedere che lo spettro della nuova hamiltoniana è rappresentato dai soli due valori  $\pm \frac{1}{2}$ , che coincidono con i due valori possibili dello spin. Notiamo che

$$\psi = \sigma_+ \quad (1.19)$$

$$\psi^\dagger = \sigma_- \quad (1.20)$$

essendo  $\sigma_\pm = \frac{\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2}$ , ove  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono rispettivamente la prima e la seconda matrice di Pauli. Ricordiamo che le matrici di Pauli, ovvero i generatori dell'algebra di Lie  $su(2)$ , dovendo rappresentare le componenti di un momento angolare, soddisfano le seguenti relazioni

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (1.21)$$

Esse soddisfano inoltre le seguenti identità

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (1.22)$$

da cui segue

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (1.23)$$

La prima equazione fa evidentemente ricorso al fatto che l'algebra  $su(2)$  è tridimensionale. L'ultima è invece libera da questo vincolo. Generalizziamo perciò l'algebra di Clifford al caso di  $n$  generatori ( $\sigma_i$ ) tramite la (1.23), dicendo che essa deve valere  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Notiamo che l'algebra di Clifford è anche un'algebra del momento angolare solo per  $n = 3$ .

## 1.1 Stati coerenti fermionici e algebra di Grassmann

Per un oscillatore armonico bosonico gli stati coerenti sono definiti come autostati dell'operatore di distruzione bosonico  $a$ :

$$a|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle \quad (1.24)$$

L'operatore  $a$  non è autoaggiunto. Non è quindi possibile definire il suo valor medio su uno stato. È pur sempre possibile invece definirne formalmente il valore di aspettazione nel modo seguente

$$\langle a \rangle = \langle \mu | (a | \mu \rangle) \quad (1.25)$$

Se  $|\mu\rangle$  è uno stato coerente allora

$$\langle a \rangle_t = e^{-it} \langle a \rangle_0, \quad (1.26)$$

si prova inoltre che  $(\Delta x)^2$  resta costante. Questi due risultati stanno a significare che tramite questi stati è possibile riprodurre a livello quantistico il comportamento del sistema classico corrispondente, il che giustifica l'uso dell'attributo coerente e la grande importanza rivestita da questi stati in meccanica quantistica. Analogamente, possiamo definire gli stati coerenti di un oscillatore fermionico come autostati dell'operatore di distruzione fermionico  $\psi$ .

$$\psi|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle \quad (1.27)$$

dove  $\theta$  rappresenta l'autovalore relativo all'autostato  $|\theta\rangle$ . Sfruttiamo la rappresentazione bidimensionale dello spazio degli stati per determinare i coefficienti di  $|\phi\rangle$

$$\psi(|0\rangle + \gamma|1\rangle) = \psi\gamma|1\rangle = \theta(|0\rangle + \gamma|1\rangle) \quad (1.28)$$

da ciò discende la seguente coppia di equazioni

$$\psi\gamma|1\rangle = \theta|0\rangle, \quad \theta\gamma|1\rangle = 0 \quad (1.29)$$

che possono essere soddisfatte solo con le seguenti assunzioni

$$\gamma = -\theta, \quad \psi\gamma = -\gamma\psi, \quad \theta^2 = 0 \quad (1.30)$$

Come è chiaro l'unico numero complesso con queste proprietà è lo zero.

Per costruire stati coerenti non banali abbandoniamo dunque l'idea che i nostri vettori siano in  $\mathbb{C}^2$ , ammettendo che i coefficienti di decomposizione di uno stato nei confronti di una data base possano essere anche elementi dell'algebra di Grassmann. L'algebra di Grassmann svolgerà la controparte nel caso fermionico di ciò che il campo complesso rappresenta nel caso bosonico. Si tratta in sostanza di 'numeri' che anticommutano tra loro, e saranno necessari nel seguito per rappresentare in termini classici un sistema dotato di gradi di libertà fermionici. Con riferimento a quanto scritto sopra:

$$\{\theta, \theta\} = \{\theta, \psi\} = \{\theta, \psi^\dagger\} = 0 \quad (1.31)$$

Passiamo ora a definire l'algebra di Grassmann in modo del tutto generale nel caso a più dimensioni. Siano  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n$  degli oggetti che soddisfano le seguenti regole di anticommutazione:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad \forall i, j \quad (1.32)$$

Lo spazio lineare sul campo complesso generato da questi, munito della parentesi di anticommutazione  $\{, \}$  prende nome di algebra di Grassmann  $n$ -dimensionale, che noi denoteremo con  $\Lambda^n$ . La (1.32) significa che le coordinate dello spazio in cui "vivono" i gradi di libertà fermionici sono nilpotenti ovvero, in termini intuitivi, fare due passi nella stessa direzione in questo spazio significa arrivare nello zero, così come il fatto che, presi due indici  $i$  e  $j$  distinti,  $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$ , vuol dire che se misuro l'area di un rettangolo, a seconda di come dispongo i fattori nel prodotto ottengo un diverso segno per il risultato. Questo ci fa inoltre intuire un possibile legame tra l'algebra di Grassmann e quella esterna delle forme differenziali su una varietà.

È immediato verificare che valgono le relazioni:

$$\theta_k^2 = 0 \quad \forall k \quad (1.33)$$

$$\theta_{k_1}\theta_{k_2}\dots\theta_{k_n} = \varepsilon_{k_1k_2\dots k_n}\theta_1\theta_2\dots\theta_n \quad (1.34)$$

In base a queste relazioni possiamo affermare che il generico elemento dell'algebra è un polinomio di grado al più  $n$  nelle variabili grassmanniane, la potenza massima con cui compare ogni generatore essendo pari ad uno.

Distinguiamo nell'algebra due sottospazi  $\Lambda_+^n$  e  $\Lambda_-^n$ , generati rispettivamente dai monomi di grado pari e dispari nelle  $\theta_k$ , di modo che  $\Lambda^n = \Lambda_+^n \oplus \Lambda_-^n$ .

Una funzione delle variabili grassmanniane è definita dal suo sviluppo in serie di McLaurin. Questo sviluppo nel caso particolare delle funzioni di una variabile  $\theta$  si arresta al primo ordine, data la nilpotenza di  $\theta$ .

$$f(\theta) = \sum_k \frac{f^{(k)}}{k!} \theta^k = f(0) + f'(0)\theta \quad (1.35)$$

Questo ci suggerisce immediatamente che l'algebra  $\Lambda^n$  e il gruppo, ottenuto tramite esponenziazione dei generatori, coincidono, eccettuato il fatto che nel gruppo bisogna aggiungere l'identità.

Quanto detto a proposito dell'algebra di Grassmann ci permette di costruire stati coerenti a partire dal vuoto tramite esponenziazione di  $\psi^\dagger$

$$|\theta\rangle = e^{\psi^\dagger \theta} |0\rangle. \quad (1.36)$$

Notiamo che per l'oscillatore fermionico è possibile definire stati coerenti anche come autovettori dell'operatore di creazione, mentre nel caso bosonico questi non risultano normalizzabili.

## 1.2 Calcolo differenziale e integrale nell'algebra di Grassmann

Usualmente si definiscono le derivate in analisi mediante il limite del rapporto incrementale. Tuttavia questa definizione dipende esplicitamente dalla metrica, poichè abbiamo bisogno di una nozione di distanza per definire l'incremento. Possiamo però astrarre dalla nozione usuale di derivata le caratteristiche salienti, ovvero la sua linearità e il fatto che agisce su un prodotto secondo la regola di Leibniz, in modo da poterla estendere a spazi non necessariamente provvisti di una metrica. Non solo, una volta definita una derivata su un certo spazio, ne controlliamo automaticamente la topologia, poichè gli aperti sono costruiti in modo da rendere continue le operazioni algebriche. Questo è uno dei motivi per cui le algebre di Lie rivestono un ruolo così importante, poichè la parentesi agisce a tutti gli effetti come una derivazione. Per poter definire una derivata grassmanniana ciò di cui abbiamo bisogno è una regola di Leibniz: questa non potrà però assumere la forma nota, dato che, come sappiamo, scambiando l'ordine in cui compaiono i fattori in un prodotto otteniamo un cambiamento di segno. Conveniamo di

far agire l'operatore differenziale a sinistra della funzione. È possibile dare la seguente forma alla regola di Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(\theta_j \theta_k) = \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_i} \theta_k - \theta_j \frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_i}. \quad (1.37)$$

Stabiliamo che le derivate delle funzioni coordinate siano date dalla seguente formula a una variabile di Grassmann nel modo seguente:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij}. \quad (1.38)$$

In tal modo l'operazione di derivazione rispetto a ciascuna delle  $\theta_i$  per una funzione su  $\Lambda^n$  è ben definita.

In base a come abbiamo definito gli operatori di derivazione e le operazioni interne a  $\Lambda^n$  abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} = 0 \quad (1.39)$$

infatti, poichè ogni funzione grassmanniana è un polinomio di grado al più  $n$  nelle  $\theta_i$ , possiamo considerare semplicemente l'azione di un operatore del secondo ordine su un monomio di ordine 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}(\theta_h \theta_k) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}(\delta_{jh} \theta_k - \theta_h \delta_{jk}) = \delta_{jh} \delta_{ik} - \delta_{ih} \delta_{jk} = \varepsilon_{\alpha ji} \varepsilon_{\alpha hk} = \\ &= -\varepsilon_{\alpha ij} \varepsilon_{\alpha hk} = -\frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i}(\theta_h \theta_k) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Quindi gli operatori di derivazione sono nilpotenti di ordine 2. Definiamo l'integrale rispetto a una variabile grassmanniana come integrale definito esteso a tutto  $\Lambda^n$ . Vogliamo che abbia proprietà simili a quelle di una funzione sommabile sulla retta reale, ovvero che, se  $D$  è l'operatore di derivazione e  $f$  una generica funzione della variabile anticommutante  $\theta$ :

- $D \int d\theta f(\theta) = 0$
- $\int d\theta (Df(\theta)) = 0$
- $\int d\theta A f(\theta) = A \int d\theta f(\theta)$ , se  $A$  è una costante

Per giungere a una definizione opportuna dell'operazione di derivazione richiediamo inoltre che sia invariante per traslazione

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta f(\theta + \eta) \quad (1.41)$$

Integrando una funzione affine

$$\int d\theta(A + B\theta) = A \int d\theta + B \int d\theta\theta \quad (1.42)$$

e sfruttando l'invarianza per traslazione

$$\int d\theta(A + B\theta) = \int d\theta' \left[ A + B \left( \theta' - \frac{A}{B} \right) \right] = B \int d\theta' \theta' \quad (1.43)$$

Uguagliando queste due espressioni abbiamo

$$\int d\theta = 0 \quad (1.44)$$

mentre poniamo, dato che l'integrale di  $\theta$  è una costante,  $\int d\theta\theta = 1$ . Con questa convenzione otteniamo  $\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta)$ . L'integrale multiplo

$$\int d\theta^1 d\theta^2 \dots d\theta^n f(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n) \quad (1.45)$$

è definito tramite la regola di Fubini, con l'accortezza di effettuare prima l'integrale rispetto alla variabile con lo stesso nome del differenziale più interno, ovvero

$$\int d\theta^1 d\theta^2 \dots d\theta^n f(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n) = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \dots \frac{\partial}{\partial\theta_n} f(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n) \quad (1.46)$$

Vogliamo adesso stabilire una formula per il cambiamento di variabili. Posto  $\theta'_i = a_{ij}\theta_j$ , con  $\det(a_{ij}) \neq 0$ , si ha

$$\int \prod_i d\theta'_i \quad (1.47)$$

Da qui possiamo trarre la seguente formula di trasformazione per la  $n$ -forma di volume

$$d\theta'_1 \wedge d\theta'_2 \wedge \dots \wedge d\theta'_n = \frac{1}{\det(a)} d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge \dots \wedge d\theta_n. \quad (1.48)$$

Confrontando questa formula con quella per il cambiamento di variabili in una  $n$ -forma su  $\mathbb{R}^n$

$$dx'_1 \wedge dx'_2 \wedge \dots \wedge dx'_n = \det(a) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (1.49)$$

osserviamo che nella prima formula il determinante compare al denominatore, laddove nella seconda è invece al numeratore. È bene notare che la definizione di integrale fornita è puramente algebrica, e non è riconducibile all'ordinaria definizione di Lebesgue. Sulla base di quanto detto prima, calcoliamo l'integrale gaussiano su  $\Lambda^2$ :

$$\int d\bar{\theta}d\theta e^{-b\bar{\theta}\theta} = \int d\bar{\theta}d\theta(1 - b\bar{\theta}\theta) = b \quad (1.50)$$

contrariamente a quanto si verificava in  $\mathbb{C}$ , dove

$$\int d\bar{z} \wedge dz e^{-b\bar{z}z} = \frac{2\pi i}{b}. \quad (1.51)$$

Per il calcolo dell'integrale gaussiano in più dimensioni è utile osservare che l'integrale di una funzione grassmanniana su variabili grassmanniane complesse è invariante per trasformazioni unitarie.

$$\prod_i \xi'_i \quad (1.52)$$

In un integrale del tipo

$$\left( \prod_i \int d\xi_i^* d\xi_i \right) f(\xi^*, \xi) \quad (1.53)$$

l'unico termine che sopravvive ha esattamente un solo fattore di ogni  $\xi_i$  ed uno di ogni  $\xi_i^*$ ; risulta così proporzionale a

$$\left( \prod_i \xi_i \right) \left( \prod_i \xi_i^* \right). \quad (1.54)$$

Per quanto detto sopra, sotto la trasformazione unitaria  $\xi \rightarrow U\xi$  questo termine varia per un fattore

$$(\det U) (\det U^*) = 1 \quad (1.55)$$

Se abbiamo quindi l'integrale

$$\left( \prod_i \int d\xi_i^* d\xi_i \right) e^{-\xi_i^* B_{ij} \xi_j} \quad (1.56)$$

con B matrice hermitiana i cui autovalori indichiamo con  $b_i$ , otteniamo

$$\left( \prod_i \int d\xi_i^* d\xi_i \right) e^{-\xi_i^* B_{ij} \xi_j} = \left( \prod_i \int d\xi_i^* d\xi_i \right) e^{-\xi_i^* b_i \xi_i} = \prod_i b_i = \det B \quad (1.57)$$

Questa è detta formula di Berezin.

La definizione dell'integrale di Grassmann ci consente di esprimere la relazione di completezza per la base degli stati coerenti dell'oscillatore fermionico

$$\int d\bar{\theta} d\theta |\theta\rangle \langle \theta| e^{-\bar{\theta}\theta} = 1 \quad (1.58)$$



## Capitolo 2

# Supersimmetria in meccanica quantistica

In questo capitolo studieremo la dinamica di un sistema con gradi di libertà sia bosonici che fermionici, legati gli uni agli altri da una simmetria interna che andremo a definire. Per semplificare la trattazione analizzeremo dapprima sistemi unidimensionali. Assoceremo una funzione d'onda a quadrato sommabile a ciascuno dei due gradi di libertà; in questo modo lo spazio di Hilbert risulterà diviso in due settori, ovvero  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ . Conveniamo di chiamare settore bosonico il primo, fermionico il secondo. Gli operatori che rappresentano trasformazioni lineari di un settore nell'altro saranno detti fermionici, bosonici gli altri.

### 2.1 Oscillatore armonico supersimmetrico

L'esempio più semplice per la costruzione di un modello di supersimmetria in meccanica quantistica è ovviamente quello dell'oscillatore armonico. L'hamiltoniana di questo sistema, dato che lo spazio di Hilbert è per definizione il prodotto tensore di quello dell'oscillatore bosonico per quello dell'oscillatore fermionico, è, naturalmente, separabile ed uguale alla somma delle due hamiltoniane in questione. Osserviamo innanzitutto che l'energia di punto zero per un oscillatore bosonico è  $\frac{1}{2}$ , mentre per uno fermionico è  $-\frac{1}{2}$ , sicché per il sistema composito essa è automaticamente nulla (rinormalizzata).

Introduciamo gli operatori fermionici

$$Q = a\psi^\dagger \quad (2.1)$$

$$Q^\dagger = a^\dagger\psi \quad (2.2)$$

L'anticommutatore  $\{Q, Q^\dagger\}$  è un operatore bosonico, infatti

$$QQ^\dagger + Q^\dagger Q = a\psi^\dagger a^\dagger\psi + a^\dagger\psi a\psi^\dagger = aa^\dagger\psi^\dagger\psi + a^\dagger a\psi\psi^\dagger = \quad (2.3)$$

$$= \psi^\dagger\psi + \{\psi, \psi^\dagger\}a^\dagger a = \psi^\dagger\psi + \{\psi, \psi^\dagger\}a^\dagger a = \quad (2.4)$$

$$= \psi^\dagger\psi + a^\dagger a, \quad (2.5)$$

possiamo allora considerare l'hamiltoniana totale come somma dell'operatore numero bosonico e del numero fermionico

$$H = N + F. \quad (2.6)$$

Come già detto  $F$  può assumere solo i valori 0 e 1, mentre  $N$ , anch'esso definito non negativo, non è superiormente limitato. Potendo assumere solo due valori distinti,  $F$  indicherà la presenza o meno di un livello di eccitazione fermionica. Sfruttando la rappresentazione matriciale di cui alla (1.17) caratterizziamo il primo settore, quello bosonico, come relativo ad  $F = 0$ , mentre per il secondo, fermionico,  $F = 1$ . Li si dirà rispettivamente settore bosonico e fermionico. In pratica, l'hamiltoniana del sistema composito è definita in modo tale che essa 'conta' i livelli di eccitazione sia bosonica sia fermionica. Intendendo in questo modo l'hamiltoniana, gli stati sono usualmente rappresentati nello spazio di Fock, dove gli autostati sono indicizzati dagli autovalori di  $N$  e di  $F$ ,  $|n_B, n_F\rangle = |n_B\rangle|n_F\rangle$ . È anche utilizzata una rappresentazione di tipo misto, in cui  $|n_B\rangle$  è dato nella rappresentazione di Schrödinger, mentre per  $|n_F\rangle$  si usa quella di Fock.

L'hamiltoniana totale si può esprimere in forma matriciale

$$H = \begin{pmatrix} a^\dagger a & \\ & a^\dagger a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\dagger a & \\ & aa^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & \\ & H_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$H_2$  sarà detto il partner supersimmetrico di  $H_1$ . Vediamo allora che, essendo quest'hamiltoniana diagonale,  $H_1$  fornisce la dinamica nel settore bosonico,  $H_2$  in quello fermionico. Osserviamo ora che sia  $Q$  che  $Q^\dagger$  commutano con l'hamiltoniana. Questi operatori rappresentano allora una particolare simmetria del sistema, che consiste nello scambio di gradi di libertà bosonici con fermionici e viceversa.

Questo semplice esempio può essere elevato a modello di ciò che intendiamo per supersimmetria.

## 2.2 Costruzione di hamiltoniane simmetriche

Ci apprestiamo ora a generalizzare la costruzione di modello meccanico supersimmetrico, presentata prima per l'oscillatore armonico. Si consideri un sistema quantistico unidimensionale la cui dinamica è descritta da un'hamiltoniana  $H_1$  il cui autovalore minimo è pari a zero.

Poichè l'equazione di Schrödinger per gli stati stazionari si scrive

$$H_1\varphi \equiv -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\varphi + V_1(x)\varphi = E\varphi \quad (2.8)$$

supponendo che sia noto lo stato fondamentale  $\varphi_0$  e che questo corrisponda ad un'energia nulla, abbiamo

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\varphi_0''}{\varphi_0} \quad (2.9)$$

la quale formula ha senso dato che il denominatore non è mai nullo nei punti interni al dominio in cui si va a risolvere l'equazione. Questo è vero poichè, sotto ipotesi sufficientemente generali, lo stato fondamentale può presentare nodi solo sui punti di frontiera di detto dominio.

Sotto queste uniche ipotesi ci chiediamo se è possibile una fattorizzazione di  $H_1$  del tipo

$$H_1 = A^\dagger A \quad (2.10)$$

con  $A$  e  $A^\dagger$  operatori della forma

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) + \frac{d}{dx}\right) \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) - \frac{d}{dx}\right) \quad (2.11)$$

Osserviamo che il commutatore degli operatori così definiti vale

$$[A, A^\dagger] = W' \quad (2.12)$$

Vediamo così che, perchè ciò accada, occorre e basta che la funzione  $W$  (cui ci si riferirà come superpotenziale) sia soluzione dell'equazione di Riccati

$$W^2 - W' = 2V_1 \quad (2.13)$$

Ci basta la conoscenza di un integrale particolare di questa equazione, che possiamo esprimere in termini dello stato fondamentale. Infatti, perchè questo sia effettivamente uno stato a energia nulla, è sufficiente che sia annullato dall'operatore  $A$ , da cui

$$W = -\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} \quad (2.14)$$

A partire da  $A$  e  $A^\dagger$  possiamo definire l'hamiltoniana  $H_2 = AA^\dagger$ , che corrisponde al potenziale

$$V_2 = \frac{1}{2} (W^2 + W'). \quad (2.15)$$

Gli autostati delle due hamiltoniane, eccezion fatta per lo stato fondamentale di  $H_1$ , risultano accoppiati a due a due, essendo per di più relativi agli stessi autovalori. Infatti:

$$H_2(A\varphi_n^{(1)}) = AA^\dagger(A\varphi_n^{(1)}) = AH_1\varphi_n^{(1)} = E_n^{(1)}(A\varphi_n^{(1)}) \quad (2.16)$$

$$H_1(A^\dagger\varphi_n^{(2)}) = A^\dagger A(A^\dagger\varphi_n^{(2)}) = A^\dagger H_2\varphi_n^{(2)} = E_n^{(2)}(A^\dagger\varphi_n^{(2)}) \quad (2.17)$$

$$A\varphi_0^{(1)} = 0 \quad (2.18)$$

Ne segue che

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{E_n^{(1)}}} A\varphi_n^{(1)} = \varphi_{n-1}^{(2)} \quad \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^\dagger\varphi_n^{(2)} = \varphi_{n+1}^{(1)} \quad (2.20)$$

L'oscillatore armonico rientra come caso particolare tra i sistemi la cui hamiltoniana risulta fattorizzabile in questo modo. Infatti in questo caso specifico lo stato fondamentale è

$$\varphi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.21)$$

a partire da questo si determina il superpotenziale

$$W = -\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = x \quad (2.22)$$

Le (2.1) si generalizzano a loro volta come segue

$$Q = A\psi^\dagger \quad (2.23)$$

$$Q^\dagger = A^\dagger\psi. \quad (2.24)$$

In base a quanto detto nella sezione precedente, possiamo effettuare la sostituzione formale nella super-hamiltoniana (2.7) degli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  con le loro generalizzazioni  $A$  e  $A^\dagger$ , ottenendo

$$H = A^\dagger A\psi\psi^\dagger + AA^\dagger\psi^\dagger\psi = \{Q, Q^\dagger\} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{W^2}{2} - \frac{1}{2} [\psi, \psi^\dagger] W' \quad (2.25)$$

Si verifica in maniera immediata che  $Q, Q^\dagger$  rappresentano una simmetria di questa hamiltoniana.

## 2.3 Rottura della supersimmetria

Si parla di rottura spontanea di una simmetria se il gruppo che la rappresenta, discreto o continuo, lascia invariata l'hamiltoniana (o la lagrangiana) tramite la sua azione, mentre lo stato fondamentale non è simmetrico rispetto a tali trasformazioni. Un classico esempio per descrivere questo tipo di situazione è quello del ferromagnete, la cui hamiltoniana è invariante per rotazioni mentre lo stato fondamentale 'rompe' tale simmetria. Ciò è chiaramente dovuto alla presenza nell'hamiltoniana efficace di un termine che rappresenta un potenziale di scambio, il quale emerge in modo del tutto naturale qualora si studi il sistema con il metodo Hartree-Fock<sup>1</sup>. In pratica l'interazione non locale tra gli elettroni del livello più esterno dei singoli atomi del cristallo, è causa del fatto che il livello fondamentale del ferromagnete abbia degenerazione infinita, ovvero esistono infiniti stati sui quali il funzionale dell'energia  $\langle \varphi | H | \varphi \rangle$  realizza il suo minimo e che si trasformano l'uno nell'altro in seguito ad una rotazione.

Dato un sistema con un numero finito di gradi di libertà, non è possibile ottenere, in meccanica sia classica sia quantistica, la rottura di una simmetria. A titolo di esempio, consideriamo sulla retta un potenziale del tipo

$$V(x) = g(1 - x^2)^2 \quad (2.26)$$

il quale è chiaramente invariante per parità. Si potrebbe pensare, data la sua somiglianza intorno a  $\pm 1$  con un potenziale armonico, che lo stato fondamentale sia rappresentato da un doppietto di stati con parità opposta degeneri in energia. Questo è certamente falso poiché l'effetto tunnel rompe questa degenerazione (in effetti mai realizzata), in effetti la simmetria è ripristinata tramite effetti non perturbativi. Effetti dovuti alla rottura di simmetria sono invece frequenti quando si trattano sistemi a infiniti gradi di libertà (come il ferromagnete), questi sono oggetto di studio nell'ambito della teoria dei campi, classici o quantistici.

Notiamo che la supersimmetria è un tipo di simmetria ben diverso da quelle solitamente considerate in meccanica quantistica, dato che è sostanzialmente una simmetria tra due sistemi dinamici distinti. Non è quindi possibile escludere a priori la possibilità di ottenere rotture di supersimmetria

---

<sup>1</sup>Questo è chiaramente un metodo approssimato, ciononostante è in grado di descrivere questa situazione specifica in particolare con sufficiente precisione dal punto di vista sia qualitativo che quantitativo.

anche in sistemi quantistici unidimensionali. Questa è in effetti l'eventualità che si verifica.

In base a quanto poc'anzi detto, la supersimmetria è preservata se i generatori delle trasformazioni lasciano invariato lo stato fondamentale, ovvero se il livello energetico più basso non presenta degenerazione. Nel nostro caso

$$Q|0\rangle = \alpha|0\rangle, \quad Q^\dagger|0\rangle = \beta|0\rangle \quad (2.27)$$

Notiamo che, dalla nilpotenza di  $Q$ ,  $Q^\dagger$ , necessariamente discende  $\alpha = \beta = 0$ . Perciò diremo che la supersimmetria sussiste se e solo se è verificata la condizione

$$Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0. \quad (2.28)$$

Notiamo che questa condizione è equivalente alla richiesta di un'energia di punto zero nulla, poichè

$$H = \langle 0|\{Q, Q^\dagger\}|0\rangle = \|Q|0\rangle\|^2 + \|Q^\dagger|0\rangle\|^2. \quad (2.29)$$

Dunque, affinchè la (2.28) cessi di essere valida, occorre e basta che l'energia dello stato fondamentale sia maggiore di zero. In tal caso gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  non cambiano più il numero di nodi e il settore bosonico e quello fermionico hanno tutti i livelli energetici appaiati, compreso il livello più basso di  $H_1$ .

Si può verificare che considerando superpotenziali della forma

$$W(x) = gx^n \quad (2.30)$$

con  $g$  costante, se  $n$  è dispari SUSY è integra, se  $n$  è pari è rotta poichè lo stato fondamentale presenta un'energia positiva, ovvero non è possibile determinare una soluzione  $\begin{pmatrix} \varphi_0^{(1)} \\ \varphi_0^{(2)} \end{pmatrix}$  per le equazioni (2.28) che sia normalizzabile.

## 2.4 Estensione dell'algebra di supersimmetria

A partire da  $Q$  e  $Q^\dagger$  è possibile definire gli operatori hermitiani  $Q_1 = \frac{Q+Q^\dagger}{\sqrt{2}}$  e  $Q_2 = \frac{Q-Q^\dagger}{\sqrt{2}i}$ . Questi verificano le seguenti relazioni

$$\{Q_1, Q_2\} = 0; \quad \{Q_1, Q_1\} = \{Q_2, Q_2\} = H; \quad [H, Q_i] = 0 \quad (2.31)$$

Generalizzando possiamo considerare  $N$  generatori hermitiani che ubbidiscono ad analoghe regole di (anti)commutazione

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij}H \quad [H, Q_i] = 0 \quad (2.32)$$

Per l'hermitianità abbiamo inoltre  $Q_i = Q_i^\dagger$ ,  $H = \frac{2}{N} \sum Q_i^2$ . Si parlerà in tal caso di algebra di  $N$ -Supersimmetria.

Questa estensione del concetto di supersimmetria è utilizzata per costruire la teoria nota come supergravità.

## 2.5 Superalgebra di Lie

E' possibile ricondurre il calcolo del commutatore di due operatori, uno dei quali sia espresso come prodotto, a quello di opportuni anticommutatori. Infatti

$$\begin{aligned} [X, YZ] &= [X, Y]Z + Y[X, Z] = XYZ - YZX = \\ &= \{X, Y\}Z - YXZ - YZX = \{X, Y\}Z - Y\{X, Z\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Analogamente

$$\{X, YZ\} = XYZ + YZX = [X, Y]Z + Y\{X, Z\} = \{X, Y\}Z + Y[X, Z]. \quad (2.34)$$

Gli operatori fermionici di per sè non chiudono un'algebra, dato che l'anticommutatore di due operatori siffatti è bosonico. Inoltre è possibile ottenere operatori bosonici come prodotto di un numero pari di operatori fermionici. Sarebbe auspicabile poter calcolare tutte le parentesi di interesse a partire da quelle di commutazione per i bosonici e da quelle di anticommutazione per i fermionici. Le formule appena sopra scritte ci dicono che questo è possibile, a patto di tenere conto anche dei commutatori agenti su operatori con parità di Grassmann opposta, e di regolare opportunamente il segno tra i due termini in cui si spezza la parentesi per la regola di Leibniz. Per quanto detto sopra, dato che ogni operatore può essere rappresentato come somma di una parte pari e di una dispari  $G = B + \Phi$ , con  $B$  che scambia bosoni con bosoni e fermioni con fermioni, mentre  $\Phi$  scambia bosoni con fermioni e viceversa, è possibile munire lo spazio degli operatori di una parentesi  $[ , ]$  che chiameremo graded. Con questo simbolo si intende l'anticommutatore quando gli operatori su cui agisce sono entrambi dispari, il commutatore in

tutti gli altri casi. Ne conseguono delle particolari proprietà di simmetria per questa parentesi, che risulta simmetrica quando agisce su due operatori dispari, simmetrica altrimenti. Osserviamo che le equazioni scritte sopra sono compatte in una sola in termini della nuova struttura algebrica:

$$[X, YZ] = [X, Y]Z + (-1)^{F(X)F(Y)}Y[X, Z] \quad (2.35)$$

Questa può essere vista come una regola di Leibniz generalizzata.

Vogliamo ora indagare sui vincoli cui sono sottoposte le costanti di struttura di quest'algebra. Siano  $\{B_\alpha\}$  e  $\{\Phi_i\}$  delle basi di operatori hermitiani rispettivamente per gli operatori bosonici e fermionici definiti in  $\mathcal{H}$ . Le seguenti equazioni definiscono le costanti di struttura

$$[B_\alpha, B_\beta] = ic_{\alpha\beta}^\gamma B_\gamma \quad (2.36)$$

$$[\Phi_i, B_\alpha] = s_{i\alpha}^\beta \Phi_\beta \quad (2.37)$$

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = \lambda_{ij}^k B_k \quad (2.38)$$

Ovviamente queste non sono completamente arbitrarie ma devono soddisfare i requisiti di simmetria imposti dalle parentesi:

$$c_{\beta\alpha}^\gamma = -c_{\alpha\beta}^\gamma, \quad \lambda_{ij}^k = \lambda_{ji}^k. \quad (2.39)$$

Tutte le costanti di struttura sono inoltre soggette a delle condizioni di consistenza che seguono dalle identità, che generalizzano quelle di Jacobi:

$$[[G^1, G^2], G^3] + \text{somme cicliche graded} \quad (2.40)$$

Queste si scrivono in modo del tutto analogo alle somme cicliche ordinarie eccettuato il fatto che compare un segno meno laddove si scambiano di posto due operatori fermionici. Per esteso

$$[[B_\alpha, B_\beta], B_\gamma] + [[B_\gamma, B_\alpha], B_\beta] + [[B_\beta, B_\gamma], B_\alpha] = 0 \quad (2.41)$$

$$[[\Phi_i, B_\alpha], B_\beta] + [[B_\beta, \Phi_i], B_\alpha] + [[B_\alpha, B_\beta], \Phi_i] = 0 \quad (2.42)$$

$$[\{\Phi_i, \Phi_j\}, B_\alpha] + \{[B_\alpha, \Phi_i], \Phi_j\} - \{[\Phi_j, B_\alpha], \Phi_i\} = 0 \quad (2.43)$$

$$[\{\Phi_i, \Phi_j\}, \Phi_k] + [\{\Phi_k, \Phi_i\}, \Phi_j] + [\{\Phi_j, \Phi_k\}, \Phi_i] = 0 \quad (2.44)$$

## Capitolo 3

# Costruzione di un modello supersimmetrico classico

Ci chiediamo ora, a partire da quanto finora detto, se è possibile costruire un modello meccanico supersimmetrico già in ambito classico. Lo spazio delle configurazioni sarà il prodotto topologico di quello ordinario per l'algebra di Grassmann, rappresentante quest'ultima i gradi di libertà interni del sistema. E' importante che questi due spazi abbiano la stessa dimensione per poter costruire una simmetria in grado di "scambiare" i due diversi tipi di gradi di libertà.

Classicamente gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  per l'oscillatore armonico sono associati alle variabili dinamiche  $z$  e  $\bar{z}$ , che hanno la parentesi di Poisson  $\{z, \bar{z}\}_P = -i$ , mentre  $[a, a^\dagger] = 1$ . Vogliamo estendere la mappa di quantizzazione (in modo da poterla invertire) alle funzioni che dipendono dai gradi di libertà fermionici.

Per gli operatori fermionici è possibile scrivere delle equazioni di evoluzione del tipo Heisenberg, ove però compaiono gli anticommutatori anzichè i commutatori

$$\dot{\psi} = \frac{1}{i}\{\psi, H\} = -i\psi; \quad (3.1)$$

$$\dot{\psi}^\dagger = \frac{1}{i}\{\psi^\dagger, H\} = i\psi^\dagger. \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

Passando al limite classico, queste equazioni devono mantenere la stessa forma a patto di sostituire  $-i\{, \}$  con un'opportuna parentesi di Poisson. Os-

serviamo che questa dovrà riprodurre a livello classico le proprietà algebriche della parentesi graded, ovvero

- dovrà risultare simmetrica rispetto allo scambio di due funzioni entrambe con parità grassmanniana dispari, antisimmetrica in tutti gli altri casi, ovvero

$$\{f, g\}_P = (-1)^{\epsilon_f \epsilon_g + 1} \{g, f\}_P; \quad (3.4)$$

- agirà come una derivazione su funzioni grassmanniane, ovvero da sinistra secondo la regola di Leibniz graded quando a destra compare un prodotto

$$\{f, gh\}_P = \{f, g\}_P h + (-1)^{\epsilon_f \epsilon_g} g \{f, h\}_P; \quad (3.5)$$

Tenendo presente queste proprietà algebriche e delle parentesi fondamentali

$$\{\psi, \psi\}_P = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\}_P = 0 \quad \{\psi, \psi^\dagger\}_P = -i \quad (3.6)$$

ne ricaveremo ora l'espressione. Calcoliamo innanzitutto le seguenti parentesi, a partire da quelle fondamentali

$$\{\psi, \psi\psi^\dagger\}_P = \{\psi, \psi\}_P \psi^\dagger - \psi \{\psi, \psi^\dagger\}_P = i\psi; \quad (3.7)$$

$$\{\psi^\dagger, \psi\psi^\dagger\}_P = \{\psi^\dagger, \psi\}_P \psi^\dagger - \psi \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\}_P = -i\psi^\dagger; \quad (3.8)$$

$$\{\psi\psi^\dagger, \psi\psi^\dagger\}_P = \{\psi\psi^\dagger, \psi\}_P \psi^\dagger + \psi \{\psi\psi^\dagger, \psi^\dagger\}_P = 0; \quad (3.9)$$

$$\{\psi, g\}_P = \{\psi, g_0 + g_1\psi + g_2\psi^\dagger + g_{12}\psi\psi^\dagger\}_P = \quad (3.10)$$

$$= -i(g_2 - g_{12}\psi) = -i \frac{\partial^L g}{\partial \psi^\dagger}; \quad (3.11)$$

$$\{\psi^\dagger, g\}_P = -i(g_1 + g_{12}\psi^\dagger) = -i \frac{\partial^L g}{\partial \psi}. \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

Si può dunque procedere inserendo lo sviluppo di una funzione  $f$  delle variabili grassmanniane

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_P &= \{f_0 + f_1\psi + f_2\psi^\dagger + f_{12}\psi\psi^\dagger, g\}_P = \\
&= f_1(-i\frac{\partial^L g}{\partial\psi^\dagger}) + f_2(-i\frac{\partial^L g}{\partial\psi}) + f_{12}\{\psi\psi^\dagger, g\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\psi\psi^\dagger, g\}_P &= \{\psi\psi^\dagger, g_0 + g_1\psi + g_2\psi^\dagger + g_{12}\psi\psi^\dagger\}_P = \\
&= -ig_1\psi + ig_2\psi^\dagger \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_P &= -i \left[ f_1 \frac{\partial^L g}{\partial\psi^\dagger} + f_2 \frac{\partial^L g}{\partial\psi} + f_{12} (g_1\psi - g_2\psi^\dagger) \right] = \\
&= -i \left[ \left( f_{12} \frac{\partial^L g}{\partial\psi^\dagger} - f_{12}g_1\psi^\dagger \right) + \left( f_2 \frac{\partial^L g}{\partial\psi} + f_{12}g_1\psi \right) \right] = \\
&= -i \left( \frac{\partial^R f}{\partial\psi} \frac{\partial^L g}{\partial\psi^\dagger} + \frac{\partial^R f}{\partial\psi^\dagger} \frac{\partial^L g}{\partial\psi} \right). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Posto  $\pi = i\psi^\dagger$ , dalla parentesi di Poisson fondamentale  $\{\psi, \psi^\dagger\}_P = -i$  segue  $\{\psi, \pi\}_P = 1$ . Per questo indichiamo  $\pi$  come il momento canonico coniugato a  $\psi$ .

Dunque anche in presenza di gradi di libertà fermionici è possibile costruire uno spazio delle fasi classico inteso come Poisson manifold. Eviteremo di far vedere che questa parentesi di Poisson deriva da una struttura simplettica che generalizza quella ordinaria.

Per semplificare l'analisi della dinamica è conveniente passare al formalismo lagrangiano. La lagrangiana classica è inoltre indispensabile nel procedimento di quantizzazione introdotto da Feynman e Schwinger.

$$L = p\dot{x} + \pi\dot{\psi} - H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - W(x)^2) + i\psi^\dagger\dot{\psi} - \psi^\dagger\psi W'(x)^1 \quad (3.17)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \ddot{x} + W(x)W'(x) + W''(x)\psi^\dagger\psi = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = i\dot{\psi}^\dagger + W'(x)\psi^\dagger = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\dagger} - \frac{\partial L}{\partial \psi^\dagger} = i\dot{\psi} - W'(x)\psi = 0 \quad (3.20)$$

---

<sup>1</sup>Osserviamo che la trasformata di Legendre è definita in modo tale che  $\pi = \frac{\partial^R L}{\partial \dot{\psi}}$ , dove il secondo membro è una derivata destra. Notiamo dunque come la trasformata di Legendre ci consente di vedere i covettori come azioni destre dell'algebra degli operatori differenziali sullo spazio delle configurazioni, laddove i vettori sono associati ad azioni sinistre.

E' immediato riconoscere che la lagrangiana è invariante sotto l'azione del gruppo U(1)

$$\delta x = 0 \quad (3.21)$$

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi \quad (3.22)$$

$$\psi^{\dagger'} = e^{-i\alpha}\psi^{\dagger} \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

Il corrispondente integrale primo associato, tramite il teorema di Noether, a questa simmetria è

$$\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} \frac{\partial^L L}{\partial\psi} = i\psi(-i\psi^{\dagger}) = \psi\psi^{\dagger} = -F \quad (3.25)$$

L'ordine ben precisato dei fattori nel membro sinistro viene dalla necessità di estendere l'operazione di derivazione a sinistra per le funzioni composte. Per una funzione  $f(g(\varepsilon))$  si rimuove prima l'incremento di  $\varepsilon$  da quello della componente più interna, poi l'incremento di  $g$  da quello di  $f$ .

Perciò l'invarianza per una fase comporta la conservazione del numero fermionico.

Studiamo l'effetto della seguente trasformazione infinitesima sulla Lagrangiana<sup>2</sup>:

$$\delta x = i(\bar{\varepsilon}\psi + \varepsilon\psi^{\dagger}) \quad (3.26)$$

$$\delta\psi = -\varepsilon(\dot{x} - iW) \quad (3.27)$$

$$\delta\psi^{\dagger} = -\bar{\varepsilon}(\dot{x} + iW) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \delta L &= \dot{x}\delta\dot{x} - W\delta W + \delta\psi^{\dagger}(i\dot{\psi} - W'\psi) + \psi^{\dagger}(i\delta\dot{\psi} - \delta W'\psi - W'\delta\psi) = \\ &= i\dot{x}(\bar{\varepsilon}\dot{\psi} + \varepsilon\dot{\psi}^{\dagger}) - iWW'(\bar{\varepsilon}\psi + \varepsilon\psi^{\dagger}) - \bar{\varepsilon}(\dot{x} + iW)(i\dot{\psi} - W'\psi) + \\ &\quad + \psi^{\dagger}(i\delta\dot{\psi} - W''\delta x - W'\delta\psi) = \\ &= i\dot{x}\bar{\varepsilon}\dot{\psi} + i\dot{x}\varepsilon\dot{\psi}^{\dagger} - iWW'\bar{\varepsilon}\psi - iWW'\varepsilon\psi^{\dagger} - i\bar{\varepsilon}\dot{x}\dot{\psi} + \bar{\varepsilon}\dot{x}W'\psi + \bar{\varepsilon}W\dot{\psi} + \\ &\quad + i\bar{\varepsilon}WW'\psi + i\psi^{\dagger}(-\varepsilon)(\ddot{x} - i\dot{W}) - iW''\psi^{\dagger}(\bar{\varepsilon}\psi + \varepsilon\psi^{\dagger})\psi + \\ &\quad + \psi^{\dagger}W'\varepsilon(\dot{x} - iW) = \\ &= i\dot{x}\varepsilon\dot{\psi}^{\dagger} + \bar{\varepsilon}\dot{x}W'\psi + \bar{\varepsilon}W\dot{\psi} - i\psi^{\dagger}\varepsilon\ddot{x} - \psi^{\dagger}\varepsilon W'\dot{x} + \psi^{\dagger}W\varepsilon\dot{x} = \\ &= -i\frac{d}{dt}(\dot{x}\psi^{\dagger}\varepsilon) + \frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}W\psi) = \frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}W\psi - i\dot{x}\psi^{\dagger}\varepsilon) = \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (3.29)$$

---

<sup>2</sup>Il termine "infinitesimo" per una variabile grassmanniana non è adeguato, ciononostante indichiamo con questo dei parametri tali da fornire un contributo trascurabile in  $\delta x^2$ .

Le variazioni sulle velocità si calcolano, come è lecito per trasformazioni infinitesime, scambiando formalmente la derivata totale rispetto al tempo  $\frac{d}{dt}$  con la variazione  $\delta$ . Vediamo che, come risultato della trasformazione, la lagrangiana varia di una derivata totale. Questo comporta l'invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange. Non si può dire però che, una volta risolto ad esempio il problema di minimizzare l'azione rispetto a tutti i possibili cammini per due punti assegnati, la soluzione trasformata sia a sua volta soluzione del problema di minimo associato alla nuova lagrangiana. Infatti non è detto che i valori assunti dalla funzione  $f$  agli estremi siano uguali; qualora si verifichi questa eventualità  $\int \phi dt$ , con  $\phi = f'$  prende nome di invariante integrale di Hilbert. Questo è anzi falso in generale; purtuttavia localmente il problema di minimo e quello ai limiti per le equazioni di Eulero-Lagrange si equivalgono, anzi risultano entrambi equivalenti ad un opportuno problema di Cauchy. In conclusione, poichè la trasformazione sopra definita è pointwise, questo discorso ci porta ad affermare che  $f$  è un integrale primo locale.

Poichè  $f$  è complessa, possiamo considerare la sua complessa coniugata  $\bar{f}$ , anch'essa ovviamente costante lungo i moti che si svolgono localmente. Da ciò abbiamo che anche la somma e la differenza di queste due saranno conservate,

$$f - \bar{f} = \bar{\varepsilon}(W - i\dot{x})\psi + (W + i\dot{x})\psi^\dagger \varepsilon = C \quad (3.30)$$

Notiamo che, moltiplicando questa equazione per  $\varepsilon$  a destra, si ha che il primo addendo è uguale a  $C\varepsilon$ , analogamente moltiplicando a sinistra per  $\bar{\varepsilon}$  si ha che il secondo membro è costante e uguale a  $\bar{\varepsilon}C$ .

Si hanno in definitiva le seguenti costanti del moto

$$Q = (W + i\dot{x})\psi^\dagger \quad (3.31)$$

$$Q^\dagger = (W - i\dot{x})\psi \quad (3.32)$$

che rappresentano l'esatto equivalente nel caso classico di quelli che abbiamo definito inizialmente come generatori di supersimmetria.

Vediamo qual'è il risultato di due trasformazioni di supersimmetria consecutive sulla parte spaziale, cosa che ci permetterà di mettere in evidenza una proprietà peculiare delle trasformazioni di supersimmetria

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\varepsilon_1} x + i(\bar{\varepsilon}_1\psi + \varepsilon_1\psi^\dagger) \xrightarrow{\varepsilon_2} x + i(\bar{\varepsilon}_1\psi + \varepsilon_1\psi^\dagger) + i(\bar{\varepsilon}_2(\psi + \delta\psi_{(\varepsilon_1)}) + \varepsilon_2(\psi^\dagger + \delta\psi_{(\varepsilon_1)}^\dagger)) = \\ &= x + i[(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)\psi + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\psi^\dagger] - i[\bar{\varepsilon}_2\varepsilon_1(\dot{x} - iW) + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1(\dot{x} + iW)] \quad (3.33) \end{aligned}$$

l'ultimo pezzo vale  $-i(\bar{\varepsilon}_2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1)\dot{x} + (\varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_1)W$  e sta ad indicare che l'insieme delle trasformazioni di supersimmetria non possiede struttura gruppale.

Il commutatore vale

$$[\delta_{(\varepsilon_2)}, \delta_{(\varepsilon_1)}](x) = -i(\bar{\varepsilon}_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1) = -a\dot{x} \quad \text{con } a = 2i(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1) \quad (3.34)$$

ed è dunque una traslazione.

Per  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  si ha invece

$$\begin{aligned} [\delta_{(\varepsilon_2)}, \delta_{(\varepsilon_1)}](\psi) &= (\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1) (i\dot{\psi} + W'\psi) + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 (i\dot{\psi}^\dagger + W'\psi^\dagger) \\ [\delta_{(\varepsilon_2)}, \delta_{(\varepsilon_1)}](\psi^\dagger) &= (\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1) (i\dot{\psi}^\dagger - W'\psi^\dagger) + 2\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 (i\dot{\psi} - W'\psi) \end{aligned}$$

che si riducono a traslazioni solo se le si valuta lungo i moti, ovvero on-shell; in tal caso

$$[\delta_{(\varepsilon_2)}, \delta_{(\varepsilon_1)}](\psi) = a\dot{\psi} \quad (3.35)$$

$$[\delta_{(\varepsilon_2)}, \delta_{(\varepsilon_1)}](\psi^\dagger) = a\dot{\psi}^\dagger \quad (3.36)$$

# Conclusioni

Il modello dell'oscillatore fermionico, attraverso lo studio dei suoi stati coerenti, ci ha consentito di pervenire all'algebra di Grassmann, le cui proprietà sono state analizzate in dettaglio. Analizzando un modello di supersimmetria per un sistema quantistico con un grado di libertà spaziale, che generalizza quello dell'oscillatore armonico supersimmetrico, abbiamo visto come lo spazio degli operatori, bosonici e fermionici, sia dotato di un particolare struttura algebrica detta superalgebra di Lie. Siamo riusciti a fornire una formulazione classica hamiltoniana costruendo una parentesi di Poisson fermionica con le stesse proprietà della superparentesi. Abbiamo inoltre trovato come si esprimono le trasformazioni di supersimmetria del sistema come simmetrie della lagrangiana classica.



# Appendice A

## Algebre e gruppi di Lie

Sia  $E_n$  uno spazio vettoriale  $n$ -dimensionale su un campo  $K$ . Definiamo in  $E_n$  un'applicazione, che chiameremo parentesi di Lie

$$[ , ] : E_n \times E_n \longrightarrow E_n, \quad (\text{A.1})$$

con le seguenti proprietà:

- bilinearità

$$[u, \alpha v + \beta w] = \alpha [u, v] + \beta [u, w]; \quad (\text{A.2})$$

- antisimmetria

$$[u, v] = -[v, u]; \quad (\text{A.3})$$

- identità di Jacobi

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0. \quad (\text{A.4})$$

La coppia  $(E_n, [ , ])$  prende nome di Algebra di Lie. Un esempio immediato di Algebra di Lie è fornito da  $(\mathbb{R}^3, \times)$ , con  $\times$  che indica il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ .

Un gruppo di Lie è un gruppo topologico dotato di struttura differenziale e tale che l'operazione di moltiplicazione gruppale risulti continua rispetto alla topologia scelta. Esempi di gruppi di Lie sono forniti dal gruppo delle traslazioni, quello ortogonale  $O(N)$ , quello unitario  $U(N)$ . Il gruppo  $SO(N)$  delle rotazioni senza inversioni, quello delle matrici unitarie a determinante  $SU(N)$ , al gruppo simplettico  $Sp(N)$  e al gruppo di Lorentz, sono detti complessivamente 'gruppi classici'.

È possibile associare ad ogni gruppo di Lie un'algebra, semplicemente prendendo come spazio vettoriale  $E_n$  il tangente al gruppo nell'identità. In effetti questo equivale a studiare le proprietà del gruppo localmente, attraverso le relazioni di commutazione dei suoi generatori: la parentesi di due vettori  $X$  e  $Y$  è data in tal caso dalla derivata di Lie di  $Y$  lungo  $X$ .

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y \tag{A.5}$$

# Appendice B

## Dettagli sui calcoli relativi all'oscillatore fermionico

In questa appendice riportiamo i conti relativi al calcolo dello spettro dell'hamiltoniana dell'oscillatore fermionico.

$$[F, \psi] = [\psi^\dagger \psi, \psi] = \psi^\dagger \{\psi, \psi\} - \{\psi^\dagger, \psi\} \psi = -\psi \quad (\text{B.1})$$

$$[F, \psi^\dagger] = [\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger] = \psi^\dagger \{\psi, \psi^\dagger\} - \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} \psi = \psi^\dagger \quad (\text{B.2})$$

Esattamente analoghe alle rispettive bosoniche

$$[N, a] = -a \quad (\text{B.3})$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (\text{B.4})$$

Le (B.1), (B.2) ci dicono che gli operatori  $\psi$ ,  $\psi^\dagger$  cambiano l'autovalore di  $F$  di uno, infatti, se  $\varphi$  è un autostato di  $F$ :

$$F(\psi|\varphi\rangle) = (\psi F - \psi)|\varphi\rangle = (\varphi - 1)\psi|\varphi\rangle \quad (\text{B.5})$$

$$F(\psi^\dagger|\varphi\rangle) = (\psi^\dagger F + \psi^\dagger)|\varphi\rangle = (\varphi + 1)\psi^\dagger|\varphi\rangle \quad (\text{B.6})$$

L'operatore numero fermionico  $F$  è semi-definito positivo, esattamente come quello bosonico. Ciò significa, in base alla prima delle equazioni ora scritte, che  $\varphi$  può essere solo un intero non negativo, poichè in caso contrario agendo con  $\psi$  su  $|\varphi\rangle$  violeremmo la condizione appena fissata. Inoltre

$$0 \leq \langle \varphi | F | \varphi \rangle = \langle \varphi | (1 - \psi \psi^\dagger) | \varphi \rangle \leq 1, \quad (\text{B.7})$$

dalla quale si trae che lo spettro di  $F$  è costituito dai soli valori 0, 1. Ricordando l'espressione dell'hamiltoniana

$$H = F - \frac{1}{2}, \quad (\text{B.8})$$

da quanto appena detto su  $F$ , ne possiamo ricavare lo spettro.

# Bibliografia

- [1] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, “Supersymmetry in Quantum Mechanics” (World Scientific Publishing 2001).
- [2] Giampiero Esposito, Giuseppe Marmo, George Sudarshan, “From Classical to Quantum Mechanics” (Cambridge 2004).
- [3] A. Romano, “Lezioni di Meccanica Razionale ” (Liguori, Napoli, 1990).
- [4] Piero Caldirola, Renzo Cirelli, Giovanni M. Prosperi, “Introduzione alla Fisica Teorica” (Utet 1982).
- [5] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics” (IoP 2005).
- [6] Nicodemi, Appunti del corso di Meccanica Quantistica, dal sito `people.na.infn.it pq-qp`.