Università degli Studi di Napoli
Federico II

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Anno Accademico 2005/2006

Tesi di Laurea in Fisica

Gruppi Quantici con Twist e Simmetrie della Geometria Non Commutativa

Candidato:
Dario Capasso
matr. 358/1

Relatore:
Prof. Fedele Lizzi

Indice

1 Geometria Noncommutativa e Simmetrie **8**

1.1 Motivazioni per una Geometria Noncommutativa 8

1.1.1 Il Prodotto di Moyal 9

1.1.2 La Geometria Noncommutativa 10

1.2 Simmetrie e Noncommutatività 12

2 Gruppi e Algebre **14**

2.1 I Gruppi 14

2.1.1 Sottogruppi 17

2.1.2 Omomorfismi 20

2.1.3 Sistemi di Generatori 22

2.1.4 Classi Laterali 23

2.1.5 Endomorfismi ed Automorfismi 26

2.1.6 Sottogruppi Caratteristici e Pienamente Invarianti 29

2.1.7 Prodotti fra Gruppi 29

2.2 Rappresentazioni di Gruppi 32

2.2.1 Azioni di un Gruppo 32

2.2.2 Le Rappresentazioni 36

2.3 Algebre 43

2.3.1 Le Algebre di Lie 45

2.4 Varietà differenziabili 49
2.4.1 L'Algebra delle Funzioni 50
2.4.2 Spazi Vettoriali Tangenti 51
2.5 I Gruppi di Lie 52
2.5.1 L'Algebra Inviluppante di un'Algebra di Lie 55
2.5.2 I Gruppi di Trasformazione 56

3 Algebre di Hopf e Quantum Groups **61**
3.1 Bialgebre ed Algebre di Hopf 62
3.1.1 Algebre 62
3.1.2 Coalgebre 63
3.1.3 Algebre di Hopf 64
3.2 Azione di un'Algebra 66
3.3 Dualità 67
3.3.1 Dualità tra $\mathcal{F}(G)$ e $\mathcal{U}(\mathbf{L})$ 67
3.4 L'Algebra di Hopf Quasi-triangolare 70
3.5 Il Twist 70
3.6 I Gruppi Quantici 72
3.6.1 Il Twist e le Deformazioni di Gruppi 73

4 Simmetrie nella Geometria Noncommutativa **75**
4.1 Gruppi Quantistici e Simmetrie: un'Introduzione 76
4.2 Twists con Campi Commutanti 80
4.3 Altri Twists e Altri Prodotti 81
4.3.1 I Prodotti 82
4.3.2 Deformazioni di Simmetrie 85
4.3.3 Le Parentesi di Poisson 87

A Richiami **88**

A.1 Richiami 88

A.2 Teoremi sugli Omomorfismi ed altre Proprietà dei Gruppi 88

A.3 Il Gruppo delle Permutazioni su un Insieme 90

A.4 I Gruppi Topologici 92

A.4.1 Spazi Topologici 92

A.4.2 I Gruppi Topologici 94

A.4.3 Gruppi Compatti 96

A.4.4 Gruppi Connessi 98

A.5 La misura di Haar 99

Introduzione

I gruppi non agiscono in modo compatibile con le strutture noncommutative.

I gruppi e le algebre quantistiche sono deformazioni dei gruppi e delle algebre classiche.

deformazioni?

Per deformare le strutture classiche è necessario generalizzare le strutture che descrivono un gruppo.

Capitolo 1

Geometria Noncommutativa e Simmetrie

In questo capitolo introduciamo alcune motivazioni per utilizzare una *geometria non commutativa* [?] al posto di una commutativa per descrivere i sistemi Fisici Quantistici; inoltre sono analizzate alcune problematiche relative all'inconsistenza tra le "simmetrie classiche" e la geometria non commutativa che verranno rianalizzate successivamente.

1.1 Motivazioni per una Geometria Noncommutativa

La *Fisica Classica*, contrariamente alla *Fisica Quantistica*, è una Scienza *Deterministica*; lo spazio classico è quindi un insieme di punti distinguibili. Le osservabili di un sistema classico sono le funzioni definite sulla spazio fisico (*varietà differenziale*) a valori in $\mathbb{C}$ ed ogni misura, teoricamente, può essere fatta in modo da modificare in maniera arbitrariariamente piccola il sistema in esame. Da ciò discende che le misure sono locali in quanto non hanno alcuna influenza al livello globale.

Le funzioni su di una varietà formano un'algebra commutativa una volta che si è utilizzato il normale *prodotto puntuale* (località) tra funzioni. La *commutatività*, quindi è euristicamente legata all'impossibilità di una misura di influenzare quella successiva in quanto, invertendo l'ordine delle misure, il risultato non cambia.

Nella Fisica Quantistica sappiamo che, differentemente dalla Fisica Classica, una misura può influenzare fortemente la successiva come nel semplice caso in cui si misuri la quantità di moto p di una particella dopo aver valutato la sua posizione. Gli errori delle due misure sono legati alla relazione di *indeterminazione di Heisemberg*

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \tag{1.1}$$

Le relazioni di indeterminazione sono dovute alla non commutatività di alcune osservabili del sistema; infatti la relazione precedente si ottiene dalla

$$[p^\mu, x_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu \tag{1.2}$$

Questa relazione suggerisce una possibile spiegazione alle differenze fra la Meccanica Classica e quella Quantistica: **lo spazio delle fasi Quantistico non è commutativo**.

1.1.1 Il Prodotto di Moyal

La procedure di quantizzazione consiste nell'associare ad un'osservabile classico un operatore autoaggiunto. Una delle possibili procedure è la *quantizzazione alla Weyl* in cui, ad ogni osservabile classica si associa un operatore quantistico secondo la seguente relazione

$$\widehat{A} = \Omega(A) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d^d p \int_{\mathbb{R}^d} d^d x A(x,p) \int_{\mathbb{R}^d} d^d \xi \int_{\mathbb{R}^d} d^d \zeta e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+\zeta(p-\hat{p})]} \tag{1.3}$$

dove $A(x,p)$ è l'osservabile classica mentre $\widehat{x}$ e $\widehat{p}$ sono gli operatori quantistici di posizione ed impulso.

Tramite questa relazione definiamo un omomorfismo Ω, detto **mappa di Weyl**, che associa a funzioni definite sulla varietà degli operatori. La mappa di Weyl è invertibile e la sua inversa è detta **mappa di Wigner**:

$$\Omega^{-1}(\widehat{A}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int d^d x\, d^d p\, d^d \xi\, d^d \eta \,\mathrm{Tr}(e^{-\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+\zeta(p-\hat{p})]}\widehat{A}) \tag{1.4}$$

Poiché siamo interessati ad una rappresentazione dell'algebra degli operatori in termini di funzioni dobbiamo ridefinire il prodotto tra funzioni nel seguente modo

$$f \star g = \Omega^{-1}(\Omega(f) \cdot \Omega(g)) \tag{1.5}$$

dove f e g sono funzioni definite sulla varietà in $\mathbb{C}$ e $\cdot$ è il prodotto tra operatori. La (1.5) definisce il **prodotto di Moyal**.

Esistono varie espressioni del prodotto di Moyal [?], in generale viste come nuclei integrali, quella che sarà utilizzata nel seguito , utile per la sua natura perturbativa in quanto una serie, è la seguente: $J_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial z^\nu}$

$$f(x,p) \star g(x,p) = \left(f(x,p) e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_x} - \overleftarrow{\partial_x}\overrightarrow{\partial_p})} g(x,p) \right) \tag{1.6}$$

Dalla definizione (1.5) si ha subito la seguente relazione[1]

$$\Omega^{-1}([\hat{p}, \hat{x}]) = \Omega^{-1}([\Omega(p), \Omega(x)]) = i\hbar\{p, x\} \tag{1.7}$$

dove $\{\cdot, \cdot\}$ è l'usuale parentesi di Poisson della meccanica classica. Qui vediamo che il prodotto di Moyal realizza (e generalizza) la quantizzazione di Dirac. Sviluppando al primo ordine il prodotto si ha

$$f(x,p) \star g(x,p) = f(x,p)g(x,p) + \frac{i\hbar}{2}\left((\partial_p f \partial_x g - \partial_x f \partial_p g)\right) + ... \tag{1.8}$$

1.1.2 La Geometria Noncommutativa

Lo spazio quantistico ha una struttura locale differente da quello classico in quanto deve tenere conto delle *fluttuazioni quantistiche* a piccole scale che contrastano col concetto di punto. La differente struttura dello spazio si dovrebbe evincere alla *scala di Planck*, cioé per lunghezze pari alla *lunghezza di Planck*

$$l = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \tag{1.9}$$

dove G è la costante gravitazionale, $\hbar$ è la costante di Planck e c è la velocità della luce.

I problemi legati alla struttura dello spazio-tempo a scale dell'ordine della lunghezza di Planck sono molteplici e spaziano dalla Teoria Quantistica dei Campi al problema delle singolarità (Big-Bang e Buchi Neri).

[1] Quantizzazione alla Dirac.

Una possibile strada per la modellizzazione dello spazio-tempo risiede in una generalizzazione della procedura di quantizzazione di Moyal. Come già detto la quantizzazione di Moyal porta ad una struttura in cui p e x, funzioni sullo spazio delle fasi, non commutano; quindi si può pensare che anche le funzioni sullo spazio tempo non commutino, cioé che

$$x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = [x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{1.10}$$

dove $\theta^{\mu\nu}$ é una costante, cioé una quantità *indipendente dal sistema i riferimento.* Il prodotto $\star$ introdotto è il seguente

$$f(x) \star g(x) = \left(e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial z^\nu}} f(y)f(z) \right)_{y=x,z=x} \tag{1.11}$$

Il prodotto (1.11) tiene conto della lunghezza di Planck assumendo che le componenti di θ siano quantità dell'ordine l^2; in questo modo introduciamo una dipendenza dal parametro di scala l e riproduciamo il normale prodotto commutativo nel limite classico $l \to 0$.

La scelta delle relazioni di commutazione (1.10) non è l'unica possibile. Nel presente lavoro verrà studiato il caso del prodotto $\star$ precedentemente definito ed un altro caso. interessi?

Il Teorema di Gelfand-Naimark

Il motivo per cui si è fortemente interessati all'*algebra delle funzioni* definite su di una varietà M in $\mathbb{C}$, indicata con $\mathcal{F}(M)$, e che, dalla conoscenza di questa, si può ricostruire la varietà stessa, cioé lo Spazio Fisico di un sistema è noto se sono note le sue osservabili. Il teorema di Gelfand-Naimark afferma che una varietà è descrivibile tramite l'algebra delle funzioni su di essa. Qui diamo solo l'enunciato di tale teorema, riamandando all'appendice A per alcuni richiami e definizioni, e alla letteratura [**?**] per la prova ed una discussione più estesa.

Teorema 1.1 (Gelfand-Naimark) *Per ogni $\mathbb{C}^*$-algebra unitale commutativa* $\mathbf{A}$ *esiste, a meno di omeomorfismi, un unico spazio topologico M tale che $\mathcal{F}(M) \simeq \mathbf{A}$.*

Il teorema 1.1 può essere esteso ad algebre non unitali ottenendo spazi topologici localmente compatti dove con $\mathcal{F}(M)$ ora si intende l'algebra delle funzioni definite sulla varietà che si annullano all'infinito.

La generalizzazione del teorema a $\mathbb{C}^*$-algebre non commutative porta a *spazi topologici "Quantistici"* dove l'algebra delle funzioni definite sullo spazio non è più commutativa; inoltre perde di definizione il punto in quanto il nuovo prodotto non commutativo non è più locale, tenendo conto, così, delle fluttuazioni quantistiche dello spazio.

1.2 Simmetrie e Noncommutatività

finire

Un sistema fisico possiede una *simmetria* se esiste una *gruppo di trasformazioni* che lascia invariato il sistema. L'*azione di un gruppo* di simmetria su di uno spazio S verrà introdotta nel paragrafo 2.2.1 ed elaborata in seguito.

Consideriamo ora il caso dell'*azione del gruppo di Lorentz* sullo spazio di Minkowski non commutativo. Come vedremo l'*azione infinitesima* di un *gruppo continuo* è determinata dall'azione di un campo, associato al gruppo (vedi par. 2.5.2) sull'oggetto soggetto alla trasformazione; osserviamo come cambia la relazione (1.10) dopo una trasformazione di Lorentz infinitesima data dal campo (2.170) ($M_{\alpha\beta} = (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)$): Minkowski

$$M_{\alpha\beta}(i\theta_{\mu\nu}) = M_{\alpha\beta}[x_\mu, x_\nu] = \tag{1.12}$$

$$= [(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)x_\mu] \star x_\nu + x_\mu \star [(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)x_\nu] + \tag{1.13}$$

$$-[(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)x_\nu] \star x_\mu - x_\nu \star [(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)x_\mu] = \tag{1.14}$$

$$= [x_\alpha \eta_{\beta\mu} - x_\beta \eta_{\alpha\mu}] \star x_\nu + x_\mu \star [x_\alpha \eta_{\beta\nu} - x_\beta \eta_{\alpha\nu}] - [x_\alpha \eta_{\beta\nu} - x_\beta \eta_{\alpha\nu}] \star x_\mu - x_\nu \star [x_\alpha \eta_{\beta\mu} - x_\beta \eta_{\alpha\mu}] = \tag{1.15}$$

$$= [x_\alpha, x_\nu]\eta_{\beta\mu} + [x_\mu, x_\alpha]\eta_{\beta\nu} + [x_\beta, x_\mu]\eta_{\alpha\nu} + [x_\nu, x_\beta]\eta_{\alpha\mu} = \tag{1.16}$$

$$= i[\theta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu} + \theta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu} + \theta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\nu} + \theta_{\nu\beta}\eta_{\alpha\mu}] \tag{1.17}$$

Dall'ultima uguaglianza abbiamo che $\theta_{\mu\nu}$ non è una costante indipendente dal sistema di riferimento. Si è trovato questo risultato perché abbiamo assunta valida la regola di Leibeniz per il prodotto di Moyal, ciò significa che la normale azione di un gruppo non è compatibile con la non commutatività. Nel paragrafo (4.1) mostreremo che "deformate" opportunamente le strutture algebriche in gioco si otterrà l'invarianza di $\theta_{\mu\nu}$.

Costante di scala l, rotture delle simmetrie

Vedremo che il prodotto di Moyal può essere considerato come una "*deformazione*" del prodotto puntuale; a causa di questa deformazione del prodotto, necessaria per descrivere uno spazio non più classico e, quindi, non più commutativo, si avrà la necessità di deformare anche altre strutture connesse al concetto di simmetria di un sistema Fisico.

Il prodotto di Moyal non è l'unica possibile deformazione, infatti, di seguito verrà analizzato anche un diverso tipo di prodotto deformato.

Capitolo 2

Gruppi e Algebre

In questo capitolo saranno approfonditi alcuni argomenti riguardanti l'aspetto classico delle simmetrie. Inoltre, verranno introdotti alcuni concetti riguardanti i Gruppi e le Algebre, infine verranno introdotte alcuni concetti riguardanti le implementazioni delle simmetrie. In particolare, è stato analizzato il caso del gruppo di Poincaré come esempio di gruppo di simmetria.

Alcuni di questi concetti verranno rivisti nel prossimo capitolo.

2.1 I Gruppi

Definizione 2.1 *Un insieme G possiede una struttura di* ***gruppo*** *se è assegnata una legge di composizione, cioè un'operazione binaria interna* $\cdot : (g_1, g_2) \in G \times G \mapsto g_1 \cdot g_2 \in G$ *per cui valgano le seguenti proprietà:*

1. $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ ***Proprietá associativa***
2. $\exists e \in G : e \cdot g = g \cdot e = g \qquad \forall g \in G$ ***Elemento neutro***
3. $\forall g \in G \qquad \exists g^{-1} \in G : g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ ***Inverso***

Le richieste per definire un gruppo possono essere ulteriormente generalizzate modificando i punti 2 e 3, cioè richiedendo solo l'esistenza di un elemento neutro ed un inverso destro (o sinistro); questo modo di assiomatizzare il gruppo è comunque equivalente a quello dato.

Proposizione 2.1 *L'elemento neutro è unico.*

Dimostrazione. Indicano con e ed e' due distinti elementi neutri abbiamo che $e = ee' = e'$, contro l'ipotesi. ■

Proposizione 2.2 *L'inverso è unico.*

Dimostrazione. Indicando con h e h' due inversi di g abbiamo che $h' = h'(gh) = (h'g)h = h$, contro l'ipotesi (si noti che nella dimostrazione è stata essenziale l'associatività della moltiplicazione). ■

Il gruppo è detto **commutativo** o **abeliano** se $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \; \forall g_1, g_2 \in G$; nel caso di un gruppo abeliano si suole usare la notazione additiva, dove l'operazione interna $+$ è denominata addizione e l'elemento neutro è indicato col simbolo 0, mentre nel caso generale si usa la notazione moltiplicativa, dove l'operazione interna $\cdot$ è detta moltiplicazione e l'elemento neutro è indicato col simbolo 1.

In seguito ometteremo il simbolo $\cdot$ usando la notazione $g_1 g_2$.

Il numero di elementi (cioè la cardinalità[1] di G) che formano il gruppo è detto **ordine** del gruppo; quindi è possibile distinguere fra gruppi di ordine finito (**gruppi finiti**) e di ordine infinito (**gruppi infiniti**); inoltre se è possibile identificare un elemento del gruppo con un insieme di parametri continui il gruppo è detto **gruppo continuo**. I gruppi finiti possono essere rappresentati tramite le **Tabelle di Cayley** che riportano il valore di tutti i possibili prodotti fra gli elementi del gruppo.

Esempio 2.1

1. *$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ formano un gruppo abeliano rispetto all'usuale addizione;*
2. *$\mathbb{Q}^*$ [2], $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^*$ formano un gruppo abeliano rispetto all'usuale moltiplicazione;*
3. *L'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ su un campo $F(+, \cdot)$ con determinante diverso da 0 è un gruppo rispetto all'usuale moltiplicazione fra matrici, denominato gruppo generale lineare ($GL(n, F)$); il gruppo è abeliano per $n = 1$, in quanto si riduce al gruppo moltiplicativo del campo (F^*), e non abeliano per $n > 1$;*

[1] La cardinalità di un insieme X sarà indicata con $|X|$.

[2] Con l'apice $*$ indichiamo il campo privato dell'elemento neutro 0 dell'adizione.

4. *L'insieme (di ordine 4) $G = \{1, i, -1, -i\} \subseteq \mathbb{C}^*$ è un gruppo rispetto all'usuale moltiplicazione fra numeri complessi con la seguente tabella di Cayley:*

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & i & -1 & -i \\ \hline 1 & 1 & i & -1 & -i \\ i & i & -1 & -i & 1 \\ -1 & -1 & -i & 1 & i \\ -i & -i & 1 & i & -1 \end{array} \tag{2.1}$$

Questo gruppo è, come vedremo, un gruppo ciclico generato dall'elemento i o dall'elemento $-i$.

Proposizione 2.3 *Presi x, a, b appartenenti al gruppo G si ha che $ax = b$ se e solo se $x = a^{-1}b$.*

Dimostrazione.

$$x = a^{-1}(ax) = a^{-1}b \tag{2.2}$$

■

Proposizione 2.4 *Presi x, y appartenenti al gruppo G si ha che $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ e $(x^{-1})^{-1} = x$.*

Dimostrazione.

$$(xy)^{-1} = (xy)^{-1}(x(yy^{-1})x^{-1}) = (xy)^{-1}(xy)y^{-1}x^{-1} = y^{-1}x^{-1} \tag{2.3}$$

■

Si definisce induttivamente la **potenza** $n-$esima x^n, con $n \in \mathbb{Z}$, dell'elemento x appartenente al gruppo G come segue:

- $x^0 = 1, \qquad x^1 = x$
- $x^{-1} : x^{-1}x = 1$
- $x^n = x^{n-1}x$ se $n > 0$ e $x^n = (x^{-1})^{-n}$ se $n < 0$.

Proposizione 2.5 $x^{n+m} = x^n x^m$

Dimostrazione.

$$x^{n+m} = \prod_{i=1}^{n+m} x = \prod_{i=1}^{n} x \prod_{j=n+1}^{n+m} x = x^n x^m \tag{2.4}$$

■

Proposizione 2.6 $(x^n)^m = x^{nm}$

Dimostrazione.

$$(x^n)^m = \prod_{j=1}^{m} \left[\prod_{i=1}^{n} x \right] = \prod_{i=1}^{nm} x = x^{nm} \tag{2.5}$$

■

2.1.1 Sottogruppi

Definizione 2.2 *Un sottogruppo di un gruppo $G(\cdot)$ è un sottoinsieme $H \subseteq G$ che è chiuso per $\cdot$ ($\forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$) e tale che la struttura indotta $H(\cdot)$ sia un gruppo.*

Per indicare che H è un sottogruppo del gruppo G si usa la notazione $H \leq G$. È facile verificare che l'elemento neutro del sottogruppo H di G coincide con l'elemento neutro di G.

Esempio 2.2

1. *$\mathbb{Z}$ è un sottogruppo del gruppo additivo $\mathbb{Q}$ che a sua volta è un sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}$ è un sottogruppo di $\mathbb{C}$;*

2. *l'insieme singleton costituito dall'elemento neutro 1 ed il gruppo G stesso sono sottogruppi del gruppo G e sono detti **sottogruppi banali**, mentre gli altri eventuali sottogruppi sono detti **sottogruppi non banali**; un **sottogruppo proprio** di G ($\neq \{1\}$) è un sottogruppo distinto da G;*

3. *l'insieme $U(1) = \{x \in \mathbb{C} : x = e^{i\phi}, \phi \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo di $\mathbb{C}^*(\cdot)$ rispetto all'usuale moltiplicazione; un suo sottogruppo proprio è l'insieme $C_\infty = \{x \in \mathbb{C} : x = e^{ik\theta}\}$[3], dove si è posto $\theta = 2\pi/n$ e dove $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$.*

[3] $U(1)$ indica il gruppo unitario di dimensione 1.

La proprietà di essere un sottogruppo è transitiva, cioè dato un sottogruppo H del gruppo G ed un sottogruppo K di H allora K è un sottogruppo di G.

Proposizione 2.7 *Dato H sottoinsieme del gruppo G, allora H è un sottogruppo di G se e solo se H non è vuoto e $\forall x, y \in H$ si ha che $xy^{-1} \in H$.*

Dimostrazione. L'elemento neutro appartiene ad H ($xx^{-1} = 1$) come l'inverso (basta porre $x = 1$). ■

L'intersezione di una famiglia di sottogruppi $H_i \leq G$ è ancora un sottogruppo in quanto, come conseguenza della struttura di gruppo degli H_i, all'intersezione appartiene l'elemento neutro 1 e dati $g_1, g_2 \in \cap_i H_i$ allora avremo anche che $g_1 g_2 = g_3 \in \cap_i H_i$. L'intersezione di tutti i sottogruppi di G contenenti un dato insieme $S \subseteq G$ è il più piccolo sottogruppo contenente S ed è indicato con $\langle S \rangle$ [4]ed è detto **sottogruppo generato dall'insieme** S. Nel caso di un insieme S formato dal solo elemento g_0, il sottogruppo $\langle g_0 \rangle$ è formato da tutti gli elementi esprimibili come potenze di g_0 ed è detto **gruppo ciclico**; più in generale un gruppo si dice **finitamente generato** se esiste un insieme finito di elementi X del gruppo che lo genera, cioè $G = \langle X \rangle$.

Un gruppo ciclico $\langle x \rangle$ è *finito* se esiste un intero positivo $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n = 1$; è facile verificare che il più piccolo n che verifica la precedente relazione è l'**ordine** del gruppo ed è detto **ordine** o **periodo** dell'elemento x in quanto coincide proprio con il numero di elementi del gruppo ($\langle x \rangle = \{1, x^1, ..., x^{n-1}\}$)[5]; se non esiste un n che verifica la precedente condizioni allora il gruppo ciclico è *infinito*.

Proposizione 2.8 *Tutti i gruppi ciclici di ordine infinito sono isomorfi; tutti i gruppi ciclici di ordine n sono isomorfi.*

Dimostrazione. I gruppi ciclici di ordine infinito sono isomorfi al gruppo additivo $\mathbb{Z}$ tramite l'isomorfismo che associa ad ogni elemento $k \in \mathbb{Z}$ l'elemento $a^k \in \langle a \rangle$; i gruppi ciclici di ordine n sono isomorfi al gruppo delle radici n-esime dell'unità nel campo complesso od anche al gruppo additivo degli interi modulo n. ■

[4] $\langle S \rangle$ contiene tutti prodotti di potenze di elementi di S ed è pertanto costituito da essi.

[5] Sia m un divisore di n allora l'elemento $x^{n/m}$ del gruppo è una radice $m-$esima dell'unità ed ha periodo m.

Proposizione 2.9 *Ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico.*

Dimostrazione. Consideriamo un gruppo ciclico $\langle a \rangle$ di ordine n ed un suo sottogruppo H non identico; sia k il minimo intero positivo tale che $a^k \in H - \{1\}$ e sia $l \in \mathbb{Z}$ tale che $a^l \in H$. Applicando alla coppia (l, k) l'algoritmo della divisione euclidea in $\mathbb{Z}$ si ha $l = kq + r$, con $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < k$. Si ha allora

$$a^l = (a^k)^q a^r \tag{2.6}$$

e quindi

$$a^r = a^l (a^{-k})^q \in H \tag{2.7}$$

Ne segue che $r = 0$ per definizione di k. Abbiamo dimostrato che l deve essere un multiplo di k e quindi che $H = \langle a^k \rangle$. ■

Tutti gli elementi di un gruppo finito hanno ordine finito; esistono anche gruppi di ordine infinito i cui elementi hanno ordine finito. I gruppi i cui elementi hanno tutti ordine finito sono detti **periodici** o di **torsione**; i gruppi i cui elementi, esclusa l'unità, hanno tutti ordine infinito sono detti **liberi da torsione**, mentre i restanti sono detti **misti**.

Possiamo introdurre un **prodotto fra sottoinsiemi** nel seguente modo: dati due sottoinsiemi X e Y del gruppo G, costruiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} XY &= \{xy \in G : x \in X, y \in Y\} \\ X^{-1} &= \{x^{-1} \in G : x \in X\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Due sottogruppi H e K del gruppo G sono detti **sottogruppi permutabili** se $HK = KH$, cioè se per ogni $h_1 \in H$ e per ogni $k_1 \in K$ esistono $h_2 \in H$ e $k_2 \in K$ tali che $h_1 k_1 = k_2 h_2$.

Proposizione 2.10 *Dati due sottogruppi H e K permutabili allora l'insieme HK è un sottogruppo.*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.7 dobbiamo dimostrare che presi gli elementi $h_1 k_1, h_2 k_2 \in HK$ allora $h_1 k_1 (h_2 k_2)^{-1} \in HK$

$$h_1 k_1 (h_2 k_2)^{-1} = h_1 (k_1 k_2^{-1}) h_2^{-1} = h_1 k_3 h_2^{-1} = h_1 h_3 k_4 \in HK \tag{2.9}$$

dove

$$k_3 = k_1 k_2^{-1} \tag{2.10}$$

e h_3 e k_4 sono elementi di H e K rispettivamente tali che

$$k_3 h_2^{-1} = h_3 k_4 \tag{2.11}$$

■

In generale, dati due sottogruppi A e B di G, il sottogruppo generato dai due sottogruppi contiene l'insieme prodotto, cioè:

$$AB \subseteq \langle A, B \rangle \tag{2.12}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se A e B sono permutabili.

2.1.2 Omomorfismi

Un'applicazione f dal gruppo G al gruppo H è detta **omomorfismo** se conserva le leggi di composizione, cioè se:

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in G, \tag{2.13}$$

inoltre se f è iniettiva, suriettiva o biettiva è detta, rispettivamente *monomorfismo*, *epimorfismo* od *isomorfismo*. L'insieme degli omomorfismi fra G eH si indica con $Hom(G, H)$.

Due gruppi G e H si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $\phi : G \to H$, indicheremo ciò con la scrittura $G \simeq H$. Nella classe di tutti i gruppi l'isomorfismo è una relazione di equivalenza (per la definizione vedi appendice A) sicché si possono considerare le *classi di isomorfismo dei gruppi* invece di considerare tutti i possibili gruppi[6].

Un omomorfismo possiede le seguenti proprietà:

1. $f(1) = 1$ dove 1 al primo membro e 1 al secondo membro sono gli elementi neutri, rispettivamente, di G e H;

[6]Dato un gruppo con una legge di composizione che presenti difficoltà di calcolo ed un gruppo ad esso isomorfo con una legge di composizione più maneggevole, allora è possibile effettuare il calcolo nel gruppo più semplice da trattare e, successivamente, usare l'isomorfismo per ottenere il risultato relativo al gruppo di partenza.

2. $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$;

3. f trasforma sottogruppi in sottogruppi;

4. $Im(f) = \{h \in H : h = f(g), g \in G\}$ è un sottogruppo di H.

5. $Ker(f) = \{g \in G : f(g) = 1\}$ è un sottogruppo di G.

Dimostrazione.

1. $h = f(g) = f(g1) = f(g)f(1) = hf(1)$;

2. $f(g)f(g)^{-1} = 1 = f(1) = f(gg^{-1}) = f(g)f(g^{-1})$;

3. detto K il sottoinsieme di H immagine del sottogruppo F di G, per dimostrare che K è un sottogruppo adoperiamo la proposizione 2.7, cioè, dati $h_1, h_2 \in K$ e $g_1, g_2 \in F$ tali che e $h_1 = f(g_1)$ e $h_2 = f(g_2)$, si ha:

$$h_1(h_2)^{-1} = f(g_1)f(g_2)^{-1} = f(g_1)f[(g_2)^{-1}] = f[g_1(g_2)^{-1}] \tag{2.14}$$

   ma $g_1(g_2)^{-1} \in F$, quindi $h_1(h_2)^{-1} \in K$;

4. segue dalla 3., perché G è un sottogruppo di G;

5. dati $g_1, g_2 \in Ker(f)$ allora $1 = 1(1)^{-1} = f(g_1)f(g_2)^{-1} = f(g_1)f[(g_2)^{-1}] = f[g_1(g_2)^{-1}]$, cioè $g_1(g_2)^{-1} \in Ker(f)$; l'asserto segue dalla proposizione 2.7.

■

Esempio 2.3 *1. L'omomorfismo $f : x \in \mathbb{R} \to e^{ix} \in U(1)$ è un epimorfismo dal gruppo additivo $\mathbb{R}$ sul gruppo moltiplicativo $U(1)$ dei numeri complessi con modulo uguale ad uno; il nucleo di questo omomorfismo è il sottogruppo additivo $2\pi\mathbb{Z}$ generato da 2π;*

2. l'omomorfismo $f : x \in \mathbb{R} \to e^x \in \mathbb{R}^*$ è un monomorfismo dal gruppo additivo $\mathbb{R}$ al gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}^+(\cdot)$ (gruppo moltiplicativo dei numeri reali positivi).

Ci sono gruppi che possono essere isomorfi ad un loro sottogruppo proprio, naturalmente la condizione necessaria perché questo sia possibile è che il gruppo sia infinito; un esempio è l'isomorfismo che associa ad ogni elemento di $k \in \mathbb{Z}$ l'elemento $2k$ appartenente al gruppo additivo degli interi pari.

Un omomorfismo nel gruppo G induce un omomorfismo anche sui suoi sottogruppi.

Dato un gruppo K isomorfo ad un sottogruppo H del gruppo G questo può essere *embedded* nel gruppo G, cioè può essere immerso nel gruppo G. Precisamente, se $\sigma : K \to H$ è un isomorfismo e

$$\imath : h \in H \to h \in G \tag{2.15}$$

è l'omomorfismo di immersione di H in G, allora

$$\imath \circ \sigma : K \to G \tag{2.16}$$

è un monomorfismo che immerge K in G.

Esempio 2.4 *Il gruppo simmetrico di grado $n-1$, cioè il gruppo delle permutazioni di $n-1$ elementi, può essere immerso nel gruppo simmetrico di grado n.*

2.1.3 Sistemi di Generatori

Definizione 2.3 *Un **sistema di generatori** del gruppo G è un insieme $M \subseteq G$ tale che*

$$G = \langle M \rangle. \tag{2.17}$$

Esiste sempre un sistema di generatori in quanto basta considerare come insieme M tutto il gruppo G.

Un sistema di generatori M è detto **irriducibile** o **minimale** se non esiste nessun sottoinsieme proprio di M che generi tutto il gruppo, mentre il gruppo è detto **finitamente** od **infinitamente generato** a seconda che possieda un sistema di generatori rispettivamente finito od infinito. La finitezza di un sistema di generatori non implica la finitezza dell'ordine del gruppo; il gruppo additivo $\mathbb{Z}$ è generato dal solo elemento 1.

Proposizione 2.11 *Ogni sistema finito di generatori di un gruppo finitamente generato contiene un sistema irriducibile di generatori.*

Dimostrazione. Dato un sistema di generatori basta escludere da esso gli elementi superflui. ■

Distinti sistemi di generatori irriducibili di gruppi finitamente generati possono contenere un diverso numero di elementi.

Proposizione 2.12 *Ogni imagine tramite un omomorfismo di un gruppo finitamente generato è un gruppo finitamente generato.*

Dimostrazione. Consideriamo il gruppo finitamente generato

$$G = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \tag{2.18}$$

ed un omomorfismo $\phi : G \to H$, allora un elemento a' del gruppo H immagine dell'elemento $a \in G$ tramite l'omomorfismo ϕ è esprimibile nel seguente modo

$$a' = \phi(a) = \phi(a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} ... a_{i_s}^{k_s}) = \phi(a_{i_1})^{k_1} \phi(a_{i_2})^{k_2} ... \phi(a_{i_s})^{k_s} \tag{2.19}$$

dove $a = a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} ... a_{i_s}^{k_s}$. Quindi $\phi(a_1), \phi(a_2), ..., \phi(a_n)$ è un sistema di generatori per H. ■

2.1.4 Classi Laterali

Dato un sottogruppo $H \leq G$, definiamo in G la seguente relazione di equivalenza $\mathcal{R}_H^R$: *dati due elementi $g_1, g_2 \in G$, essi sono equivalenti ($g_1 \mathcal{R}_H^R g_2$) se esiste $h \in H$ tale che $g_1 = hg_2$.* L'insieme Hg, formato dagli elementi hg con $h \in H$ e $g \in G$, è detto **classe laterale destra** di H in G; in modo analogo è possibile definire le **classi laterali sinistre** tramite la relazione di equivalenza $\mathcal{R}_H^L$ ($g_1 \mathcal{R}_H^L g_2$ se esiste $h \in H$ tale che $g_1 = g_2 h$). D'ora in avanti saranno usati i laterali destri, a meno che non sia esplicitamente dichiarato, in quanto in modo simile si può fare riferimento a quelli sinistri. Ogni classe laterale puó essere indicata fornendo un unico elemento ad essa appartenente, detto **rappresentante**, in quanto, preso g_0 come rappresentante, l'elemento $g_1 \in Hg_0$ si otterrà come $g_1 = h_1 g_0$ con $h_1 \in H$, essendo $Hg_1 = Hh_1 g_0 = Hg_0$; da ciò si ottiene che classi laterali (destre o sinistre) distinte non possiedono elementi in comune. Le classi laterali hanno la stessa cardinalità di H, in quanto l'applicazione $h \in H \to hg \in Hg$ è biettiva. Consideriamo un insieme T costituito dai rappresentanti delle classi laterali destre di H in G; G è uguale all'unione disgiunta delle classi laterali, cioè

$$G = \bigcup_{t \in T} Ht \tag{2.20}$$

l'insieme T è un **trasversale destro**; equivalentemente si può definire un trasversale sinistro.

Possiamo esprimere il concetto di laterale e trasversale utilizzando il prodotto fra insiemi definito nel paragrafo 2.1.1, cioè la (2.20) può essere riscritta nella seguente forma: $G = HT$ e $|H \cap T| = 1$.

Proposizione 2.13 *Dato un sottogruppo H del gruppo G e indicando con T un trasversale destro, allora T^{-1} è un trasversale sinistro.*

Dimostrazione.

$$G = G^{-1} = (HT)^{-1} = T^{-1}H^{-1} = T^{-1}H \tag{2.21}$$

dove si è utilizzato il fatto che H è un sottogruppo. Inoltre si ha che $|H \cap T^{-1}| = |H^{-1} \cap T^{-1}| = 1$. ■

La cardinalità di T, detta **indice** di H in G e indicata con il simbolo $|G : H|$, è uguale alla cardinalità dell'insieme costituito da tutte le classi laterali di G rispetto ad H. Indichiamo la cardinalità di T con lo stesso simbolo indipendentemente dal fatto che T sia un trasversale destro o sinistro in quanto, per la precedente proposizione, esiste una biezione fra i trasversali destri e quelli sinistri, quindi si ha che $|G/\mathcal{R}_H^R| = |G/\mathcal{R}_H^L|$.

Da quanto detto finora risulta naturale usare come scrittura per indicare i trasversali, che di seguito chiameremo anche **insiemi quoziente**, la seguente

$$T \equiv G/\mathcal{R}_H^R \tag{2.22}$$

questa scrittura rappresenta in forma grafica anche il seguente teorema:

Teorema 2.14 (di Lagrange) *Se H è un sottogruppo del gruppo G allora $|G| = |G : H||H|$, e quindi se $|G|$ è finito si ha che $|G : H| = |G|/|H|$.*

Dimostrazione. L'indice di H in G, cioè la cardinalità di $G/\mathcal{R}_H^R$, è il numero di classi laterali di H in G; ogni classe laterale contiene $|H|$ elementi, quindi, essendo $G = H(G/\mathcal{R}_H^R)$, si ha che la cardinalità di G è il prodotto delle cardinalità di H e di $G/\mathcal{R}_H^R$. Inoltre se $|G|$ è finita allora è finita anche $|H|$ e quindi è possibile effettuare la divisione. ■

L'insieme $G/\mathcal{R}_H^R$, dove H è un sottogruppo del gruppo G, assume la struttura di gruppo (**gruppo quoziente**) se e solo se $Hg_1Hg_2 = Hg_1g_2$ cioè se $Hg_1Hg_2 = H(g_1H)g_2 = H(Hg_1)g_2 = Hg_1g_2$, dove $g_1, g_2 \in G$; un tale sottogruppo è detto **normale** od **invariante** ($gH = Hg$ [7]) ed è indicato con $H \preceq G$; dalla definizione segue che *se G è abeliano ogni sottogruppo è normale.* L'intersezione di sottogruppi normali è ancora un sottogruppo normale. La definizione di sottogruppo normale significa che Hg è sia un laterale destro sia un laterale sinistro, cioè si ha che $\mathcal{R}_H^R = \mathcal{R}_H^L$, quindi il gruppo quoziente si può denotare, senza ambiguità, con

$$G/H \tag{2.23}$$

Se $H \preceq G$ allora la proiezione canonica

$$\phi : g \in G \to Hg \in G/H \tag{2.24}$$

è un epimorfismo detto *epimorfismo canonico.* Dalla definizione di sottogruppo normale abbiamo che

$$g^{-1}Hg = H \qquad \forall g \in G \tag{2.25}$$

I sottogruppi normali sono un caso particolare di sottogruppi permutabili con ogni sottogruppo, come provato nella seguente proposizione.

Proposizione 2.15 *Il sottogruppo $\langle H, K\rangle$ generato da un sottogruppo normale H e da un sottogruppo K coincide con HK.*

Dimostrazione. Poiché H è un gruppo normale allora si ha

$$h_1k = kh_2 \in KH \tag{2.26}$$

dove $h_1, h_2 \in H$ e $k \in K$. Quindi $HK = KH$ cioè $HK = \langle H, K\rangle$. ■

La proprietà di essere un sottogruppo normale non è transitiva, cioè dato un sottogruppo normale F del sottogruppo normale H di G, allora non è detto che

[7] $gh_1 = h_2g$ dove $h_1, h_2 \in H$.

F sia un sottogruppo normale di G ($F \prec H \prec G$ non implica che $F \prec G$); invece se F è un sottogruppo normale di G ed è contenuto nel sottogruppo H ($F \subseteq H$), allora $F \prec H$.

Il gruppo G è detto **semplice** se non possiede sottogruppi normali, escludendo i sottogruppi banali G e $\{1\}$; G è detto **semisemplice** se non possiede sottogruppi normali abeliani, escludendo il sottogruppo banale $\{1\}$.

L'insieme C di tutti gli elementi del gruppo G che commutano con tutti gli elementi di G ($C = \{c : cg = gc \; \forall g \in G\}$) è detto **centro** di G; gli elementi di C formano un sottogruppo abeliano di G che, per la definizione, è anche invariante.

Esistono gruppi non commutativi in cui ogni sottogruppo è normale e sono detti *Hamiltoniani.*

2.1.5 Endomorfismi ed Automorfismi

Definizione 2.4 *Un applicazione di un gruppo G in sé è detta **endomorfismo** se è un omomorfismo del gruppo G in se stesso; in particolare se l'applicazione è biettiva allora si dice **automorfismo**.*

Esistono gruppi isomorfi ad un loro sottogruppo proprio (ciò è possibile solo nel caso di gruppi infiniti), in questo caso un isomorfismo è un endomorfismo iniettivo in quanto, dato un elemento del gruppo, non è detto che la controimmagine sia non vuota.

Fra gli endomorfismi è definita l'operazione di composizione (non commutativa) che corrisponde ad applicare in successione gli endomorfismi; ciò è possibile in quanto il dominio di ogni endomorfismo è l'intero gruppo e quindi contiene il codominio di un qualsiasi endomorfismo.

Proposizione 2.16 *Un endomorfismo ϕ di un gruppo $G =< a_1, a_2, ... >$ è completamente determinato una volta che siano note le immagini, tramite ϕ, del sistema di generatori.*

Dimostrazione.

$$\phi(a) = \phi(a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} ...) = \phi(a_{i_1})^{k_1} \phi(a_{i_2})^{k_2} ... \tag{2.27}$$

dove $a = a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} ....$ ■

Proposizione 2.17 *La composizioni di due endomorfismi è un endomorfismo.*

Dimostrazione.

$$[\psi \circ \phi](ab) = \psi[\phi(ab)] = \psi[\phi(a)\phi(b)] = \psi[\phi(a)]\psi[\phi(b)] = [\psi \circ \phi](a)[\psi \circ \phi](b) \quad (2.28)$$

■

In particolare la composizione di due automorfismi è un automorfismo.

Da quanto detto si deduce che l'insieme degli endomorfismi di un gruppo rispetto all'operazione di composizione non è un gruppo, dato che non esistono le applicazioni inverse[8], a differenza degli automorfismi che formano un gruppo che si denota di solito con $Aut(G)$.

Proposizione 2.18 *L'applicazione $\phi_a : x \in G \to axa^{-1} \in G$, dove $a \in G$, è un automorfismo del gruppo G detto* ***coniugato*** *mediante l'elemento a.*

Dimostrazione. L'applicazione ϕ_a definisce un omomorfismo in quanto

$$\phi_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \phi_a(x)\phi_a(y). \quad (2.29)$$

L'applicazione è, inoltre, un isomorfismo in quanto esiste la sua applicazione inversa

$$\phi_a^{-1} : x \in G \to a^{-1}xa \in G \quad (2.30)$$

$$[\phi_a \circ \phi_a^{-1}](x) = \phi_a(a^{-1}xa) = aa^{-1}xaa^{-1} = x \quad (2.31)$$

■

Gli automorfismi che si possono identificare con l'operazione di coniugazione rispetto ad un elemento del gruppo formano un sottoinsieme del gruppo degli automorfismi e tali automorfismi sono detti **inner**, mentre tutti gli altri automorfismi sono detti **outer**.

Proposizione 2.19 *Gli automorfismi inner di un gruppo G sono un sottogruppo del gruppo degli automorfismi, denotato di solito con $Inn(G)$.*

[8] Tra gli endomorfismi esiste **l'endomorfismo nullo** che associa ad ogni elemento del gruppo l'elemento neutro, che ovviamente non è invertibile, salvo il caso banale che G sia identico.

Dimostrazione. Consideriamo gli automorfismi ϕ_a e ϕ_b corrispondenti rispettivamente agli elementi $a, b \in G$, allora, utilizzando la (2.7) si ha

$$[\phi_a \circ \phi_b^{-1}](x) = \phi_a[\phi_b^{-1}(x)] = \phi_a(b^{-1}xb) = ab^{-1}xba^{-1} = (ab^{-1})x(ab^{-1})^{-1} = \phi_{ab^{-1}}(x) \tag{2.32}$$

cioè $\phi_{ab^{-1}}$ è l'automorfismo generato dall'elemento $ab^{-1} \in G$, cioè il coniugato mediante ab^{-1}. ■

Nel caso di un gruppo abeliano il sottogruppo degli automorfismi di tipo inner si riduce all'automorfismo identico; più in generale è vera la seguente affermazione:

Proposizione 2.20 *Dato un gruppo G ed il suo centro C, allora si ha che il sottogruppo $Inn(G)$ degli automorfismi di tipo inner è isomorfo al gruppo quoziente*

$$G/C. \tag{2.33}$$

Dimostrazione. Basta notare che C è il nucleo dell'omomorfismo

$$\phi : a \in G \to \phi_a \in Inn(G) \tag{2.34}$$

ed utilizzare il teorema A.1 degli omomorfismi. ■

Proposizione 2.21 *Il sottogruppo $Inn(G)$ degli automorfismi di tipo inner è normale in $Aut(G)$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'automorfismo ψ e l'automorfismo di tipo inner ϕ_a, ciò che dobbiamo dimostrare è che l'automorfismo $\psi \circ \phi_a \circ \psi^{-1}$ è di tipo inner.

$$[\psi \circ \phi_a \circ \psi^{-1}](x) = \psi\{\phi_a[\psi^{-1}(x)]\} = \tag{2.35}$$

$$= \psi[a\psi^{-1}(x)a^{-1}] = \psi(a)x\psi(a^{-1}) = \psi(a)x\psi^{-1}(a) = \phi_{\psi(a)}(x) \tag{2.36}$$

■

La definizione di sottogruppo normale data nel paragrafo 2.1.4 può essere riscritta nella seguente forma:

Definizione 2.5 *Un **sottogruppo normale** N del gruppo G è un sottogruppo tale che ogni elemento coniugato di $x \in N$ mediante qualsiasi elemento $a \in G$ è un elemento di N, cioè $axa^{-1} \in N$.*

2.1.6 Sottogruppi Caratteristici e Pienamente Invarianti

I sottogruppi normali vengono trasformati in se stessi sotto l'azione degli automorfismi di tipo inner; questa condizione si può generalizzare considerando il caso di sottogruppi invarianti sotto l'applicazione di tutti gli automorfismi, detti **sottogruppi caratteristici**, o sottogruppi invarianti rispetto a tutti gli endomorfismi, detti **sottogruppi pienamente invarianti**.

Esempio 2.5 1. *Il centro C di un gruppo G è un sottogruppo caratteristico in quanto, preso $a \in C$ ed un automorfismo ϕ, si ha*

$$\phi(a)\phi(x) = \phi(ax) = \phi(xa) = \phi(x)\phi(a) \qquad \forall x \in G, \tag{2.37}$$

cioè $\phi(a) \in C$;

2. *tutti i sottogruppi di un gruppo ciclico sono pienamente invarianti in quanto, detto a un generatore del sottogruppo e ϕ un qualsiasi endomorfismo ($\phi(a) = a^k$ per un certo $k \in \mathbb{N}$), si ha che $\phi(a^s) = (a^s)^k = a^{sk} \in \langle a \rangle$.*

Gruppi con Operatori

Possiamo generalizzare quanto affermato nel paragrafo precedente assegnando un insieme Σ di operatori, cioè un $\Sigma \subseteq End(G)$, al gruppo G; un sottogruppo che è trasformato in se stesso da tutti gli endomorfismi di Σ è detto **sottogruppo ammissibile** di G rispetto a Σ o **Σ-sottogruppo** di G.

Per l'insieme Σ contenete tutti gli automorfismi di tipo inner otterremo che i sottogruppi ammissibili corrispondono ad i sottogruppi normali, per $\Sigma = Aut(G)$ avremo che i sottogruppi ammissibili corrispondono ad i sottogruppi caratteristici ed, infine, per $\Sigma = End(G)$ i sottogruppi ammissibili saranno i sottogruppi pienamente invarianti.

2.1.7 Prodotti fra Gruppi

Presi n gruppi G_i definiamo un nuovo gruppo $G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ dove $g = (g_1, g_2, ..., g_n) \in G$ con $g_i \in G_i$; la moltiplicazione fra due elementi $g = (g_1, g_2, ..., g_n), h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in G$ è definita come $gh = (g_1h_1, g_2h_2, ..., g_nh_n) \in$

G; un prodotto fra gruppi così definito è detto **prodotto diretto**[9] (o **somma diretta** se il prodotto definito su tutti i G_n è commutativo).

Definiamo l'applicazione proiezione p_i che agisce nel seguente modo

$$p_i : (g_1, ..., g_i, ..., g_n) \in G \to g_i \in G_i \tag{2.38}$$

e l'applicazione di immersione $\imath_i$ tale che

$$\imath_i : g_i \in G_i \to (1_{G_1}, ..., g_i, ..., 1_{G_n}) \in \overline{G_i} \tag{2.39}$$

Proposizione 2.22 *Dato $G = G_1 \times ... \times G_i \times ... \times G_n$ si ha che gli elementi di $\overline{G_i}$ formano un sottogruppo normale di G isomorfo a G_i.*

Dimostrazione. $\overline{G_i}$ è isomorfo a G_i facendo corrispondere a $\{1_{G_1}, ..., h_i, ..., 1_{G_n}\}$ l'elemento $h_i \in G_i$; inoltre $\overline{G_i}$ è normale in quanto

$$G\overline{G_i} \ni (g_1, ..., g_i, ..., g_n) \cdot (1_{G_1}, ..., h_i, ..., 1_{G_n}) = (g_1 1_{G_1}, ..., g_i h_i, ..., g_n 1_{G_n}) = \tag{2.40}$$

$$= (g_1 1_{G_1}, ..., k_i g_i, ..., g_n 1_{G_n}) = (1_{G_1}, ..., k_i, ..., 1_{G_n}) \cdot (g_1, ..., g_i, ..., g_n) \in \overline{G_i}G \tag{2.41}$$

dove $k_i g_i = g_i h_i$ cioè $k_i = g_i h_i (g_i)^{-1}$. ■

Proposizione 2.23 *Siano G, G_1, G_2 dei gruppi, un omomorfismo $\phi : G \to G_1 \times G_2$ è in corrispondenza biettiva con le coppie ordinate di omomorfismi (ϕ_1, ϕ_2) dove:*

$$\phi_1 : G \to G_1 \qquad \phi_2 : G \to G_2 \tag{2.42}$$

Il nucleo di ϕ è $Ker(\phi) = Ker(\phi_1) \cap Ker(\phi_2)$.

Dimostrazione. La coppia (ϕ_1, ϕ_2) corrispondente a ϕ è

$$\phi_1 = p_1(\phi) \qquad \phi_2 = p_2(\phi) \tag{2.43}$$

Essendo $(1_{G_1}, 1_{G_2})$ l'elemento neutro del gruppo $G_1 \otimes G_2$, si ha che un elemento $h \in G$ appartiene al nucleo di ϕ se e solo se sono verificate entrambe le relazioni $\phi_1(h) = 1_{G_1}$ e $\phi_2(h) = 1_{G_2}$, ne segue $Ker(\phi) = Ker(\phi_1) \cap Ker(\phi_2)$. ■

[9] Nel caso in cui tutti i gruppi G_i siano commutativi si ha che il gruppo G è commutativo; in questo caso si adotta la notazione additiva e quindi si parla di **somma diretta** e $G = G_1 + G_2 + ... + G_n$.

Preso un gruppo G ed un sottogruppo $A \leq Aut(G)$ si definisce **prodotto semidiretto** di G per A, indicato con $G \rtimes A$, il gruppo avente come insieme sostegno il prodotto cartesiano $G \times A$ e munito della seguente moltiplicazione:

$$(g, \Lambda)(g', \Lambda') = (g\Lambda(g'), \Lambda\Lambda') \tag{2.44}$$

dove $(g, \Lambda) \in G \rtimes A$ e $\Lambda(g')$ è l'immagine di g' mediante l'automorfismo Λ.

L'elemento neutro del gruppo è la coppia $(1, id_G)$, dove id_G è l'automorfismo identico, e l'inverso di un elemento è dato da $(g, \Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1}(g^{-1}), \Lambda^{-1})$. L'applicazione $g \in G \rightarrow (g, id_G) \in G \rtimes A$ è un monomorfismo (G è canonicamente embedded in $G \rtimes A$); è pertanto lecito adottare l'identificazione $G \rtimes A$):

$$g = (g, id_G) \qquad g \in G \tag{2.45}$$

Proposizione 2.24 *G è un sottogruppo invariante di $G \rtimes A$.*

Dimostrazione.

$$(g, \Lambda)(g', id_G)(g, \Lambda)^{-1} = (g\Lambda(g'), \Lambda)(\Lambda^{-1}(g^{-1}), \Lambda^{-1}) = (g\Lambda(g')g^{-1}, id_G) \tag{2.46}$$

■

Proposizione 2.25 *$G \rtimes A/G$ è isomorfo a A.*

Dimostrazione. Basta notare che l'applicazione $\phi : (G, \Lambda) \in G \rtimes A \rightarrow \Lambda \in A$ è un epimorfismo da $G \rtimes A$ in A il cui nucleo è G. ■

Esempio 2.6 (Il Gruppo di Poincaré) *Il gruppo di Poincarè P è il gruppo relativistico che contiene i Boost, le rotazioni spaziale e le traslazioni spazio-temporali; astrattamente il gruppo è definito come il semiprodotto fra il gruppo additivo delle traslazioni nello spazio-tempo T e il gruppo delle trasformazioni di Lorentz L, che sono un sottogruppo degli automorfismi sullo spazio-tempo, cioè $T \rtimes L$.*

La legge di composizione del gruppo è la seguente

$$(b, \Lambda)(b', \Lambda') = (b + \Lambda(b'), \Lambda\Lambda') \tag{2.47}$$

dove $(b, \Lambda), (b', \Lambda') \in T \rtimes L$.

2.2 Rappresentazioni di Gruppi

Un gruppo è un'entità astratta definita tramite una legge di composizione in un insieme. Come già osservato precedentemente gruppi diversi ed isomorfi possono essere identificati cioè è possibile definire un gruppo in modo astratto; i diversi gruppi isomorfi sono "rappresentazioni" dello stesso gruppo astratto. Per operare con un gruppo è, quindi necessario scegliere una rappresentazione adatta. Di seguito vedremo cosa si intende per azione di un gruppo su altre strutture ed infine introdurremo le rappresentazioni.

2.2.1 Azioni di un Gruppo

concetto di simmetria

Un'**azione sinistra di un gruppo**, che di seguito sarà indicata col simbolo $\triangleright$, G su di un insieme S è un'applicazione che associa ad un elemento del gruppo e ad uno dell'insieme S un elemento di S, cioè è un'applicazione $(g,s) \in G \times S \mapsto g \triangleright s \in S$, che soddisfa le seguenti proprietà

1. $$1 \triangleright s = s \qquad \forall s \in S \tag{2.48}$$

2. $$g \triangleright (g' \triangleright s) = (gg') \triangleright s \qquad \forall g, g' \in G \qquad \forall s \in S \tag{2.49}$$

È facile osservare che l'applicazione

$$w : g \in G \to (s \to g \triangleright s) \in Sym(S) \tag{2.50}$$

è un omomorfismo. Viceversa ogni omomorfismo

$$w : G \to Sym(S) \tag{2.51}$$

da luogo ad un'azione sinistra di G su S:

$$(g,s) \in G \times S \to g \triangleright s := w(g)(s) \in S. \tag{2.52}$$

Un insieme con un'azione del gruppo G è detto G-insieme; allo stesso modo si può definire un'**azione destra** ($\triangleleft$). Si osservi che, se $(g,s) \in G \times S \to s \triangleleft g \in S$

è un'azione destra di G su S, allora l'omomorfismo $w : G \rightarrow Sym(S)$ ad essa associato è definito come segue:

$$w : g \in G \rightarrow (s \rightarrow s \lhd g^{-1}) \in Sym(S). \tag{2.53}$$

Poincarè

Definizione 2.6 *Si definisce* ***orbita*** *di s, con $s \in S$, sotto l'azione del gruppo G il sottoinsieme*

$$O_s = \{s' \in S : s' = g \rhd s \forall g \in G\} \subset S \tag{2.54}$$

L'orbita di un elemento dell'insieme sotto l'azione del gruppo ci dice come viene trasformato l'elemento sotto l'azione del gruppo.

Le orbite di un insieme S sotto l'azione di un gruppo G sono classi di equivalenza di S: $s' \sim s$ se $s' = g \rhd s$ per un certo $g \in G$. Il gruppo G opera indipendentemente su ciascuna orbita, non trasportando elementi di un orbita in una distinta, quindi le orbite di S formano una partizione di S, cioè S è l'unione disgiunta di tutte le sue orbite.

Se S contiene una sola orbita allora si dice che G *agisce transitivamente* su S.

Definizione 2.7 *Si definisce* ***stabilizzatore*** *di $s \in S$ il sottogruppo G_s di G che lascia invariato s, cioè*

$$G_s = \{g \in G : g \rhd s = s\} \tag{2.55}$$

Per verificare che lo stabilizzatore è un sottogruppo basta utilizzare la proposizione 2.7, cioè dati $x, y \in G_s$ bisogna verificare che $xy^{-1} \rhd s = s$, si ha infatti

$$xy^{-1} \rhd s = x \rhd (y^{-1} \rhd s) = x \rhd s = s. \tag{2.56}$$

Consideriamo ora l'azione destra del gruppo G sui propri laterali destri rispetto al sottogruppo H, cioè sull'insieme $G/\mathcal{R}_H^R$. Preso un laterale Ha, dove $a \in G$, l'azione del gruppo G è definita come segue:

$$(Ha) \rhd g = H \rhd (ag) \qquad g \in G \tag{2.57}$$

Il gruppo agisce transitivamente su $G/\mathcal{R}_H^R$, cioè $G/\mathcal{R}_H^R$ è formato da una sola orbita.

Proposizione 2.26 *Dato un G-insieme S ed un elemento $s \in S$, sia G_s lo stabilizzatore e O_s l'orbita di s; allora esiste un'applicazione biettiva $\phi : G_s a \in G/\mathcal{R}^R_{G_s} \mapsto s \lhd a \in O_s$. Questa applicazione è compatibile con l'azione di G, cioè $\phi((G_s a)g) = \phi(G_s a) \lhd g$.*

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto se l'applicazione è ben definita cioè se è indipendente dall'elemento che rappresenta il laterale di $G_s := H$ in G. Dati due elementi a, b appartenenti alla stessa classe laterale ($b = ha$ dove $h \in H$) allora deve verificarsi $s \lhd a = s \lhd b$, infatti

$$s \lhd b = s \lhd (ha) = (s \lhd h) \lhd a = s \lhd a \tag{2.58}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che h appartiene allo stabilizzatore di s.

L'applicazione è suriettiva in quanto $\forall g \in G$ abbiamo che $s \lhd g \in O_s$ per definizione di orbita. L'applicazione è anche iniettiva in quanto, supponendo per assurdo che presi due elementi a, b appartenenti a due classi differenti ($Ha \neq Hb$), si ha che $s \lhd a = sb$, si ottiene che $s \lhd ab^{-1} = s$ cioè che $ab^{-1} \in H$ il che comporta $Ha = Hb$, contro l'ipotesi. ■

Da questa proposizione si ottiene che l'indice $[G : G_s]$ coincide con la cardinalità $|O_s|$ dell'orbita di s. Così, se G è finito, l'ordine del gruppo G è uguale al prodotto fra l'ordine dello stabilizzatore e l'ordine dell'orbita

$$|G| = |G_s||O_s| \tag{2.59}$$

Proposizione 2.27 *Dato un G-insieme S, $s \in S$ e $s' \in O_s$, cioè tale che $s' = a \rhd s$ con $a \in G$, allora si ha la seguente relazioni tra gli stabilizzatori di s e di s'*

$$G_{s'} = aG_s a^{-1} \tag{2.60}$$

Dimostrazione. Se $a \in G$ allora $aG_s a^{-1} = G_s$; infatti, essendo $s' = G_{s'} \rhd s' = G_{s'} a \rhd s$, si ha $a \rhd s = G_{s'} a \rhd s$ da cui la tesi. ■

Esempio 2.7 (Il Gruppo di Poincarè) *L'azione del gruppo di Poincaré su uno spazio-tempo a 4 dimensioni M di Minkowski è la seguente* Minkowski

$$x'^{\mu} = (b, \Lambda) \rhd x = \Lambda^{\mu}(x) + b^{\mu} \tag{2.61}$$

dove $x, x' \in M$, $(b, \Lambda) \in T \rtimes L$ e si è identificato il gruppo additivo dei quadrivettori con il gruppo delle traslazioni.

Azioni di un Gruppo su se stesso

Tra le azioni di un gruppo G sono di particolare interesse le seguenti azioni di G sul proprio insieme sostegno (su se stesso).

Definizione 2.8 *Si definisce* ***traslazione sinistra*** *associata all'elemento* $g \in G$ *la seguente applicazione:*

$$L_g : x \in G \to gx \in G \tag{2.62}$$

Analogamente si definisce l'azione destra.

Teorema 2.28 (di Cayley) *Ogni gruppo è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo simmetrico* $Sym(G)$*.*

Dimostrazione. L'omomorfismo

$$L : G \to Sym(G) \tag{2.63}$$

è iniettivo e quindi

$$G \simeq Im(L) \tag{2.64}$$

■

Un'altra azione del gruppo su se stesso è la coniugazione

$$(g, x) \in G \times G \mapsto gxg^{-1} \in G \tag{2.65}$$

Lo stabilizzatore in G rispetto all'azione per coniugazione sull'elemento $x \in G$ è detto **centralizzante** di x in G e si denota con $C_G(x)$; esso è formato da tutti gli elementi di G che commutano con x

$$C_G(x) = \{g \in G | gxg^{-1} = x\} = \{g \in G : gx = xg\} \tag{2.66}$$

Proposizione 2.29 *L'intersezione di tutti i centralizzanti è il centro del gruppo.*

2.2.2 Le Rappresentazioni

L'azione di un gruppo G su su di un insieme M è una **rappresentazione** del gruppo su M; si può richiedere che la rappresentazione del gruppo conservi certe strutture di M, come linearità se M è uno spazio vettoriale (**rappresentazioni lineari**).

Definizione 2.9 *Sia G un gruppo topologico localmente compatto, separabile e unimodulare*[10] *e H uno spazio di Hilbert separabile, una* ***rappresentazione lineare*** *del gruppo G sullo spazio degli operatori lineari $L(H)$ in H è un'applicazione $T : x \in G \to T_x \in L(H)$ tale che:*

$$T_{xy} = T_x T_y, \qquad T_e = I. \tag{2.67}$$

La prima condizione significa che l'applicazione T è un omomorfismo di semigruppo, mentre la seconda corrisponde all'esistenza degli opertori inversi, cioè $Im(T) = \{T_x : x \in G\}$ è un sottogruppo del semigruppo $L(H)$. Inoltre una rappresentazione è detta **fortemente continua** se $\forall u \in H$ l'applicazione $x \to T_x u$ è continua.

Rappresentare un gruppo vuol dire realizzarlo come gruppo di trasformazioni di un dato spazio H, la cui dimensione definisce la **dimensione della rappresentazione**.

Una rappresentazione è detta **limitata** se gli operatori su H sono limitati, in particolare se il gruppo è compatto la rappresentazione è limitata.

Una rappresentazione è **unitaria** se gli operatori sullo spazio di Hilbert sono unitari.

Una rappresentazione è detta **fedele** se l'omomorfismo T è iniettivo, altrimenti la rappresentazione è detta **non fedele**.

Nel caso di gruppi di matrici in cui il prodotto è quello riga per colonna, possiamo rappresentare il gruppo con le matrici stesse, questa è detta **rappresentazione identica**.

[10] Un gruppo topologico è unimodulare se esiste una misura invariante a sinistra ed a destra; vedi l'appendice A.5

Teorema 2.30 *Data una rappresentazione T non fedele di G e posto $N = Ker(T) \neq I$, allora si ha che T induce una rappresentazione fedele del gruppo quoziente G/N che, con abuso di notazione, indicheremo con T.*

Dimostrazione. L'applicazione $T : x \in G \to T_x \in L(H)$ è un omomorfismo, quindi, utilizzando il teorema A.1, si ha che N è un sottogruppo normale e che

$$xN \in G/N \to T_x \in L(H) \tag{2.68}$$

è un monomorfismo ben definito in quanto il gruppo G/N è isomorfo ad sottogruppo del semigruppo $L(H)$; infine si può osservare che N è un sottogruppo chiuso e quindi che G/N è un gruppo topologico al pari di G. ■

Data una base ortonormale $|n\rangle$ di H possiamo esprimere gli operatori in forma matriciale come segue

$$D_{i,j}(x) = \langle i|T_x|j\rangle \tag{2.69}$$

in questo modo associamo al sottogruppo $Im(T)$ degli operatori il sottogruppo $GL(n, \mathbb{C})$, dove n è la dimensione dello spazio di Hilbert.

Esempio 2.8 (Il Gruppo di Poincaré) *La rappresentazione lineare del gruppo di Poinvarè sullo spazio di Minkowski a 4 dimensioni è data dalla matrici di Lorentz; una scrittura più compatta dell'azione del gruppo sullo spazio è data dalle seguenti matrici:* Minkowski

$$(0, \Lambda) = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{(sottogruppo di Lorentz)} \tag{2.70}$$

$$(b, Id_L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b^1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{(sottogruppo delle traslazioni)} \tag{2.71}$$

dove il quadrivettore sarà scritto nel seguente modo

$$x = (x^1, x^2, x^3, x^0, 1) \tag{2.72}$$

Dalla (2.44) si deduce che un generico elemento del gruppo si può sempre scrivere,tenendo conto dell'ordine, nel seguente modo

$$(b, \Lambda) = (b, Id_L)(0, \Lambda) \tag{2.73}$$

Rappresentazioni Equivalenti

Definizione 2.10 *Due rappresentazioni $T : G \to L(H)$ e $T' : G \to L(H')$ si dicono* ***equivalenti*** *se esiste un isomorfismo limitato S tale che $H' = SH$ e tale che si abbia $T'_x = ST_xS^{-1}$ per ogni $x \in G$.*

La relazione definita è una relazione di equivalenza in quanto:

1. ogni rappresentazione è equivalente a se stessa, basta porre $S = I$;
2. se $T'_x = ST_xS^{-1}$ con $H' = SH$, allora si ha $H = S^{-1}H'$ e $T_x = S^{-1}T'_xS$;
3. se $T : G \to L(H)$ è equivalente alla rappresentazione $T' : G \to L(H')$ che a sua volta è equivalente a $T :'' G \to L(H'')$ con $H' = SH$ e $H'' = S'H'$, allora si ha che $T''_x = S'T'_xS'^{-1} = S'ST_x(S'S)^{-1}$.

Si osservi che, essendo S un isomorfismo limitato tale che $H' = SH$ e $T : G \to L(H)$ è una rappresentazione lineare del gruppo G sullo spazio $L(H)$, allora

$$T' : x \in G \to ST_xS^{-1} := T'_x \in L(H) \tag{2.74}$$

è ancora una rappresentazione in quanto si ha

$$T'_{xy} = ST_{xy}S^{-1} = ST_xS^{-1}ST_yS^{-1} = T'_xT'_y \text{ e } I = SS^{-1} = I' \tag{2.75}$$

inoltre si ha che

$$\|T'_xu' - T'_yu'\| = \|S(T_xS^{-1}u' - T_yS^{-1}u')\| \leq \|S\|\|T_xu - T_yu\| \to 0 \text{ per } x \to y \tag{2.76}$$

avendo sfruttato la limitatezza di S ($\|S\| < \infty$).

Definizione 2.11 *Due rappresentazioni sono* ***unitariamente equivalenti*** *se l'isomorfismo è unitario, cioè se*

$$T'_xU = UT_x \qquad (\forall x \in G). \tag{2.77}$$

Teorema 2.31 *Due rappresentazioni unitarie equivalenti sono unitariamente equivalenti.*

Dimostrazione. La condizione aggiunta della (2.77) è

$$U^\dagger T'_x = T_x U^\dagger \tag{2.78}$$

da cui moltiplicando a sinistra per U ed utilizzando di nuovo la (2.77) si ha

$$UU^\dagger T'_x = UT_x U^\dagger = T'_x UU^\dagger \tag{2.79}$$

cioè $UU^\dagger = I$. ■

Teorema 2.32 *Due rappresentazioni unitariamente equivalenti, tramite una opportuna scelta delle basi in H e H' possono essere descritte dalle stesse matrici.*

Dimostrazione.

$$D'_{i,j}(x) = \langle i'|T'_x|j'\rangle = \langle i'|UT_xU^\dagger|j'\rangle = \langle i'|(|i'\rangle\langle i|)T_x(|j\rangle\langle j'|)|j'\rangle = D_{ij} \tag{2.80}$$

■

Rappresentazioni Riducibili ed Irriducibili

Definizione 2.12 *Presa una rappresentazione T del gruppo G sullo spazio di Hilbert H, un sottospazio $H_1 \subset H$ è detto* ***invariante*** *rispetto a T se*

$$T_x H_1 = H_1 \qquad \forall x \in G \tag{2.81}$$

I sottospazi invarianti banali sono l'origine e H stesso; i sottospazi non banali sono detti **propri**.

Definizione 2.13 *Una rappresentazione è* ***algebricamente irriducibile*** *se H non possiede sottospazi invarianti propri.*

Una rappresentazione è quindi detta **riducibile** se H possiede sottospazi invarianti propri. Detto H_1 un sottospazio invariante proprio di H, indichiamo con T_{H_1} la **restrizione** della rappresentazione T al solo sottospazio H_1.

Teorema 2.33 *Se H_1 è un sottospazio invariante dello spazio H su cui agisce la rappresentazione*

$$T : x \in G \to T_x \in L(H) \tag{2.82}$$

allora lo spazio quoziente H/H_1 è uno spazio invariante proprio.

Dimostrazione. Per ogni $x \in G$ è ben definita l'applicazione seguente (che, con abuso di notazione, sarà indicata ancora con T_x):

$$T_x : u + H_1 \in H/H_1 \to T_x(u) + H_1 \in H/H_1 \tag{2.83}$$

Infatti, se $u = v + H_1$, cioè $u - v \in H_1$, si ha:

$$T_x(u) - T_x(v) = T_x(u - v) \in T_x(H_1) = H_1 \tag{2.84}$$

e quindi $T_x(u) = T_x(v) + H_1$. Quindi T induce una rappresentazione di G sullo spazio quoziente H/H_1. Se H_1 è un sottospazio proprio allora la dimensione della rappresentazione indotta è minore della dimensione di T e diversa da 0. ∎

Se uno spazio H su cui agisce una rappresentazione T è decomponibile nella somma diretta di sottospazi invarianti propri (e non ulteriormente riducibili)

$$H = \bigoplus_i H_i \tag{2.85}$$

allora potremo scrivere la rappresentazione T come somma diretta delle sottorappresentazioni

$$T = \bigoplus_i T_{H_i}. \tag{2.86}$$

Teorema 2.34 *Data una rappresentazione unitaria T del gruppo G sullo spazio di Hilbert H si ha che, se H_1 è un sottospazio invariante proprio, lo è anche il suo complemento ortogonale $H_1^{\perp}$.*

Dimostrazione. Presi $u \in H_1$ e $v \in H_1^{\perp}$ abbiamo che per definizione

$$(T_x v, u) = (v, T_x^{\dagger} u) = (v, T_{x^{-1}} u) = 0 \tag{2.87}$$

dove l'ultima uguaglianza discende dall'invarianza di H_1; $(T_x v, u) = 0$ significa che $T_x v \in H^{\perp}$, da cui la tesi. ∎

Definizione 2.14 *Una rappresentazione tale che ogni sua sottorappresentazione ammetta una sottorappresentazione complementare è detta* ***completamente riducibile****.*

Quindi dal teorema 2.14 segue che una rappresentazione unitaria (di dimensione finita) è completamente riducibile; da ciò si può affermare che una condizione sufficiente per la completa riducibilitá per una rappresentazione è quella di essere equivalente ad una rappresentazione unitaria.

Consideriamo una decomposizione dello spazio H in sottospazi invarianti propri H_i ortogonali tra di loro e consideriamo, inoltre, una base ortonormale dei singoli H_i, potremo, quindi, costruire una base di H tramite il prodotto tensoriale delle basi dei singoli sottospazzi: $|n\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle \otimes ... \otimes |i\rangle \otimes ...$; Utilizzando questa base avremo che

$$\langle n'|T|n\rangle = \bigoplus_i \langle i'|T_{H_i}|i\rangle \tag{2.88}$$

da cui, se $H_i \neq H_{i'}$ l'elemento di matrice è 0, per l'ortogonalità tra gli spazi, altrimenti se $H_i = H_{i'}$ l'elemento di matrice corrisponde con quello della matrice della sottorappresentazione T_{H_i}; in conclusione avremo che la matrice della rappresentazione è a blocchi:

$$D(x) = \begin{bmatrix} D^1(x) & 0 & ... & 0 & ... \\ 0 & D^2(x) & ... & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & D^i(x) & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

Lemma 2.35 (di Schur) *Se T_1 e T_2 sono due rappresentazioni irriducibili di un gruppo G su H_1 e H_2 rispettivamente allora ogni G-omomorfismo A non nullo da H_1 a H_2 è invertibile.*

Dimostrazione. Se $A \neq 0$ non fosse invertibile allora avremo che $KerA$ è un sottospazio invariante di H_1; se fosse $KerA \neq 0$, $KerA$ ammetterebbe una sottorappresentazione non banale e quindi T_1 sarebbe riducibile, il che contrasta con l'ipotesi. Allora $KerA = 0$. ne segue che ImA è un sottospazio invariante proprio di H_2 e quindi T_2 è riducibile, contro l'ipotesi. ∎

Rappresentazioni di Gruppi Compatti

Teorema 2.36 *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un gruppo topologicamente compatto è equivalente ad una rappresentazione unitaria.*

Dimostrazione. Data una rappresentazione T del gruppo G sullo spazio H su cui è definito un prodotto scalare $\langle , \rangle$ definiamo, utilizzando una **misura di Haar**, la forma

$$(x, y) = \int_G \langle T_g x, \overline{T_g y} \rangle dg \tag{2.90}$$

che risulta essere hermitiana e tale che

$$(T_h x, T_h y) = \int_G \langle T_h(T_g x), \overline{T_h(T_g y)} \rangle dg = \int_G \langle T_{hg} x, \overline{T_{hg} y} \rangle dg \tag{2.91}$$

$$= \int_G \langle T_k x, \overline{T_k y} \rangle dk = (x, y) \tag{2.92}$$

dove si è fatto uso dell'invarianza della misura di Haar per traslazione ($d(hg) = d(g)$) di un gruppo compatto. Da quanto ricavato si vede che la rappresentazione è unitaria per il prodotto hermitiano $(\cdot, \cdot)$. ■

L'importanza dei gruppi compatti risiede quindi nel fatto che ogni loro rappresentazione è completamente riducibile.

Teorema 2.37 (di Stone) *Data una rappresentazione unitaria fortemente continua del gruppo additivo $\mathbb{R}$ allora esiste un unico operatore A hermitiano tale che*

$$U(t) = e^{itA} \tag{2.93}$$

$U(t)$ è un gruppo di trasformazioni ad un parametro. Il teorema si può generalizzare per il gruppo additivo $\mathbb{R}^n$ (anch'esso localmente compatto) con un gruppo a n parametri.

Tramite il **Teorema di Nelson** è possibile affermare che ad un gruppo compatto è possibile, sotto opportune condizioni, associarvi un'unica rappresentazione unitaria e fortemente continua tramite l'esponenziazione dei suoi generatori, cioè detti J_k dei generatori di un gruppo G si ha la rappresentazione

$$U(t) = e^{itJ_k} \tag{2.94}$$

per ogni k.

Queste rappresentazioni sono valide nell'intorno dell'unità ma risultano essere prolungabili a tutta la componente semplicemente connessa all'unità.

In conclusione un gruppo di Lie compatto è rappresentabile tramite l'esponenziazione dei suoi generatori in un intorno dell'unità.

2.3 Algebre

Definizione 2.15 *Un'insieme* $\mathbf{A}$ *possiede una struttura di* ***Algebra*** *se è uno spazio vettoriale e se esiste un'operazione binaria interna* $\cdot : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbf{A}$*, detta* ***prodotto interno****, per cui vale la proprietà distributiva.*

Inoltre, se il prodotto intero è associativo, l'algebra è detta **algebra associativa**

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 \tag{2.95}$$

Infine se possiede un elemento neutro è detta **algebra unitale**

$$\exists \mathbf{1} \in \mathbf{A} : \mathbf{1} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a} \qquad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{A} \tag{2.96}$$

Definizione 2.16 *Una sottoalgebra di un'algebra* $(\mathbf{A}, \cdot, k)$*, dove* k *è il campo rispetto a cui* $\mathbf{A}$ *è uno spazio vettoriale, è un sottoinsieme* $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{A}$ *che è chiuso rispetto a tutte le operazioni definite nell'algebra e tale che la struttura indotta* $\mathbf{H}(\cdot)$ *sia una* k*-algebra.*

Una sottoalgebra $\mathbf{H}$ di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{H} \cdot \mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}$ è detta **ideale**; la massima sottoalgebra $\mathbf{C}$ tale che $\mathbf{C} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}$ è detta **centro**. dimostrare

Sia $\mathbf{A}$ un'algebra ed $\mathbf{M}$ un suo ideale, allora definiamo le seguente relazione di equivalenza: $\mathbf{v_1} \sim \mathbf{v_2}$ se $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} + \mathbf{m}$ con $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$. La relazione di equivalenza è una congruenza di $\mathbf{L}$, cioè se $\mathbf{v_1} \sim \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{w_1} \sim \mathbf{w_2}$ allora $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{w_1} \sim \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_2}$, sicché il prodotto è indipendente dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v_2} + \mathbf{m}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}'. \tag{2.97}$$

Lo spazio quoziente $\mathbf{H} = \mathbf{L}/\mathbf{M}$ è quindi un'algebra che chiameremo **algebra quoziente**.

Un'applicazione f dalla k-algebra $\mathbf{A}$ alla k-algebra $\mathbf{B}$ è detta **omomorfismo** se è lineare rispetto al prodotto esterno col campo k e se

$$f(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1) \cdot f(\mathbf{a}_2) \qquad \forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{A} \tag{2.98}$$

inoltre se f è iniettiva, suriettiva o biettiva è detta, rispettivamente monomorfismo, epimorfismo od isomorfismo. L'insieme degli omomorfismi fra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si indica con $Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Due algebre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si dicono isomorfe se esiste un isomorfismo $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, indicheremo ciò con la scrittura $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$.

Un omomorfismo possiede le seguenti proprietà:

1. $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ dove $\mathbf{1}$ al primo membro e $\mathbf{1}$ al secondo membro sono gli elementi neutri, rispettivamente, di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$;
2. f trasforma sottoalgebre in sottoalgebre;
3. $Im(f) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{B} : \mathbf{b} = f(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbf{A}\}$ è una sottoalgebra di $\mathbf{B}$;
4. $Ker(f) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{A} : f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\}$ è un ideale di $\mathbf{A}$.

Dimostrazione.

1. $\mathbf{h} = f(\mathbf{g}) = f(\mathbf{g} \cdot \mathbf{1}) = f(\mathbf{g}) \cdot f(\mathbf{1}) = \mathbf{h} f(\mathbf{1})$;
2. detto $\mathbf{B}'$ il sottoinsieme di $\mathbf{B}$ immagine della sottoalgebra $\mathbf{A}'$ di $\mathbf{A}$, per dimostrare che $\mathbf{B}'$ è una sottoalgebra basta osservare che f è lineare e che

   $$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = f(\mathbf{a}_1) \cdot f(\mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \in \mathbf{B}'; \tag{2.99}$$

3. segue dalla 2., perché $\mathbf{A}$ è una sottoalgebra di $\mathbf{A}$;
4. presi $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{x} \in Ker(f)$ si ha

   $$f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{2.100}$$

   cioè che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \in Ker(f)$.

■

Definizione 2.17 *Una* ***derivazione*** *D di un'algebra è un'applicazione lineare dell'algebra in se stessa tale che:*

$$D(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = D(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot D(\mathbf{y}) \tag{2.101}$$

Prese $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$, dove $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ è l'insieme delle derivazioni nell'algebra di Lie $\mathbf{L}$, abbiamo che

$$(D_1 + D_2)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = D_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + D_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \tag{2.102}$$

$$= D_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot D_1(\mathbf{y}) + D_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot D_2(\mathbf{y}) = \tag{2.103}$$

$$= (D_1 + D_2)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot (D_1 + D_2)(\mathbf{y}) \tag{2.104}$$

e che

$$(\alpha D)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \alpha D(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot [\alpha D(\mathbf{y})] = \alpha D(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \tag{2.105}$$

per la proprietà distributiva del campo vettoriale $\mathbf{L}$ e la linearità delle derivazioni; da ciò si conclude che l derivazioni sono un campo vettoriale. verificare

2.3.1 Le Algebre di Lie

Introduciamo la seguente algebra non associativa:

Definizione 2.18 *Uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ sul campo k possiede una struttura di* ***algebra di Lie*** *se è assegnata un'operazione (moltiplicazione di Lie o* ***commutatore*** *o crochet) interna allo spazio $\mathbf{V}$ con le seguenti proprietà:*

1. $\begin{array}{l}[\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}] = \alpha[\mathbf{x}, \mathbf{z}] + \beta[\mathbf{y}, \mathbf{z}] \\ [\mathbf{z}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}] = \alpha[\mathbf{z}, \mathbf{x}] + \beta[\mathbf{z}, \mathbf{y}]\end{array}$ *con $\alpha, \beta \in K$ (Bilinearità)*
2. $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 0$ *(Nilpotenza)*
3. $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0$ *(Identità di Jacobi o Associatività di Jacobi)*

Sfruttando la prorietà di nilpotenza e la proprietà di bilinerità di un'algebra di Lie possiamo sviluppare il seguente commutatore

$$0 = [\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}] = [\mathbf{x}, \mathbf{x}] + [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + [\mathbf{y}, \mathbf{x}] + [\mathbf{y}, \mathbf{y}] = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] + [\mathbf{y}, \mathbf{x}] \tag{2.106}$$

da cui ricaviamo la sua antisimmetria

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = -[\mathbf{y},\mathbf{x}] \tag{2.107}$$

È facile osservare che, se il campo k ha caratteristica 2, allora ogni k-algebra di Lie è commutativa; mentre, se la caratteristica del campo è diversa da 2, una k-algebra di Lie $\mathbf{V}$ è commutativa se e solo se il commutatore è nullo, cioè $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

Data un'algebra associativa $\mathbf{A}$, possiamo costruire un'algebra di Lie tramite la seguente posizione:

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbf{xy} - \mathbf{yx} \tag{2.108}$$

dove $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{A}$. È facile verificare che il precedente commutatore soddisfa tutte le proprietà di un prodotto di Lie.

Un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbf{V}$ che sia stabile per la moltiplicazione di Lie indotta da $\mathbf{V}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathbf{V}$; un **ideale** è una sottoalgebra tale che $[\mathbf{V},\mathbf{H}] \subseteq \mathbf{H}$, inoltre l'algebra quoziente $\mathbf{M} = \mathbf{V}/\mathbf{H}$ è un'algebra di Lie che chiameremo **algebra quoziente di Lie**; si definisce **centro** di $\mathbf{V}$ la massima sottoalgebra $\mathbf{C}$ tale che $[\mathbf{V},\mathbf{C}] = \mathbf{0}$, la quale è evidentemente una sottoalgebra commutativa.

Assegnata una base $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$ nello spazio $\mathbf{V}$, sfruttando la bilinearità del commutatore otteniamo:

$$\mathbf{z} = z^i\mathbf{e_i} = [\mathbf{x},\mathbf{y}] = [x^j\mathbf{e_j}, y^k\mathbf{e_k}] = x^j y^k[\mathbf{e_j},\mathbf{e_k}] \tag{2.109}$$

cioè

$$z^i = [\mathbf{x},\mathbf{y}]^i = c^i_{jk}x^j y^k \tag{2.110}$$

Resta così definito un tensore di rango 3 e di tipo $(1,2)$; le c^i_{jk} sono dette **costanti di struttura**

$$c^i_{jk}\mathbf{e_i} = [\mathbf{e_j},\mathbf{e_k}]. \tag{2.111}$$

Dalla proprietà di antisimmetria e dall'identità di Jacobi si ha

$$c^i_{jk} = -c^i_{kj} \tag{2.112}$$

$$c^p_{is}c^s_{jk} + c^p_{js}c^s_{ki} + c^p_{ks}c^s_{ij} = 0 \tag{2.113}$$

Dati due spazi $\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}$ con una struttura di algebra di Lie, un omomorfismo $f : \mathbf{v} \in \mathbf{V_1} \mapsto f(\mathbf{v}) \in \mathbf{V_2}$ verifica la seguente

$$[f(\mathbf{v_1}), f(\mathbf{v_1'})] = f([\mathbf{v_1},\mathbf{v_1'}]) \qquad \forall \mathbf{v_1},\mathbf{v_1'} \in \mathbf{V_1} \tag{2.114}$$

Siano $\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2}, ..., \mathbf{L_n}$ n algebre di Lie sullo stesso campo k; nello spazio vettoriale $\mathbf{L} = \bigoplus_i \mathbf{L_i}$, **somma diretta** dei singoli spazi, definiamo il commutatore nel seguente modo:

$$[(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}), (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, ..., \mathbf{y_n})] = ([\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}], [\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}], ..., [\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n}]) \tag{2.115}$$

dove $\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i} \in \mathbf{L_i}$; è facile verificare che $\mathbf{L}$ resta munita di una struttura di algebra di Lie.

Una derivazione di un'algebra di Lie è tale che:

$$D([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = [D(\mathbf{x}), \mathbf{y}] + [\mathbf{x}, D(\mathbf{y})]; \tag{2.116}$$

Una derivazione soddisfa la seguente

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (D_1 D_2)[\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}] - (D_2 D_1)[\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}] = \\
= (D_1)(D_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot D_2(\mathbf{y})) - (D_2)(D_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot D_1(\mathbf{y})) = \\
= D_1 D_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + D_2(\mathbf{x}) \cdot D_1(\mathbf{y}) + D_1(\mathbf{x}) \cdot D_2(\mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot D_1 D_2(\mathbf{y}) + \\
- D_2 D_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} - D_1(\mathbf{x}) \cdot D_2(\mathbf{y}) - D_2(\mathbf{x}) \cdot D_1(\mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot D_2 D_1(\mathbf{y}) = \\
= [D_1, D_2](\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot [D_1, D_2](\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.117}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}
[D_3, [D_2, D_1]](\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \\
D_3 D_2 D_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + D_3 D_1(\mathbf{x}) \cdot D_2(\mathbf{y}) + D_3 D_2(\mathbf{x}) \cdot D_1(\mathbf{y}) + D_3 \mathbf{x} \cdot D_2 D_1(\mathbf{y}) + \\
- D_3 D_1 D_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} - D_3 D_2(\mathbf{x}) \cdot D_1(\mathbf{y}) - D_3 D_1(\mathbf{x}) \cdot D_2(\mathbf{y}) - D_3 \mathbf{x} \cdot D_1 D_2(\mathbf{y}) + \\
D_2 D_1(\mathbf{x}) \cdot D_3 \mathbf{y} + D_1(\mathbf{x}) \cdot D_3 D_2(\mathbf{y}) + D_2(\mathbf{x}) \cdot D_3 D_1(\mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot D_3 D_2 D_1(\mathbf{y}) + \\
- D_1 D_2(\mathbf{x}) \cdot D_3 \mathbf{y} - D_2(\mathbf{x}) \cdot D_3 D_1(\mathbf{y}) - D_1(\mathbf{x}) \cdot D_3 D_2(\mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot D_3 D_1 D_2(\mathbf{y}) + \\
- D_2 D_1 D_3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} - D_1 D_3(\mathbf{x}) \cdot D_2(\mathbf{y}) - D_2 D_3(\mathbf{x}) \cdot D_1(\mathbf{y}) - D_3 \mathbf{x} \cdot D_2 D_1(\mathbf{y}) + \\
+ D_1 D_2 D_3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + D_2 D_3(\mathbf{x}) \cdot D_1(\mathbf{y}) + D_1 D_3(\mathbf{x}) \cdot D_2(\mathbf{y}) + D_3 \mathbf{x} \cdot D_1 D_2(\mathbf{y}) + \\
- D_2 D_1(\mathbf{x}) \cdot D_3 \mathbf{y} - D_1(\mathbf{x}) \cdot D_2 D_3(\mathbf{y}) - D_2(\mathbf{x}) \cdot D_1 D_3(\mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot D_2 D_1 D_3(\mathbf{y}) + \\
+ D_1 D_2(\mathbf{x}) \cdot D_3 \mathbf{y} + D_2(\mathbf{x}) \cdot D_1 D_3(\mathbf{y}) + D_1(\mathbf{x}) \cdot D_2 D_3(\mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot D_1 D_2 D_3(\mathbf{y}) = \\
= D_3 D_2 D_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} - D_3 D_1 D_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot D_3 D_2 D_1(\mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot D_3 D_1 D_2(\mathbf{y}) + \\
- D_2 D_1 D_3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + D_1 D_2 D_3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot D_2 D_1 D_3(\mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot D_1 D_2 D_3(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.118}$$

da cui, sommando tutte le possibili permutazioni, si ottiene l'identità di Jacobi.

Quindi $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ è un'algebra di Lie. verificare

Siano $\mathbf{T}$ e $\mathbf{M}$ due k-algebre di Lie e sia D un omomorfismo di $\mathbf{M}$ in $\mathcal{D}(\mathbf{T})$; nello spazio vettoriale $\mathbf{M} \oplus \mathbf{T}$ definiamo il seguente commutatore:

$$[(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})] = ([\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}], \mathbf{x_2}D(\mathbf{y_1}) - \mathbf{x_1}D(\mathbf{y_2}) + [\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}]) \tag{2.119}$$

dove $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}) \in \mathbf{M} \oplus \mathbf{T}$. Tale operazione definisce l'algebra **somma semidiretta** delle algebre $\mathbf{M}$ e $\mathbf{T}$, indicata con $\mathbf{T} \rtimes \mathbf{M}$.

Nel caso particolare in cui consideriamo i vettori $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{0})$ e $\mathbf{y} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{y})$, otteniamo

$$[(\mathbf{0}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{0})] = (\mathbf{0}, \mathbf{x}D(\mathbf{y})) \tag{2.120}$$

cioè

$$[\mathbf{y}, \mathbf{x}] = \mathbf{y}D(\mathbf{x}) \tag{2.121}$$

Esempio 2.9 *1. Nell'insieme delle matrici quadrate su un campo k possiamo introdurre un commutatore nel seguente modo:*

$$[A, B] = AB - BA \tag{2.122}$$

dove $A, B \in M_n$. Il centro di questa algebra è la sottoalgebra delle matrici scalari λI.

2. Una base, sul campo complesso, dello spazio delle matrici 2×2 complesse $M(2, \mathbb{C})$ è data dalle matrici:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.123}$$

Utilizzando il commutatore fra matrici sulle le matrici di Pauli σ_i otteniamo:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon^i_{jk}\sigma_k. \tag{2.124}$$

Le matrici di Pauli sono una base di una sottoalgebra dell'algebra di Lie $M(2, \mathbb{C})$ con costanti di struttura $c^i_{jk} = 2i\varepsilon^i_{jk}$.

2.4 Varietà differenziabili

Ricordiamo che si definisce **omeomorfismo** dallo spazio topologico X allo spazio topologico Y un'applicazione $f : U \to V$ tra due aperti, dove $U \subset X$ e $V \subset Y$, invertibile e continua con la sua inversa.

Definizione 2.19 *Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è detta **diffeomorfismo** di classe C^k se tutte le sue derivate parziali di ordine l $(0 \leq l \leq k)$ sono omeomorfismi.*

Definizione 2.20 *Una **varietà differenziabile n-dimensionale** è uno spazio topologico di Hausdorff X tale che:*

1. *esiste una famiglia di aperti $\mathcal{U}$ che costituiscono un ricoprimento di X;*
2. *esiste un omeomorfismo $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ per ogni $U_i \in \mathcal{U}$;*
3. *per ogni coppia di carte (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) per cui $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \to \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo di classe C^k.*

Una sottovarietà è un sottospazio topologico della varietà strutturato anch'esso a spazio topologico di Hausdorff tramite la topologia indotta.

La coppia (U_i, ϕ_i) si dice **carta** e ϕ_i **applicazione coordinata**. Una collezione di carte i cui domini costituiscono un ricoprimento aperto di X forma un'**atlante** α. L'applicazione ϕ associa ad ogni punto della varietà un punto su $\mathbb{R}^n$ permettendo così di descrivere localmente una qualsiasi varietà utilizzando coordinate in $\mathbb{R}^n$.

La coppia $V_n = (X, \alpha)$ è una **varietà differenziabile n-dimensionale**.

Su una varietà differenziabile V_n una **funzione** $f : V_n \to \mathbb{C}$ si dice di classe C^h, cioè differenziabile fino all'ordine $h < k$, se è tale l'applicazione $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; inoltre una **curva** di classe C^h sulla varietà è un'applicazione $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to V_n$ tale che $\phi \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sia di classe C^h.

Un'applicazione $F : V_n \to V_m$ è detta di classe C^h se tale risulta la funzione $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$, dove (U, ϕ) e (V, ψ) sono due carte rispettivamente di V_n e V_m.

Esempio 2.10 *Una sfera S^2 di raggio r è una varietà bidimensionale che, immersa in uno spazio tridimensionale può essere definita dall'equazione*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0 \tag{2.125}$$

Con questa descrizione della varietà non è possibile descrivere in modo intrinseco (non considerando lo spazio in cui la varietà è immersa) la sfera, per fare ciò possiamo descriverla tramite delle coordinate, α e β, sulla superficie stessa e l'applicazione coordinata ϕ

$$\begin{aligned} x_1 = \phi_1(\alpha, \beta) &= r \sin\alpha \cos\beta \\ x_2 = \phi_2(\alpha, \beta) &= r \sin\alpha \sin\beta \\ x_3 = \phi_3(\alpha, \beta) &= r \cos\alpha \end{aligned} \tag{2.126}$$

introducendo così una carta sull'aperto $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. È necessaria una seconda carta definita in un modo simile nella parte della sfera in cui c'è ambiguità nella descrizione (per $\alpha = 0$, l'angolo β può assumere un qualsiasi valore).

2.4.1 L'Algebra delle Funzioni

Dal teorema 1.1 si capisce l'importanza di conoscere la struttura algebrica delle funzioni definite sulla varietà in $\mathbb{C}$; l'insieme delle funzioni di classe C^∞ su una varietà M, sarà indicato con $\mathcal{F}(M)$.

unitale se M compatto

Le $\mathcal{F}(M)$ formano uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ in quanto

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}(M) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{F}(M) \tag{2.127}$$

inoltre diviene un'algebra introducendo il prodotto puntuale definito come segue

$$(f \cdot g) = f(x) g(x) \in \mathcal{F}(M) \tag{2.128}$$

dove $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e l'ultimo prodotto è quello in $\mathbb{C}$.

L'algebra è banalmente associativa ed è unitale se la varietà è compatta in quanto, in questo caso, la funzione costante

$$u : x \in M \mapsto 1 \in \mathbb{C} \tag{2.129}$$

appartiene a $\mathcal{F}(M)$.

2.4.2 Spazi Vettoriali Tangenti

Come già affermato, una varietà differenziabile è localmente descrivibile col suo spazio tangente; ora vogliamo introdurre lo spazio dei vettori tangenti a in un punto; per fare ciò vedremo come esprimere i vettori tangenti a tutte le possibii curve passanti per un dato punto.

Definiamo il **vettore tangente** alla curva γ nel punto $x = \gamma(t_0)$ l'applicazione

$$\mathbf{X}_x : f \in \mathcal{F}(M) \mapsto \mathbf{X}_x f = \frac{d}{dt}\left[(f \circ \gamma)(t)\right]_{t_0} \in \mathbb{C} \tag{2.130}$$

$\mathbf{X}_x$ è quindi un operatore di *derivazione direzionale* (abbiamo costruito lo spazio vettoriale tangente come una derivazione dell'algebra $\mathcal{F}(M)$), che possiamo esplicitare nel seguente modo:

$$\mathbf{X}_x f = \frac{d}{dt}\left[(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma)(t)\right]_{t_0} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \phi^{-1}\right)_{\phi(x)}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t_0}. \tag{2.131}$$

Proposizione 2.38

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} \tag{2.132}$$

definiscono n vettori indipendenti.

Dimostrazione. Consideriamo una combinazione lineare dei vettori

$$\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{0} \tag{2.133}$$

che applichiamo alla funzione proiezione i-esima che restituisce la componente i-esima del vettore su $\mathbb{R}$ ottenendo

$$0 = \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(pr^j \circ \phi) = \lambda^i \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right) = \lambda^j \tag{2.134}$$

■

Da quanto appena dimostrato si ottiene che possiamo scrivere un generico vettore, in modo unico, come

$$\mathbf{X}_x = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.135}$$

con $X^i = \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t_0}$, definendo così una base detta **base olonoma**.

Gli **spazi vettoriali tangenti** (T_xV_n) sono sempre relativi al punto, in quanto solo nel caso in cui la varietà differenziale sia $\mathbb{R}^n$ potremo definire un unico spazio tangente indipendentemente dal punto [11].

Il duale di T_xV_n, cioè lo **spazio vettoriale cotangente** $T_x^*V_n$, si può dotare di una base definita dalla condizione

$$(\mathbf{\Theta}^i)_x\mathbf{X}_x = X^i \tag{2.136}$$

Definiamo **differenziale** di $f \in \mathcal{F}^1(M)$, che indichiamo con $(df)_x$, l'applicazione $(df)_x : T_xV_n \to \mathbb{C}$ tale che

$$(df)_x(\mathbf{X}_x) = \mathbf{X}_x f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t_0} = a_i X^i \tag{2.137}$$

dove $a_i = (\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi^{-1}))_{\phi(x)}$. Essendo $(df)_x = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}dx^i = a_i dx^i$ otteniamo che una base di $T_x^*V_n$ è formata dagli n covettori indipendenti dx^i.

Definiamo **campo vettoriale X** sulla varietà differenziabile l'applicazione

$$\mathbf{X} : x \in V_n \to \mathbf{X}_x \in T_xV_n \tag{2.138}$$

che esplicitando è

$$\mathbf{X} = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.139}$$

Il campo vettoriale è quindi definito *indipendentemente dal punto* sulla varietà ed è un operatore lineare che agisce nel seguente modo. $(\mathbf{X}f)(x) = \mathbf{X}_x f$. I campi vettoriali formano un'algebra di Lie coll'introduzione del commutatore

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{XY} - \mathbf{YX} = X^j\frac{\partial}{\partial x^j}(Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}) - Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}) = \tag{2.140}$$

$$= (X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.141}$$

2.5 I Gruppi di Lie

Definizione 2.21 *Un gruppo astratto G è un gruppo di Lie se*

[11] L'applicazione coordinata sarebbe $x^i = t^i$, da cui si ottiene $X^i = 1$.

1. *G è una varietà differenziabile;*

2. *l'applicazione $f(x, y) \to xy^{-1}$, con $x, y \in G$, è differenziabile.*

La condizione 2 è equivalente a dire che l'applicazione $x \to x^{-1}$ è differenziabile ed anche che lo è l'applicazione $(x, y) \to xy$, in quanto basta porre $x = e$ nel primo caso, mentre nel secondo basta sfruttare la differenziabilitá dell'applicazione $x \to x^{-1}$.

Un gruppo di Lie è un gruppo topologico rispetto alla struttura topologica indotta dalla sua struttura analitica (ricordiamo che una varietà differenziabile è uno spazio topologico di Hausdorff).

Proposizione 2.39 *Un gruppo di Lie è localmente compatto in quanto la varietà, attraverso l'applicazione coordinata, è localmente euclidea.*

Dimostrazione. L'applicazione coordinata è continua, per definizione, e, come tale, manda insiemi compatti in insiemi compatti; un'applicazione continua da uno spazio compatto ($\mathbb{R}^m$) in uno spazio separato (la varietà) manda chiusi in chiusi; dal fatto che un insieme chiuso in uno spazio separato è compatto otteniamo un isomorfismo, tramite l'applicazione canonica, che manda chiusi compatti in chiusi compatti, cioè un isomorfismo tra spazi localmente compatti (vedi il par A.4.3). ■

Teorema 2.40 *Un gruppo topologico localmente euclideo è isomorfo ad un gruppo di Lie.*

Ogni gruppo di Lie complesso di dimensione n può essere trattato come un gruppo di Lie reale $2n-$dimensionale.

Il seguente teorema dimostra la possibilità di avere una rappresentazione lineare finita di un gruppo di Lie localmente compatto:

Teorema 2.41 *Un gruppo topologico localmente compatto è un gruppo di Lie se esiste un'isomorfismo continuo da G in un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.*

Un sottogruppo $H < G$ è un gruppo di Lie se H è una sottovarietà.

Una curva $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \phi(t) \in G$ è detto **sottogruppo ad un parametro** se verifica la seguente

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(s+t) \tag{2.142}$$

L'algebra di Lie $\mathbf{g}$ di un gruppo G è una derivazione dell'algebra $\mathcal{F}(G)$ ed è legata al gruppo tramite l'applicazione di esponenziazione di un sottogruppo ad un parametro ϕ

$$\exp : \mathbf{X} \in \mathbf{g} \mapsto (\rho(\mathbf{X})\phi)(g) \equiv \mathbf{X}|_g \phi = \frac{d}{dt}[\phi(e^{t\mathbf{X}}g)]_{t=0} \in G \tag{2.143}$$

dove ρ definisce l'azione dell'algebra di Lie sull'algebra $\mathcal{F}(G)$; da ciò deduciamo che i sottogruppi ad una parametro sono una le curve integrali dei campi formanti l'algebra di Lie $\mathbf{g}$. Una base dell'algebra è costituita da n **generatori** $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$, dove $n = \dim(G)$, e soddisfa la seguente relazione

$$c^i_{jk} X_i = [X_j, X_k]. \tag{2.144}$$

cioè, dati due campi $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{g}$, si ha

$$C = c^i X_i = [A, B] = [a^j X_j, b^k X_k] = a^j b^k [X_j, X_k] \tag{2.145}$$

dove le c^i_{jk} sono le costanti di struttura e dove

$$\mathbf{A} = \sum_i^n a^i \mathbf{X}_i \tag{2.146}$$

$$\mathbf{B} = \sum_i^n b^i \mathbf{X}_i. \tag{2.147}$$

Le costanti di struttura definiscono un'**algebra di Lie** e gruppi di Lie a cui si può associare la medesima algebra di Lie sono detti **localmente isomorfi**.

L'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie è una descrizione locale del gruppo nelle vicinanze dell'unità.

Lo studio di un gruppo di Lie viene effettuato solo sulla componente connessa all'unità, in quanto, da ciò, discende la possibilità di utilizzare trasformazioni infinitesime sul gruppo.

Se tutti gli elementi di un gruppo sono punti in una regione finita della varietà allora il gruppo è compatto.

Teorema 2.42 *Fra tutti i gruppi aventi la stessa algebra di Lie ce ne è uno solo semplicemente connesso, cioè tale che ogni curva chiusa è riducibile con continuità ad un punto, detto* ***gruppo di ricoprimento universale****.*

Proposizione 2.43 *Sia G un gruppo di Lie semplicemente connesso,* $\mathbf{g}$ *la sua algebra di Lie,* $\mathbf{m}$ *un ideale di* $\mathbf{g}$ *e M il sottogruppo relativo a* $\mathbf{m}$ *allora M è un sottogruppo invariante chiuso di G.*

2.5.1 L'Algebra Inviluppante di un'Algebra di Lie

In questo paragrafo vogliamo mostrare l'esistenza di un'algebra associativa, che sarà indicata con $\mathcal{U}(\mathbf{g})$, costruita a partire dai generatori di un'algebra di Lie $\mathbf{g}$.

Data l'algebra tensoriale τ di un'algebra di Lie $\mathbf{L}$ sul campo k

$$\tau = k \oplus \mathbf{L} \oplus (\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}) \oplus ... \tag{2.148}$$

si ha che una sua sottoalgebra generata dagli elementi del tipo

$$J = X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \tag{2.149}$$

dove $X, Y \in \mathbf{L}$, è un ideale. Si definisce **algebra inviluppante** dell'algebra di Lie $\mathbf{L}$ l'algebra $\mathbf{E} = \tau / J$; indicheremo con π l'omomorfismo naturale di τ su $\mathbf{E}$.

Consideriamo una rappresentazione T dell'algebra di Lie $\mathbf{L}$ su uno spazio di Hilbert tale che

$$T(X_{i_1} \otimes X_{i_2} \otimes ...) = T(X_{i_1})T(X_{i_2})... \tag{2.150}$$

allora la rappresentazione T definisce un'unica rappresentazione $\widetilde{T} : X \in \mathbf{L} \mapsto T(X) \in \mathbf{E}$, infatti si ha

$$\widetilde{T}(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]) = T(X)T(Y) - T(Y)T(X) - T([X, Y]) = 0 \tag{2.151}$$

Si può dimostrare che, data una base X_1, X_r dell'algebra di Lie $\mathbf{L}$, una base dell'algebra inviluppante è data da elementi del tipo

$$\widetilde{X}_{i_1} \widetilde{X}_{i_2} \widetilde{X}_{i_3} ... \tag{2.152}$$

dove l'indice $i_j = 1, 2, ..., r$ e $\widetilde{X}_{i_j} = \pi(X_{i_j})$.

La stessa costruzione nel caso di un'algebra di Lie $\mathbf{g}$ definisce l'algebra inviluppante $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ associata ad un gruppo G. L'algebra è unitale se aggiungiamo ai generatori dell'algebra di Lie l'elemento neutro $\mathbf{1}$.

2.5.2 I Gruppi di Trasformazione

Data una varietà differenziabile V_n, una funzione $F : V_n \to V_n$ è un diffeomorfismo di classe C^r, cioè un'applicazione differenziabile r volte e tale che la derivata k-esima, con $k \leq r$, sia continua con la sua inversa, se $\phi_i \circ F \circ \phi_j^{-1}$ è un diffeomorfismo di classe C^r, dove ϕ_j e ϕ_i sono le applicazioni coordinate, rispettivamente, di un aperto U_j e dell'aperto U_i immagine, tramite F di U_j. I diffeomorfismi formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni denotato con $Diff(V_n)$.

Consideriamo un gruppo di Lie G ed un omomorfismo continuo

$$f : \alpha \in G \mapsto f_\alpha \in Diff(V_n) \tag{2.153}$$

tale che

$$f_1 = id_{V_n} \qquad f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta \in G) \tag{2.154}$$

cioè un'azione del gruppo G su V_n, come si vede osservando le (2.49); f è detto **gruppo di trasformazioni**.

Di seguito useremo anche la notazioni $f(\alpha, x) \equiv f_\alpha(x)$, con $x \in V_n$; la composizione con la precedente notazione è esplicitabile nel seguente modo

$$f_\alpha \circ f_\beta(x) = f(f(x, \beta), \alpha) = f(x, \phi(\alpha, \beta)) = f_\phi(x) \tag{2.155}$$

dove l'applicazione

$$\phi : (\alpha, \beta) \in G \times G \to G \tag{2.156}$$

è la legge di composizione interna del gruppo ($\phi(\alpha, \beta) \equiv \alpha\beta \in G$).

I Generatori

L'applicazione $\alpha \to f_\alpha(x_0)$ definisce un'**orbita** contenuta in V_n e passante per x_0; il campo vettoriale tangente all'orbita del gruppo, equivalentemente al caso di una curva, si dice generatore infinitesimale ed è sempre dato da (2.131)

$$\mathbf{X}_x = \left.\frac{\partial F(f(x_0, \alpha))}{\partial \alpha^i}\right|_{\alpha=1} = \left.\frac{\partial f^j(x_0, \alpha)}{\partial \alpha^i}\right|_{\alpha=1} \left.\frac{\partial}{\partial x^j} F\right|_{f(x_0,1)} . \tag{2.157}$$

Un punto sulla varietà V_n, facendo uso di un gruppo di trasformazioni, è esprimibile in due modi:

$$x = f(x_0, \alpha) \qquad x = f(x, 1) \tag{2.158}$$

Poiché siamo interessati al gruppo nelle vicinanze dell'unità, useremo la seconda forma da cui otteniamo che un punto infinitamente vicino ad x è esprimibile come

$$x + dx = f(x, \delta\alpha) \tag{2.159}$$

dove dx rappresenta un incremento infinitesimo rispetto ad un punto $x \neq 0$, $\delta\alpha$ invece rappresenta un incremento infinitesimo rispetto all'unità ($\alpha = 1$).

Dalla (2.159) e dallo sviluppo di Taylor di f al primo ordine rispetto a $\delta\alpha$ ($f(x, \delta\alpha) \to f(x, 1) + \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha^\sigma}|_{\alpha=1}\delta\alpha^\sigma$) otteniamo

$$dx^i = \left.\frac{\partial f^i(x, \alpha)}{\partial \alpha^\sigma}\right|_{\alpha=1} \delta\alpha^\sigma = u^i_\sigma(x)\delta\alpha^\sigma. \tag{2.160}$$

dove sono stati esplicitati gli indici. Gli $u^i_\sigma(x)$ corrispondono alle componenti dei generatori infinitesimali, quindi avremo che il campo associato al gruppo di trasformazione determinato da f è:

$$X_\sigma = u^i_\sigma(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.161}$$

Consideriamo ora il gruppo di Lie G.

$$\alpha^\rho + d\alpha^\rho = \phi^\rho(\alpha, \delta\beta) = \phi^\rho(\alpha, 1) + \left.\frac{\partial \phi^\rho(\alpha, \beta)}{\partial \beta^\tau}\right|_{\beta=1} \delta\alpha^\tau \tag{2.162}$$

dove è stato sostituito $\delta\beta$ con $\delta\alpha$ in quanto sono entrambi un incremento infinitesimo su G ed è stata sostituita $\phi(\alpha, \delta\beta)$ con il suo sviluppo al primo ordine rispetto a $\delta\beta$. Dalla (2.162) otteniamo, allo stesso modo del caso precedente, il campo su G

$$X_\sigma(\alpha) = \Theta^\rho_\sigma(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha^\rho} \tag{2.163}$$

dove $\Theta^\rho_\sigma(\alpha) = \frac{\partial \phi^\rho(\alpha,\beta)}{\partial \beta^\sigma}|_{\beta=1}$.

C'è da notare che il numero di generatori su V_n è determinato dalla dimensione dell'algebra di Lie di G quindi in generale le matrici u^i_σ sono rettangolari a differenza delle matrici Θ^ρ_τ che sono quadrate e, per le proprietà gruppali, invertibili.

Dalla (2.162) otteniamo anche la relazione

$$\delta\alpha^\sigma = \Psi^\sigma_\rho d\alpha^\rho \tag{2.164}$$

dove Ψ^σ_ρ è la matrice inversa di Θ^ρ_τ.

Esempio 2.11 (Il Gruppo di Poincaré) *Una trasformazione infinitesima del gruppo di Lorentz è*

$$\Lambda = 1 - i\sum(r_i\mathbf{L}_i + b_i\mathbf{K}_i) \tag{2.165}$$

dove $\mathbf{L}_i$ *sono i generatori delle rotazioni le cui regole di commutazioni sono*

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathbf{L}_k \tag{2.166}$$

e $\mathbf{K}_i$ *i generatori dei boost le cui regole di commutazione sono*

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = -i\varepsilon_{ijk}\mathbf{L}_k \tag{2.167}$$

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{K}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathbf{K}_k \tag{2.168}$$

I Generatori delle traslazioni spazio-temporali sono i campi $\mathbf{P}_\mu = \partial_\mu$ *le cui regole di commutazione sono* $[\mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}_\nu] = 0$. *Una trasformazione infinitesima è data da*

$$1 - i\alpha^\mu\mathbf{P}_\mu. \tag{2.169}$$

Consideriamo un diverso generatore dell'algebra di Lorentz

$$\mathbf{M}_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu \tag{2.170}$$

ottenuto ponendo

$$\mathbf{L}_i = \varepsilon_{ijk}\mathbf{M}_{kj} \tag{2.171}$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_{0i} \tag{2.172}$$

con le seguenti regole di commutazione

$$[\mathbf{M}_{\mu\nu}, \mathbf{P}_\lambda] = i(\eta_{\lambda\mu}\mathbf{P}_\nu - \eta_{\lambda\nu}\mathbf{P}_\mu) \tag{2.173}$$

$$[\mathbf{M}_{\mu\nu}, \mathbf{M}_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}\mathbf{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\mathbf{M}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\mathbf{M}_{\rho\nu} - \eta_{\nu\sigma}\mathbf{M}_{\rho\mu}) \tag{2.174}$$

I Generatori delle Trasformazioni e l'Algebra di Lie del Gruppo

Dalle relazioni (2.160) e (2.164) otteniamo

$$dx^i = u^i_\sigma(x)\Psi^\sigma_\tau(\alpha)d\alpha^\tau \tag{2.175}$$

cioè il **primo teorema di Lie** esprimibile anche nel seguente modo

$$\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^\tau} = u^i_\sigma(x)\Psi^\sigma_\tau(\alpha). \tag{2.176}$$

Perché questo sistema di equazioni lineari abbiano una soluzione unica deve essere verificata la condizione

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \alpha^\sigma \partial \alpha^\lambda} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \alpha^\lambda \partial \alpha^\sigma}. \tag{2.177}$$

Questa condizione puó essere riscritta usando la (2.176)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^\sigma}\left(u^i_\rho(x)\Psi^\rho_\lambda(\alpha)\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha^\lambda}\left(u^i_\rho(x)\Psi^\rho_\sigma(\alpha)\right) \tag{2.178}$$

usando lo sviluppo

$$\frac{\partial u^i_\rho(x)}{\partial \alpha^\sigma} = \frac{\partial u^i_\rho(x)}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \alpha^\sigma} = \Psi^\lambda_\sigma(\alpha)u^j_\lambda(x)\frac{\partial u^i_\rho(x)}{\partial x^j} \tag{2.179}$$

otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^\sigma}(u^i_\rho \Psi^\rho_\lambda) = \Psi^\tau_\sigma u^j_\tau \frac{\partial u^i_\rho}{\partial x^j}\Psi^\rho_\lambda + u^i_\rho \frac{\partial \Psi^\rho_\lambda}{\partial \alpha^\sigma} \tag{2.180}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^\lambda}(u^i_\rho \Psi^\rho_\sigma) = \Psi^\tau_\lambda u^j_\tau \frac{\partial u^i_\rho}{\partial x^j}\Psi^\rho_\sigma + u^i_\rho \frac{\partial \Psi^\rho_\sigma}{\partial \alpha^\lambda} = \Psi^\rho_\lambda u^j_\rho \frac{\partial u^i_\tau}{\partial x^j}\Psi^\tau_\sigma + u^i_\rho \frac{\partial \Psi^\rho_\sigma}{\partial \alpha^\lambda} \tag{2.181}$$

infine sottraendo la prima alla seconda ricaviamo

$$\Psi^\tau_\sigma \Psi^\rho_\lambda \left[u^j_\tau \frac{\partial u^i_\rho}{\partial x^j} - u^j_\rho \frac{\partial u^i_\tau}{\partial x^j}\right] = \left[\frac{\partial \Psi^\rho_\sigma}{\partial \alpha^\lambda} - \frac{\partial \Psi^\rho_\lambda}{\partial \alpha^\sigma}\right]u^i_\rho. \tag{2.182}$$

Sfruttando l'invertibilitá delle Ψ

$$\left[u^j_\mu \frac{\partial u^i_\nu}{\partial x^j} - u^j_\nu \frac{\partial u^i_\mu}{\partial x^j}\right] = \Theta^\sigma_\mu \Theta^\lambda_\nu \left[\frac{\partial \Psi^\rho_\sigma}{\partial \alpha^\lambda} - \frac{\partial \Psi^\rho_\lambda}{\partial \alpha^\sigma}\right]u^i_\rho. \tag{2.183}$$

Seguendo il medesimo ragionamento, ma partendo dalla relazione $d\beta^i = \Theta^i_\sigma(\beta)\Psi^\sigma_\tau d\alpha^\tau$ ottenuta dalla (2.164) e dalla sua equivalente rispetto a β ($d\beta^i = \Theta^i_\nu \delta\beta^\nu = \Theta^i_\nu \delta\alpha^\nu$), otteniamo

$$\Theta^j_\mu(\beta)\frac{\partial\Theta^i_\nu(\beta)}{\partial\beta^j} - \Theta^j_\nu(\beta)\frac{\partial\Theta^i_\mu(\beta)}{\partial\beta^j} = \Theta^\sigma_\mu(\alpha)\Theta^\lambda_\nu(\alpha)\left[\frac{\partial\Psi^\rho_\sigma(\alpha)}{\partial\alpha^\lambda} - \frac{\partial\Psi^\rho_\lambda(\alpha)}{\partial\alpha^\sigma}\right]\Theta^i_\rho(\beta). \tag{2.184}$$

da cui, sfruttando l'invertibilitá di $\Theta^i_\rho(\beta)$, possiamo separare α da β, quindi è possibile porre il membro in parentesi quadre uguale ad una costante (indipendente anche da x in quanto non compare nell'equazione); otteniamo cosí le due relazioni

$$\left[u^j_\mu\frac{\partial u^i_\nu}{\partial x^j} - u^j_\nu\frac{\partial u^i_\mu}{\partial x^j}\right] = C^\rho_{\mu\nu}u^i_\rho. \tag{2.185}$$

$$\left[\Theta^j_\mu\frac{\partial\Theta^i_\nu}{\partial\alpha^j} - \Theta^j_\nu\frac{\partial\Theta^i_\mu}{\partial\alpha^j}\right] = C^\rho_{\mu\nu}\Theta^i_\rho. \tag{2.186}$$

che, passando dalle componenti dei generatori ai generatori stessi del gruppo, possiamo riscrivere tramite le due seguenti relazioni di commutazione (**secondo teorema di Lie**):

$$[X_\mu(x), X_\nu(x)] = C^\rho_{\mu\nu}X_\rho(x) \tag{2.187}$$

$$[X_\mu(\alpha), X_\nu(\alpha)] = C^\rho_{\mu\nu}X_\rho(\alpha) \tag{2.188}$$

Quindi abbiamo dimostrato che i generatori del gruppo di trasformazioni sulla varietà V_n ed i campi dell'algebra di Lie del gruppo G sono la medesima algebra di Lie.

Capitolo 3

Algebre di Hopf e Quantum Groups

Precedente classico

Abbiamo visto che in NCG c'e' bisogno di altro

introduicaiamo la generalzzizaione i gruppi quantici, ridescrivendo alcune cose in maniera piu' duttile

disclaimer quantico per i gruppi ha a che fare con dformazione enon con la meccanica quantistica, anche se come vedremo per le applicazioni il paramtro fisico e'la massa di planck

In questo capitolo saranno ripresi alcuni concetti discussi precedentemente e rielaborati utilizzando una diversa notazione. Verrà introdotta **l'Algebra di Hopf**, estensione della struttura di algebra; lo scopo di questo capitolo è di introdurre dei nuovi oggetti (Twist) che ci permetteranno di "deformare" delle algebre di Hopf, ottenendo nuove algebre di Hopf che contengano le adeguate richieste di non commutatività; a tale scopo verranno introdotti i **Gruppi Quantici** ed alcune metodologie connesse ad essi tramite deformazioni di algebre di Hopf legate al gruppo.

3.1 Bialgebre ed Algebre di Hopf

3.1.1 Algebre

Ridefiniamo il concetto di algebra (vedi par. 2.3) utilizzando una diversa notazione la cui utilità sarà evidente in seguito.

Definizione 3.1 *Un'**algebra associativa unitale** $(\mathbf{A}, +, m, \eta, k)$ è uno spazio vettoriale $(\mathbf{A}, +, k)$ equipaggiato con un prodotto associativo*

$$m : \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \to \mathbf{A} \qquad \textit{(moltiplicazione)}^{[1]} \tag{3.1}$$

e dotato di un elemento neutro

$$\eta : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda \mathbf{1} \in \mathbf{A} \qquad \textit{(unità)} \tag{3.2}$$

verificanti le seguenti proprietà:

1. *m e η sono lineari*
2. *$m(m \otimes \mathbf{1}) = m(\mathbf{1} \otimes m)$[2] (associatività)*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathbf{1} \otimes m"'] \arrow[dr, "m \otimes \mathbf{1}"] & \\
\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \arrow[dr, "m"'] & & \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \arrow[dl, "m"] \\
 & \mathbf{A} &
\end{tikzcd}$$

3. *$m(\mathbf{1} \otimes \eta) = m(\eta \otimes \mathbf{1}) = id$[3] (esistenza dell'elemento neutro)*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \arrow[dr, "m"] & \\
\mathbb{C} \otimes \mathbf{A} \arrow[u, "\eta \otimes \mathbf{1}"] & = \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

[1] Secondo la nuova definizione si ha la seguente identificazione $m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

[2] $m(m(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{c}) = m(\mathbf{a}, m(\mathbf{b}, \mathbf{c}))$

[3] $m(\mathbf{a}, \eta(\lambda)) = m(\eta(\lambda), \mathbf{a}) \equiv \lambda \mathbf{a}$

$$
\boxed{\begin{array}{ccccc}
 & \mathbf{A}\otimes\mathbf{A} & & & \\
\mathbf{1}\otimes\eta & \uparrow & & \searrow & m \\
 & \mathbf{A}\otimes\mathbb{C} & = \mathbf{A} & &
\end{array}}
$$

Un'algebra è **commutativa** se verifica la seguente condizione:

$$m \circ \tau = m \tag{3.3}$$

dove τ è la seguente applicazione

$$\tau : \mathbf{x}\otimes\mathbf{y} \in \mathbf{A}\otimes\mathbf{A} \mapsto \mathbf{y}\otimes\mathbf{x} \in \mathbf{A}\otimes\mathbf{A} \tag{3.4}$$

3.1.2 Coalgebre

Gli assiomi definitori della coalgebra si ottengono invertendo le direzioni delle frecce nei diagrammi degli assiomi definitori dell'algebra. L'utilizzo del prefisso "co" è dovuto a delle relazioni di dualità che saranno introdotte successivamente.

Definizione 3.2 *Una* ***coalgebra coassociativa counitale*** $(\mathbf{C}, +, \Delta, \varepsilon; k)$ *sul campo k è uno spazio vettoriale $(\mathbf{C}, +; k)$ su cui è definito un* ***coprodotto***

$$\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}\otimes\mathbf{C} \tag{3.5}$$

per il quale esiste una ***counità***

$$\varepsilon : \mathbf{C} \to k \tag{3.6}$$

con le seguenti proprietà:

1. *Δ e ε sono lineari;*

2. *$(\Delta\otimes\mathbf{1})\Delta = (\mathbf{1}\otimes\Delta)\Delta$ (coassociatività)*

$$
\boxed{\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbf{C}\otimes\mathbf{C}\otimes\mathbf{C} & & & \\
\mathbf{1}\otimes\Delta & \nearrow & & & & \nwarrow & \Delta\otimes\mathbf{1} \\
 & \mathbf{C}\otimes\mathbf{C} & & & & \mathbf{C}\otimes\mathbf{C} & \\
\Delta & \nwarrow & & & & \nearrow & \Delta \\
 & & & \mathbf{C} & & &
\end{array}}
$$

3. $(\mathbf{1} \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes \mathbf{1})\Delta = id$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \arrow[d, "\varepsilon \otimes \mathbf{1}"'] & \\
\mathbb{C} \otimes \mathbf{C} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbf{C} \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes \varepsilon"'] & \\
\mathbf{C} \otimes \mathbb{C} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbf{C} \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Una coalgebra è **cocommutativa** se verifica la seguente condizione:

$$\tau \circ \Delta = \Delta \tag{3.7}$$

Formalmente possiamo scrivere il coprodotto nel seguente modo

$$\Delta(\mathbf{c}) = \sum_i \mathbf{c}_{i(1)} \otimes \mathbf{c}_{i(2)} \in \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \qquad \mathbf{c} \in \mathbf{C} \tag{3.8}$$

Tramite applicazioni ripetute di Δ possiamo costruire applicazioni da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C} \otimes ... \otimes \mathbf{C}$.

3.1.3 Algebre di Hopf

Definizione 3.3 *Una **bialgebra** $(\mathbf{H}, +, m, \Delta, \eta, \varepsilon; k)$ sul campo k è uno spazio vettoriale $(\mathbf{H}, +; k)$ su cui si ha sia una struttura di algebra $(\mathbf{H}, +, m, \eta; k)$, sia una struttura di coalgebra $(\mathbf{H}, +, \Delta, \varepsilon; k)$ in modo **compatibile**.*

Le relazioni di compatibilità tra le strutture di algebra e di coalgebra sono le seguenti

$$\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta) = m^{(2)} \circ (\Delta \otimes \Delta) \tag{3.9}$$

$$\Delta \circ \eta = \eta \otimes \eta \tag{3.10}$$

Δ, ε omomorfismi tra $\mathbb{C}$-algebre

cioè

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{3.11}$$

$$(\varepsilon \circ m)(\mathbf{h} \otimes \mathbf{g}) = m^{(0)}(\varepsilon(h) \otimes \varepsilon(g)) \tag{3.12}$$

dove l'ultima moltiplicazione è in k,

$$\varepsilon(\mathbf{1}) = 1 \tag{3.13}$$

Qui abbiamo usato il fatto che presi $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in \mathbf{H}$ abbiamo

$$\Delta \circ m(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \Delta(\mathbf{hg}) = \sum (\mathbf{hg})_{(1)} \otimes (\mathbf{hg})_{(2)} \tag{3.14}$$

e

$$(m \otimes m) \circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta(\mathbf{h}) \otimes \Delta(\mathbf{g})) = (m \otimes m) \circ (\sum \mathbf{h}_{(1)} \otimes \mathbf{g}_{(1)} \otimes \mathbf{h}_{(2)} \otimes \mathbf{g}_{(2)}) = \tag{3.15}$$

$$= \sum (\mathbf{hg})_{(1)} \otimes (\mathbf{hg})_{(2)} \tag{3.16}$$

dove $m^{(n)}$ indica il prodotto nell'algebra tensoriale $\bigotimes_n \mathbf{A}$. Di seguito l'apice non verrà indicato quando compare un prodotto tra elementi dello stesso tipo.

Per descrivere un gruppo è necessario aggiungere l'applicazione

$$S : \mathbf{A} \to \mathbf{A} \tag{3.17}$$

detta **coinverso**. Non si richiede che $S^2 = \mathbf{1}$ e che sia invertibile. S è un antiomomorfismo, cioè

$$S(\mathbf{ab}) = S(\mathbf{b})S(\mathbf{a}) \qquad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A} \tag{3.18}$$

e soddisfa la seguente

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon \tag{3.19}$$

Definizione 3.4 *Un'**algebra di Hopf** è una bialgebra $(\mathbf{A}, m, \Delta, \eta, \varepsilon)$ con coinverso S.*

Definizione 3.5 *Un'applicazione è un'**applicazione tra algebre di Hopf** se è un'applicazione sia tra l'algebra che tra la coalgebra e*

$$Sf(\mathbf{x}) = f(S\mathbf{x}) \tag{3.20}$$

3.2 Azione di un'Algebra

L'**azione sinistra** (l'azione destra si definisce equivalentemente a quella sinistra) di un'algebra $\mathbf{H}$ su un'algebra $\mathbf{A}$ è un'applicazione lineare $\alpha : (\mathbf{h}, \mathbf{x}) \in \mathbf{H} \otimes \mathbf{A} \mapsto \alpha_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}$ tale che

$$\alpha_{\mathbf{h}}(\alpha_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})) = \alpha_{m(\mathbf{h}\otimes\mathbf{g})}(\mathbf{x}) \tag{3.21}$$

$$\alpha_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \tag{3.22}$$

L'azione di un'algebra $\mathbf{H}$ su un'algebra $\mathbf{A}$ di seguito verrà indicata con $\triangleright$. Le precedenti relazioni si scriveranno nel seguente modo:

$$\mathbf{h} \triangleright \mathbf{g} \triangleright \mathbf{x} = (\mathbf{hg}) \triangleright \mathbf{x} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{1} \triangleright \mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{3.24}$$

Azione su un'Algebra e su una Coalgebra

Consideriamo una algebra di Hopf $\mathbf{H}$ ed un algebra $\mathbf{A}$ su cui far agire $\mathbf{H}$. L'azione di un elemento $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ su un elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ verà scritta nel seguente modo

$$\mathbf{h} \triangleright \mathbf{a}. \tag{3.25}$$

L'azione di $\mathbf{H}$ sul prodotto tra $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$ è definita nel seguente modo

$$\mathbf{h} \triangleright m(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = m(\Delta(\mathbf{h}) \triangleright (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})) = m\left(\sum (\mathbf{h}_{(1)} \triangleright \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{h}_{(2)} \triangleright \mathbf{b})\right) \tag{3.26}$$

inoltre si definisce

$$\mathbf{h} \triangleright \mathbf{1} = \varepsilon(\mathbf{h})\mathbf{1} \tag{3.27}$$

Le precedenti relazioni, nel caso dell'azione di $\mathbf{H}$ su di una coalgebra $\mathbf{C}$, si riscrivono come segue

$$\Delta(\mathbf{h} \triangleright \mathbf{c}) = \Delta(\mathbf{h}) \triangleright \Delta(\mathbf{c}) = \sum (\mathbf{h}_{(1)} \triangleright \mathbf{c}_{(1)}) \otimes (\mathbf{h}_{(2)} \triangleright \mathbf{c}_{(2)}) \tag{3.28}$$

e

$$\varepsilon(\mathbf{h} \triangleright \mathbf{c}) = \varepsilon(\mathbf{h})\varepsilon(\mathbf{c}) \tag{3.29}$$

con $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$.

3.3 Dualità

Due algebre di Hopf $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, sullo stesso campo k, sono in dualità se esiste un'applicazione bilineare

$$\langle , \rangle : \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \to k \tag{3.30}$$

tale che siano verificate le seguenti relazioni di compatibilità

$$\langle m(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2), \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2, \Delta(\mathbf{b}) \rangle \tag{3.31}$$

$$\langle \eta(1), \mathbf{b} \rangle = \varepsilon(\mathbf{b}) \tag{3.32}$$

$$\langle S(\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, S(\mathbf{b}) \rangle \tag{3.33}$$

e viceversa. In particolare, data una bialgebra $\mathbf{A}$ il suo duale $\mathbf{A}^* = Hom(\mathbf{A}, k)$ possiede una struttura naturale di bialgebra ponendo

$$m^*(\mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_2)(\mathbf{a}) = (\mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_2)\Delta(\mathbf{a}) \tag{3.34}$$

$$\Delta^*(\mathbf{l})(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2) = l(m(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2)) \tag{3.35}$$

$$S^*(\mathbf{l})(\mathbf{a}) = \mathbf{l}(S(\mathbf{a})) \tag{3.36}$$

3.3.1 Dualità tra $\mathcal{F}(G)$ e $\mathcal{U}(\mathbf{L})$

Consideriamo due esempi di algebre di Hopf che utilizzeremo in seguito, l'algebra $\mathcal{F}(G)$ delle funzioni definite su di un gruppo di Lie G in $\mathbb{C}$ e l'algebra inviluppante $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ dell'algebra di Lie $\mathbf{g}$ del medesimo gruppo.

L'algebra di Hopf di $\mathcal{F}(G)$

Nel paragrafo 2.4.1 abbiamo mostrato che le funzioni definite su una varietà in $\mathbb{C}$ è un algebra rispetto al prodotto puntuale; nel caso di un gruppo di Lie G possiamo ripetere lo stesso ragionamento per $\mathcal{F}(G)$ [4].

[4] Un gruppo di Lie non compatto non possiede una funzione unitá

$$u : x \in G \mapsto 1 \in \mathbb{C} \notin \mathcal{F}(G) \tag{3.37}$$

Di seguito saranno considerati i gruppi solo dal punto di vista locale, cioè considerando l'algebra di Hopf $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ definita in seguito.

Modificando la notazione e definendo il coprodotto come segue si ha che $\mathcal{F}(G)$ verifica gli assiomi definitori di algebra di Hopf:

1. $m(\phi \otimes \psi)(g) = \phi(g)\psi(g)$;

2. $\Delta(\phi)(g_1 \otimes g_2) = \phi(g_1 g_2)$

3. $\eta(\alpha) = \alpha u$

4. $\varepsilon(\phi) = \phi(e)$

5. $S(\phi)(g) = \phi(g^{-1})$

$\phi, \psi, u \in \mathcal{F}(G)$ $u(g) = 1$ $\forall g \in G$, $g_1, g_2 \in G$, e è l'elemento neutro di G, $\alpha \in \mathbb{C}$. L'algebra di Hopf $\mathcal{F}(G)$ è un'algebra commutativa, mentre non è cocommutativa se il gruppo non è abeliano.

L'algebra di Hopf di $\mathcal{U}(\mathbf{g})$

Nel paragrafo 2.5.1 abbiamo introdotto l'algebra associativa unitale inviluppante dell'algebra di Lie $\mathbf{g}$; anche quest'algebra è strutturabile ad algebra di Hopf definendo il coprodotto di un generatore in modo tale che corrisponda alla regola di Leibeniz; ciò si ottiene considerando l'azione di un generatore dell'algebra di Lie $\mathbf{X}$ su un prodotto di due funzioni

$$\mathbf{X} \triangleright m(f \otimes g) = m(\Delta(\mathbf{X}) f \otimes g) = m([\mathbf{X}f] \otimes g + f \otimes [\mathbf{X}g]) \tag{3.38}$$

L'algebra di Hopf è la seguente:

1. m è l'usuale moltiplicazione in $\mathcal{U}(\mathbf{g})$;

2. $\Delta(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{X}$, dove $\mathbf{X} \in \mathbf{g}$;

3. $\eta(\alpha) = \alpha\mathbf{1}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$;

4. $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1$, $\varepsilon(\mathbf{X}) = 0$ per $\mathbf{X} \neq \mathbf{1}$;

5. $S(\mathbf{X}) = -\mathbf{X}$.

dove $\mathbf{X}$ è un generatore dell'algebra di Lie $\mathbf{g}$. L'algebra di Hopf $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ è cocommutativa, mentre non è commutativa se il gruppo non è commutativo.

Queste due algebre di Hopf sono duali [7] secondo la seguente parentesi:

$$\langle , \rangle : (X, f) \in \mathcal{U}(\mathbf{g}) \otimes \mathcal{F}(G) \mapsto (Xf)(e) \in k \tag{3.39}$$

dove e è l'unità del gruppo G. In particolare un teorema dovuto A L. Schwartz afferma che l'algebra inviluppante $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ è isomorfa ad un sottospazio delle distribuzioni su G con supporto nell'unità cercare

$$\mathcal{U}(\mathbf{g}) \simeq G_e^{-\infty}(G) \tag{3.40}$$

Sappiamo dal teorema 1.1 che un gruppo di Lie può essere descritto tramite l'algebra $\mathcal{F}(G)$ (teorema 1.1), ma, sfruttando la dualità, anche tramite l'algebra inviluppante $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ dell'algebra di Lie $\mathbf{g}$ del gruppo.

Le relazioni di compatibilità sono le seguenti:

$$[\mathbf{X}(\phi\psi)](e) = \langle \mathbf{X}, m(\phi \otimes \psi) \rangle = \langle \Delta(\mathbf{X}), \phi \otimes \psi \rangle = (\mathbf{X}\phi)(e)\psi(e) + \phi(e)(\mathbf{X}\psi)(e) \tag{3.41}$$

$$(\mathbf{XY}\phi)(e) = \langle m(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}), \phi \rangle = \langle \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}, \Delta(\phi) \rangle = (\mathbf{XY}\phi)(e) \tag{3.42}$$

$$\langle \eta(\alpha), \phi \rangle = \varepsilon(\alpha\phi) = \alpha\phi(e) \tag{3.43}$$

$$\langle \mathbf{X}, u \rangle = \varepsilon(\mathbf{X}) = 0 \qquad \text{per } \mathbf{X} \neq \mathbf{1} \tag{3.44}$$

sistemare unità e inverso

La dualità tra l'algebra di Hopf $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ e l'algebra di Hopf $\mathcal{F}(G)$ corrisponde all'azione di $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ su $\mathcal{F}(G)$ calcolata sull'elemento neutro e del gruppo G, cioè

$$\langle \mathbf{X}, f \rangle = (\mathbf{X} \triangleright f)(e). \tag{3.45}$$

L'algebra $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ è la controparte locale della descrizione globale del gruppo tramite $\mathcal{F}(G)$, infatti, per quanto detto nel paragrafo 2.5, l'algebra di Lie è una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi calcolati nell'unità del gruppo.

3.4 L'Algebra di Hopf Quasi-triangolare

modificare

Definizione 3.6 *Un'**algebra di Hopf quasi-triangolare** è una coppia* $(\mathbf{A}, \mathcal{R})$*, dove* $\mathbf{A}$ *è un'algebra di Hopf e* $\mathcal{R}$ *è un elemento invertibile dell'algebra tensoriale* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ *e tale che*

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathbf{1})\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \\ (\mathbf{1} \otimes \Delta)\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \\ \tau \circ \Delta &= \mathcal{R}\Delta\mathcal{R}^{-1} \end{aligned} \tag{3.46}$$

La strutture $\mathcal{R}$ è detta **quasi-triangolare**.

Lemma 3.1 *Data un'algebra di Hopf quasi-triangolare* $(\mathbf{A}, \mathcal{R})$*, allora è verificata la seguente*

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{3.47}$$

*detta **equazione quantistica di Yang-Baxter**.*

3.5 Il Twist

Definizione 3.7 *Data un'algebra* $\mathbf{A}$*, un **twist** è un automorfismo dell'algebra tensoriale* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$

$$\mathcal{F} : \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \tag{3.48}$$

tale che

2-cociclo [2] 70-71

$$(\mathcal{F} \otimes \mathbf{1}) \circ (\Delta \otimes \mathbf{1}) \circ \mathcal{F} = (\mathbf{1} \otimes \mathcal{F}) \circ (\mathbf{1} \otimes \Delta) \circ \mathcal{F} \tag{3.49}$$

e che

$$(\varepsilon \otimes \mathbf{1}) \circ \mathcal{F} = (\mathbf{1} \otimes \varepsilon) \circ \mathcal{F} = \mathbf{1} \tag{3.50}$$

La proprietà (3.48) assicura la coassociatività del coprodotto ottenuto deformando un coprodotto originario tramite un twist, come si può vedere dal seguente Teorema:

Teorema 3.2 *Data una algebra di Hopf quasi-triangolare* $(\mathbf{A}, \mathcal{R})$ *ed un twist* $\mathcal{F}$*, allora* $(\mathbf{A}_{\mathcal{F}}, \mathcal{R}_{\mathcal{F}})$ *ottenuta da* $(\mathbf{A}, \mathcal{R})$ *tramite le seguenti posizioni*

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1} \tag{3.51}$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{R}\mathcal{F}^{-1} \tag{3.52}$$

$$S_{\mathcal{F}} = USU^{-1} \tag{3.53}$$

dove $U = \sum \mathcal{F}^{(1)}(S\mathcal{F}^{(2)})$ *ed è invertibile, è un'algebra di Hopf quasi-triangolare.*

Dimostrazione. Ciò che ci interessa mostrare è solo che $\Delta_{\mathcal{F}}$ è un coprodotto; $\Delta_{\mathcal{F}}$ è banalmente lineare ed è coassociativo in quanto si ha finire

$$(\Delta_{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta_{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1} \otimes id)\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}_{12}((\Delta \otimes id)\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1})\mathcal{F}_{12}^{-1} = \tag{3.54}$$

$$= \mathcal{F}_{12}[(\Delta \otimes id)\mathcal{F}][(\Delta \otimes id)\Delta][(\Delta \otimes id)\mathcal{F}^{-1}]\mathcal{F}_{12}^{-1} = \tag{3.55}$$

$$= \mathcal{F}_{23}[(id \otimes \Delta)\mathcal{F}][(id \otimes \Delta)\Delta][(id \otimes \Delta)\mathcal{F}^{-1}]\mathcal{F}_{23}^{-1} = \tag{3.56}$$

dove si sono utilizzati l'associatività del coprodotto Δ e la proprietá (3.48)

$$= \mathcal{F}_{23}((id \otimes \Delta)\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1})\mathcal{F}_{23}^{-1} = (id \otimes \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1})\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1} = (id \otimes \Delta_{\mathcal{F}})\Delta_{\mathcal{F}} \tag{3.57}$$

■

La relazione (3.50), invece, assicura l'esistenza della counità.

In particolare data un'algebra di Hopf quasi-triangolare commutativa si puó costruire un'algebra di Hopf quasi-triangolare non commutativa.

Data un'algebra quasi-triangolare $\mathbf{A}$, il twist $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ ci permette di costruire un'algebra di Hopf quasi-triangolare $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ con il coprodotto opposto. chiarire-[1]

Proposizione 3.3 *Data un'algebra* $\mathbf{A}$ *su cui agisce un'algebra di Hopf quasi-triangolare* $\mathbf{H}$ *in modo compatibile secondo la (3.26), allora l'algebra di Hopf quasi-triangolare* $\mathbf{H}_{\mathcal{F}}$*, ottenuta tramite il twist* $\mathcal{F}$*, agisce in modo compatibile sull'algebra* $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}$ *in cui é definito il prodotto* classificazione QG tramite cocicli-twist[1] 58-59

$$m_{\mathbf{A}_{\mathcal{F}}} = m_{\mathbf{A}} \circ \mathcal{F}^{-1} \tag{3.58}$$

Dimostrazione. aggiustare

$$\mathbf{h} \triangleright m_{\mathcal{F}}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \mathbf{h} \triangleright m(\mathcal{F}^{-1} \triangleright (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})) = m(\Delta(\mathbf{h}) \triangleright \mathcal{F}^{-1} \triangleright (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})) = \tag{3.59}$$

$$= m(\Delta(\mathbf{h})\mathcal{F}^{-1} \triangleright (\mathbf{b}\otimes\mathbf{c})) = m(\mathcal{F}^{-1}\Delta_{\mathcal{F}}(\mathbf{h}) \triangleright (\mathbf{b}\otimes\mathbf{c})) = m_{\mathcal{F}}(\Delta_{\mathcal{F}}(\mathbf{h}) \triangleright (\mathbf{b}\otimes\mathbf{c})) \tag{3.60}$$

dove $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$. ■

3.6 I Gruppi Quantici

Un gruppo di Lie G è una varietà differenziabile descrivibile localmente, tramite un'applicazione coordinata

$$\phi : g \in G \mapsto x = \phi(g) \in \mathbb{R}^m, \tag{3.61}$$

come $\mathbb{R}^m$, dove m è la dimensione del gruppo.

Le componenti delle coordinate di un elemento $g \in G$ commutano, cioè

$$x^\mu(g) \cdot x^\nu(g) = x^\nu(g) \cdot x^\mu(g) \tag{3.62}$$

dove si è posto $x^\mu(g) = \phi^\mu(g)$.

Più in generale su una varietà e quindi su un gruppo di Lie è definibile l'algebra di Hopf $\mathcal{F}(G)$ delle funzioni definite sul gruppo G ed a valori in $\mathbb{C}$. Le componenti delle coordinate sono funzioni appartenenti all'algebra $\mathcal{F}(G)$.

I **gruppi quantici** sono una generalizzazione non commutativa dell'algebra $\mathcal{F}(G)$ e quindi, per dualità, sono anche una generalizzazione non cocommutativa dell'algebra $\mathcal{U}(\mathbf{g})$; questa procedura è la stesa descritta nel paragrafo 1.1.2 per gli spazi non commutativi.

Per definire un gruppo quantico si introducono dei parametri q_i che regolano la non commutatività tra i parametri che identificano un elemento del gruppo. I parametri q_i sono continui e tali che, nel limite $q_i \to 1$, riproduce la commutatività tra i parametri del gruppo. In questo modo un gruppo quantico è una deformazione continua di un gruppo.

Un Esempio: $GL_q(2, \mathbb{C})$

Una rappresentazione del gruppo $GL(2, \mathbb{C})$ è data da matrici 2×2

$$T^a_b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono funzioni definite su $GL(2, \mathbb{C})$, cioè $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{F}(G)$.

La relazione matriciale

$$T^a_c T^b_d = T^b_d T^a_c \tag{3.64}$$

è verificata perché corrisponde alla commutativitá tra i parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Per generalizzare il gruppo ad un gruppo quantico introduciamo un parametro $q \in \mathbb{C}$ di non commutatività e definiamo le seguenti relazioni di commutazione:

$$\alpha\beta = q\beta\alpha, \quad \alpha\gamma = q\gamma\alpha, \quad \alpha\delta - \delta\alpha = (q - q^{-1})\beta\gamma \tag{3.65}$$

$$\beta\gamma = \gamma\beta, \quad \beta\delta = q\delta\beta, \quad \gamma\delta = q\delta\gamma \tag{3.66}$$

Queste relazioni possono essere riassunte nella seguente forma matriciale

$$R^{ab}_{ef} T^e_c T^f_d = T^a_f T^b_e R^{ef}_{cd} \tag{3.67}$$

dove

$$R^{ab}_{cd} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

La matrice R^{ab}_{cd} si riduce a $\delta^a_c \delta^b_d$ nel limite $q \to 1$ riproducendo la (3.64).

La matrice R^{ab}_{cd} modifica quindi il prodotto nell'algebra dei polinomi generata dagli elementi $T^a_b \in \mathcal{F}(G)$; perché l'algebra sia ancora associativa è necessario che la matrice R^{ab}_{cd} soddisfi la seguente

$$R^{a_1 b_1}_{a_2 b_2} R^{a_2 c_1}_{a_3 c_2} R^{b_2 c_2}_{b_3 c_3} = R^{b_1 c_1}_{b_2 c_2} R^{a_1 c_2}_{a_2 c_3} R^{a_2 b_2}_{a_3 b_3} \tag{3.69}$$

che è l'equazione (3.47).

La coalgebra non è modificata.

3.6.1 Il Twist e le Deformazioni di Gruppi

Data l'algebra di Hopf di un gruppo G (algebra quasi-triangolare) si può costruire un gruppo quantico tramite un twist ponendo:

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21} \mathcal{F}^{-1} \tag{3.70}$$

Questa procedure è detta **quantizzazione per deformazione** e comporta una deformazione del prodotto in $\mathcal{F}(G)$ secondo la seguente definizione

$$m_{\mathcal{F}} = m \circ \mathcal{F} \tag{3.71}$$

e una deformazione della coalgebra di $\mathcal{U}(G)$

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1} \tag{3.72}$$

dovuta alla dualità tra $\mathcal{U}(G)$ e $\mathcal{F}(G)$ in quanto si ha

$$\langle m_{\mathcal{F}}(f \otimes g), \mathbf{X} \rangle = (\mathbf{X} \triangleright m_{\mathcal{F}}(f \otimes g))(e) = m_{\mathcal{F}}(\Delta_{\mathcal{F}}(\mathbf{X}) f \otimes g)(e) = \langle f \otimes g, \Delta_{\mathcal{F}}(\mathbf{X}) \rangle_{\mathcal{F}} \tag{3.73}$$

dove si è utilizzato la proposizione 3.3.

Questo metodo verrà utilizzato in seguito, in quanto il nostro punto di partenza sarà l'introduzione di un Twist e lo studio delle sue implicazioni.

Capitolo 4

Simmetrie nella Geometria Noncommutativa

In questo capitolo risposta la capitolo 1. usiamo le simmetrie quantiche per la ncg. Usaimo il twist.

Nel seguito del capitolo introduciamo anche dei prodotti generalizzati (in due dimensioni) usando il twist.

Il prodotto di Moyal introdotto nel paragrafo (1.1.1) è una deformazione del prodotto puntuale tra funzioni definite sullo spazio fisico; la relazione

$$f(x) \star g(x) = \left(e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial z^\nu}} f(y) f(z) \right)_{y=z=x} \tag{4.1}$$

si può facilmente reinterpretare in termini di Twist, in quanto verifica tutte le condizioni richieste; allora è possibile usare la seguente notazione del prodotto di Moyal

$$f(x) \star g(x) = m_{\mathcal{F}} \left(f(x) \otimes g(x) \right) = m \left(\mathcal{F}^{-1} f(x) \otimes g(x) \right) \tag{4.2}$$

dove

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu} \tag{4.3}$$

e dove $m()$ indica il prodotto puntuale e $m_{\mathcal{F}}()$ il prodotto deformato.

Il Twist (4.3) si può esplicitare con la seguente serie:

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu} = \tag{4.4}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_1\beta_1}\theta^{\alpha_2\beta_2}\cdots\theta^{\alpha_n\beta_n}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\cdots\partial_{\alpha_n})\otimes(\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}\cdots\partial_{\beta_n}) \tag{4.5}$$

La relazione (1.10, usando la nuova notazione, si ottiene sviluppando il prodotto $x^\mu \star x^\nu$ come segue

$$x^\mu \star x^\nu = m(\mathcal{F}^{-1}x^\mu \otimes x^\nu) = m(x^\mu \otimes x^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\delta^\mu_\alpha \otimes \delta^\nu_\beta) = x^\mu x^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \tag{4.6}$$

In questo capitolo considereremo le deformazioni, a livello globale e locale, di alcuni gruppi di simmetria nel caso del Twist di Moyal sullo spazio tempo e nel caso bidimensionale del Twist

$$e^{i\theta x^{n+1}\partial_x \otimes y^{m+1}\partial_y} \qquad n, m \in \mathbb{Z} \tag{4.7}$$

Inoltre saranno rivisitati alcuni concetti geometrici per riadattare le strutture al caso non commutativo.

4.1 Gruppi Quantistici e Simmetrie: un'Introduzione

Versione Globale

In questa sezione vogliamo mostrare che l'algebra delle funzioni definite su di un gruppo può essere non commutativa perché l'azione del gruppo sullo spazio non commutativo sia compatibile con l'algebra del prodotto tra funzioni sullo spazio, cioè che può essere necessario considerare la "versione quantistica" del gruppo.

Vogliamo imporre che l'azione del gruppo G sullo spazio non commutativo di Minkowski S sia compatibile con il prodotto $\star$, cioè che Minkowski

$$(f_1 \star f_2)(g \triangleright x) = f_1(g \triangleright x) \star f_2(g \triangleright x) \tag{4.8}$$

L'azione di un gruppo di Lie G su di uno spazio S è un diffeomorfismo dello spazio S in se stesso

$$d : (g, x) \in G \otimes S \mapsto d(g, x) = g \triangleright x \in S \tag{4.9}$$

quindi possiamo riscrivere la relazione di compatibilità (4.8) nel seguente modo

$$(f_1 \star f_2)(x') = f_1 \left(d(g,x)\right) \star f_2 \left(d(g,x)\right) \tag{4.10}$$

dove $x' = d(g,x)$. Esplicitando la relazione (4.10) si ha

$$m(\mathcal{F}^{-1}(x')f_1(x') \otimes f_2(x')) = m(\mathcal{F}_G^{-1}(g)\mathcal{F}^{-1}(x)f_1(d(g,x)) \otimes f_2(d(g,x))) \tag{4.11}$$

Nel membro destro della precedente relazione si è considerato il fatto che $f_1(d(g,x))$ e $f_2(d(g,x))$ sono funzioni sia di $\mathcal{F}(S)$ che di $\mathcal{F}(G)$ e quindi sono soggette sia ad un twist dovuto alla non commutatività di S che ad una possibile non commutatività, esplicitata[1] con il twist $\mathcal{F}_G$, di $\mathcal{F}(G)$; il twist $\mathcal{F}_G$ eventualmente sarà uguale $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ nel caso in cui non ci siano deformazioni dell'algebra $\mathcal{F}(G)$.

Da questa relazione si deduce la seguente

$$\mathcal{F}_G(g) = \mathcal{F}^{-1}(x')\mathcal{F}(x) \tag{4.13}$$

che nel caso del prodotto di Moyal porta al seguente risultato:

$$\mathcal{F}_G^{-1}(g) = e^{i\theta^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \otimes \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)} = e^{i\theta^{\mu\nu}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right)\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} \otimes \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}} = \tag{4.14}$$

$$= e^{i\theta^{\mu\nu}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right)\frac{\partial \pi^a}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial \pi^b}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial}{\partial \pi^a} \otimes \frac{\partial}{\partial \pi^b}} \tag{4.15}$$

dove π^a sono le coordinate sul gruppo di Lie G.

Da ciò si deduce che l'algebra di Hopf delle funzioni $\mathcal{F}(G)$ e, per dualità, l'algebra $\mathcal{U}(\mathbf{g})$ devono essere deformate tramite il twist (4.15) perché l'azione del gruppo sullo spazio sia compatibile con il prodotto $\star$. dipendenza

Il twist (4.15) mostra una dipendenza dal punto (x^{α}) che può essere eliminata in alcuni casi. $\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}e\frac{\partial \pi^a}{\partial x'^{\alpha}}$

Esempio 4.1 (Il Gruppo di Poincaré) *Il gruppo di Poincaré agisce sullo spazio-tempo di Minkowsky secondo la relazione (2.61) che porta alle seguenti relazioni*

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \qquad \frac{\partial b^a}{\partial x'^{\alpha}} = \delta^a_{\alpha} \tag{4.16}$$

calcolate per $x^{\mu} = 0$ in cui si ha $x'^{\alpha} = b^{\alpha}$. Da ciò deduciamo,utilizzano la relazione spiegare

[1]La relazione

$$m(\mathcal{F}^{-1}(x')f_1(x') \otimes f_2(x')) = m(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}_G^{-1}(g)f_1(d(g,x)) \otimes f_2(d(g,x))) \tag{4.12}$$

porta a risultati simili.

(4.15), che il gruppo deve essere deformato con il seguente Twist [4]

$$\mathcal{F}_G^{-1} = e^{i\theta^{\mu\nu}(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu)\delta^a_\alpha \delta^b_\beta \frac{\partial}{\partial b^a} \otimes \frac{\partial}{\partial b^b}} = e^{i\theta^{\mu\nu}(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu)\frac{\partial}{\partial b^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial b^\beta}} \tag{4.17}$$

Versione locale

verificare

In questa sezione siamo interessati alla controparte locale della relazione di compatibilità (4.8), cioè alla deformazione dell'algebra inviluppante di $\mathbf{g}$, rappresentata come campi vettoriali su S.

Come fatto nel paragrafo 2.5.2 consideriamo delle trasformazioni infinitesime ed espandiamo tutto al primo ordine in δg. Le funzioni $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(S)$ si possono sviluppare nel seguente modo

$$f(d(\delta g, x)) = f(x) + \left.\frac{\partial f}{\partial g_\alpha}\right|_e \delta g_\alpha = f(x) + \left.\frac{\partial x^a}{\partial g_\alpha}\right|_e \frac{\partial f}{\partial x^a}\delta g_\alpha = f(x) + (\mathbf{X}^\alpha_x f)\delta g_\alpha \tag{4.18}$$

ed equivalentemente per f_2. Sostituendo le espansioni delle funzioni nella relazione di compatibilità (4.8) si ha

$$m(\mathcal{F}^{-1}(x')f_1(x') \otimes f_2(x')) = m(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}_G^{-1}(\delta g) f_1(d(\delta g, x)) \otimes f_2(d(\delta g, x))) = \tag{4.19}$$

$$= m(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}_G^{-1}(\delta g) f_1(x) \otimes f_2(x)) + \tag{4.20}$$

$$+ m\left(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}_G^{-1}(\delta g)[(\mathbf{X}^\alpha_x f_1)\delta g^\alpha \otimes f_2(x) + f_1(x) \otimes (\mathbf{X}^\alpha_x f_2)\delta g^\alpha]\right) \tag{4.21}$$

da cui

$$m(\mathcal{F}^{-1}(x')f_1(x') \otimes f_2(x')) - m(\mathcal{F}^{-1}(x)f_1(x) \otimes f_2(x)) = \tag{4.22}$$

$$= m\left(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}_G^{-1}(\delta g)[(\mathbf{X}^\alpha_x f_1)\delta g^\alpha \otimes f_2(x) + f_1(x) \otimes (\mathbf{X}^\alpha_x f_2)\delta g^\alpha]\right) \tag{4.23}$$

allora usando la relazione $\mathcal{F}_G^{-1}(\delta g) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}^{-1}(x')$ si ha

$$m_{\mathcal{F}}(f_1(x') \otimes f_2(x')) - m_{\mathcal{F}}(f_1(x) \otimes f_2(x)) = \tag{4.24}$$

$$= m\left(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}(x)\mathcal{F}^{-1}(x')[(\mathbf{X}^\alpha_x f_1)\delta g^\alpha \otimes f_2(x) + f_1(x) \otimes (\mathbf{X}^\alpha_x f_2)\delta g^\alpha]\right) = \tag{4.25}$$

$$= m_{\mathcal{F}}\left(\mathcal{F}(x)\mathcal{F}^{-1}(x')[(\mathbf{X}^\alpha_x \otimes id)\delta g^\alpha f_1(x) \otimes f_2(x) + (id \otimes \mathbf{X}^\alpha_x)\delta g^\alpha f_1(x) \otimes f_2(x)]\right) = \tag{4.26}$$

$$= m_{\mathcal{F}}\left(\mathcal{F}(x)[(\mathbf{X}^\alpha_x \otimes id)\mathcal{F}^{-1}(x')\delta g^\alpha f_1(x) \otimes f_2(x) + \right. \tag{4.27}$$

$$\left. + (id \otimes \mathbf{X}^\alpha_x)\mathcal{F}^{-1}(x')\delta g^\alpha f_1(x) \otimes f_2(x)]\right) = \tag{4.28}$$

dove si è utilizzato il fatto che i campi sono calcolati in x mentre il twist in x' e quindi commutano; infine, tenendo conto che

$$\mathcal{F}^{-1}(x')\delta g^{\alpha} = \mathcal{F}^{-1}\left(x + \left.\frac{\partial x'}{\partial g_{\alpha}}\right|_{e} \delta g_{\alpha}\right)\delta g^{\alpha} \tag{4.29}$$

sviluppata al primo ordine in δg si semplifica nella seguente

$$\mathcal{F}^{-1}(x)\delta g^{\alpha}, \tag{4.30}$$

si ottiene

$$= m\left(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}(x)[(\mathbf{X}_x^{\alpha}\otimes id)\mathcal{F}^{-1}(x)\delta g^{\alpha} f_1(x)\otimes f_2(x)+\right. \tag{4.31}$$

$$\left.+(id\otimes \mathbf{X}_x^{\alpha})\mathcal{F}^{-1}(x)\delta g^{\alpha} f_1(x)\otimes f_2(x)]\right) = \tag{4.32}$$

$$= m\left(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}(x)[\mathbf{X}_x^{\alpha}\otimes id + id\otimes \mathbf{X}_x^{\alpha}]\mathcal{F}^{-1}(x) f_1(x)\otimes f_2(x)\right)\delta g^{\alpha} = \tag{4.33}$$

$$= m_{\mathcal{F}}\left(\mathcal{F}(x)\Delta(\mathbf{X}_x^{\alpha})\mathcal{F}^{-1}(x) f_1(x)\otimes f_2(x)\right)\delta g^{\alpha} = \tag{4.34}$$

$$= m_{\mathcal{F}}\left(\Delta_{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_x^{\alpha}) f_1(x)\otimes f_2(x)\right)\delta g^{\alpha} \tag{4.35}$$

Ciò che abbiamo ottenuto è che è necessario deformare anche la coalgebra dell'algebra inviluppante.

Esempio 4.2 (Il Gruppo di Poincaré) *Abbiamo ricavato che, perché il prodotto dell'algebra $\mathcal{F}(S)$ deformato col twist (4.3) sia compatibile con l'azione dell'algebra iviluppante dei campi di S isomorfi all'algebra di Lie $\mathbf{p}$ del gruppo di Poincaré P, bisogna deformare il coprodotto dei generatori nel seguente modo*

dimostrare $\mathcal{F}$ è twist

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1} \tag{4.36}$$

Nel caso del twist di Moyal per le traslazioni abbiamo

$$\Delta_{\mathcal{F}}(P_{\mu}) = P_{\mu}\otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes P_{\mu} \tag{4.37}$$

che non cambia perché

$$[P_{\alpha}\otimes P_{\beta}, \mathcal{F}] = 0 \tag{4.38}$$

Ciò che cambia invece è il seguente coprodotto a causa delle regole di commutazione (2.174)

$$\Delta_{\mathcal{F}}(M_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu}\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes M_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}[(\eta_{\alpha\mu}P_{\nu}-\eta_{\alpha\nu}P_{\mu})\otimes P_{\beta} + P_{\alpha}\otimes(\eta_{\beta\mu}P_{\nu}-\eta_{\beta\mu}P_{\nu})] \tag{4.39}$$

Con la deformazione dell'azione possiamo rivedere il calcolo (1.17):

$$M_{\mu\nu} \triangleright [x_\rho, x_\sigma] = M_{\mu\nu} \triangleright m_{\mathcal{F}}(x_\rho \otimes x_\sigma - x_\sigma \otimes x_\rho) = m_{\mathcal{F}}(\Delta_{\mathcal{F}}(M_{\mu\nu}) \triangleright [x_\rho \otimes x_{sigma} - x_\sigma \otimes x_\rho]) = \tag{4.40}$$

$$= ([x_\mu, x_\rho] - i\theta_{\mu\rho})\eta_{\nu\sigma} - ([x_\mu, x_\sigma] - i\theta_{\mu\sigma})\eta_{\nu\rho} + \tag{4.41}$$

$$+([x_\nu, x_\sigma] - i\theta_{\nu\sigma})\eta_{\mu\rho} - ([x_\nu, x_\rho] - i\theta_{\nu\rho})\eta_{\mu\sigma} = 0 \tag{4.42}$$

da cui

$$M_{\mu\nu} \triangleright [i\theta_{\rho\sigma}] = 0 \tag{4.43}$$

cioè $\theta^{\mu\nu}$ è un tensore invariante se il coprodotto è deformato.

SONG AND DAN- CES!!!

4.2 Twists con Campi Commutanti

In questo paragrafo sarà considerata un twist costruito a partire da generici campi commutanti, riproducendo, in parte, il caso del twist di Moyal.

Consideriamo il seguente Twist

$$e^{i\theta \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}} = \sum_l^\infty \frac{(i\theta)^l}{l!} \mathbf{X}^l \otimes \mathbf{Y}^l \tag{4.44}$$

dove $\mathbf{X}$ commuta con $\mathbf{Y}$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0 \tag{4.45}$$

Per verificare che la (4.44) sia un Twist dobbiamo verificare la sua associatività (3.49). Il membro sinistro della relazione (3.49) si sviluppa nel seguente modo

$$(\mathcal{F} \otimes id)(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = (\mathcal{F} \otimes id)(\sum_l^\infty \frac{(i\theta)^l}{l!} \Delta(\mathbf{X}^l) \otimes \mathbf{Y}^l) = \tag{4.46}$$

$$= (\mathcal{F} \otimes id)(\sum_l^\infty \frac{(i\theta)^l}{l!} \sum_k^l \binom{l}{k} \mathbf{X}^k \otimes \mathbf{X}^{l-k} \otimes \mathbf{Y}^l) = \tag{4.47}$$

$$= \sum_{l,t}^\infty \frac{(i\theta)^{l+t}}{l!t!} \sum_k^l \binom{l}{k} \mathbf{X}^{k+t} \otimes \mathbf{X}^{l-k}\mathbf{Y}^t \otimes \mathbf{Y}^l \tag{4.48}$$

dove

$$\Delta(\mathbf{X}^l) = \sum_k^l \binom{l}{k} \mathbf{X}^k \otimes \mathbf{X}^{l-k} \tag{4.49}$$

Quest'ultima relazione non è valida nel caso in cui $\mathbf{X} = \mathbf{1}$, in quanto si ha

$$\Delta(\mathbf{1}^l) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{4.50}$$

Da ciò segue che l'associatività non è verificata se solo uno dei due campi è uguale a $\mathbf{1}$, mentre se entrambi i campi sono uguali a $\mathbf{1}$ otteniamo un Twist che modifica il prodotto con una costante moltiplicativa ($e^{i\theta}$).

Il membro destro della relazione (3.49), invece, si sviluppa come segue

$$(id \otimes \mathcal{F})(id \otimes \Delta)\mathcal{F} = \sum_{l,t}^{\infty} \frac{(i\theta)^{l+t}}{l!t!} \sum_{k}^{l} \binom{l}{k} \mathbf{X}^l \otimes \mathbf{X}^t \mathbf{Y}^{l-k} \otimes \mathbf{Y}^{k+t} \tag{4.51}$$

I due membri sono uguali ponendo $l = k + t$.

Osserviamo ora come è fatta la parentesi di Poisson per questo twist, che sappiamo essere il primo termine dello sviluppo del commutatore deformato

Poisson Structure $[f, g] = i\theta\{f, g\} + ...$

$$[f, g]_{\mathcal{F}} = m(\mathcal{F} f \otimes g) - m(\mathcal{F} g \otimes f) = \tag{4.52}$$

$$i\theta[\mathbf{X}(f)\mathbf{Y}(g) - \mathbf{X}(g)\mathbf{Y}(f)] + O(\theta^2) \tag{4.53}$$

4.3 Altri Twists e Altri Prodotti

In questo paragrafo sarà introdurremo (per la prima volta, per quanto siamo a conoscenza) una classe di twist in due dimensioni in cui ogni twist è individuato da due numeri $n, m \in \mathbb{Z}$ e saranno studiate le deformazioni delle traslazioni e delle rotazioni.

quindi abbiamo una classe di esempi di teorie ncg che hanno una simmetria quantica, pur senza avere quella classica.

Inoltre sono stati segnalati alcuni casi in cui le relazioni diventano particolarmente semplici. I twists trattati sono i seguenti

$$\mathcal{F} = e^{i\theta X_n \otimes Y_m} \tag{4.54}$$

dove

spiegare cosa sono

$$\begin{aligned} X_n &= x^{n+1}\partial_x \\ Y_m &= y^{m+1}\partial_y \end{aligned} \tag{4.55}$$

L'oggetto (4.54) è un twist in quanto si ha $[X_n, Y_m] = 0$.

Questi Twists agiscono su uno spazio bidimensionale e, a differenza del Twist di Moyal, agiscono con derivate rispetto a coordinate diverse sul primo e sul secondo termine del prodotto.

4.3.1 I Prodotti

Per sviluppare il twist

$$\mathcal{F} = e^{i\theta X_n \otimes Y_m} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} X_n^l \otimes Y_m^l \tag{4.56}$$

dobbiamo sostituire le seguenti relazione

$$X_n^l = \sum_{k=1}^{l} B_k^l(n) x^{ln+k} \partial_x^k \tag{4.57}$$

$$Y_m^l = \sum_{k=1}^{l} B_k^l(m) y^{lm+k} \partial_y^k \tag{4.58}$$

dove i coefficienti $B_k^l(n)$ sono dati dalle seguenti relazioni di ricorrenza

$$B_1^{l+1}(n) = B_1^l(n)(ln+1) = \prod_{t=1}^{l}(tn+1) \tag{4.59}$$

$$B_k^{l+1}(n) = B_k^l(n)(ln+k) + B_{k-1}^l(n) \qquad \text{per } 2 \leq k \leq l \tag{4.60}$$

$$B_{l+1}^{l+1}(n) = B_l^l(n) = B_1^1(n) = 1 \tag{4.61}$$

in quanto

$$X_n^{l+1} = \sum_{k=1}^{l} B_k^l(n)[(ln+k)x^{(l+1)n+k}\partial_x^k + x^{(l+1)n+k+1}\partial_x^{k+1}] = \tag{4.62}$$

$$= B_1^l(n)(ln+1) + \sum_{k=2}^{l}[B_k^l(n)(ln+k) + B_{k-1}^l(n)]x^{(l+1)n+k}\partial_x^k + B_l^l x^{l+1}\partial_x^{l+1} \tag{4.63}$$

In particolare per $n = 0$ si ottengono le seguenti

$$B_1^{l+1}(0) = B_1^l(0) = B_1^1(0) = 1 \tag{4.64}$$

$$B_k^{l+1}(0) = B_k^l(0)k + B_{k-1}^l(0) \qquad \text{per } 2 \leq k \leq l \tag{4.65}$$

$$B_{l+1}^{l+1}(0) = 1 \tag{4.66}$$

mentre per $n = -1$ si ha semplicemente

$$B_k^l(-1) = 0 \qquad \text{per } l > 1, 1 \leq k < l \tag{4.67}$$

$$B_l^l(-1) = 1 \tag{4.68}$$

Consideriamo ora il caso particolare in cui f e g si possono scrivere come serie formali

$$f(x,y) = \sum_{p,q} f_{pq} x^p y^q = \sum_p f_p(y) x^p = \sum_q f_q(x) y^p \tag{4.69}$$

$$g(x,y) = \sum_{a,b} g_{ab} x^a y^b = \sum_a g_a(y) x^a = \sum_b g_b(x) y^b \tag{4.70}$$

In questo caso è necessario calcolare termini come $X_n^l x^p$;

$$X_n^l x^p = \sum_{k=1}^{l} B_k^l(n) x^{ln+k} \partial_x^k x^p = \left[\sum_{k=1}^{l} \frac{p!}{(p-k)!} B_k^l(n) \right] x^{ln+p} \tag{4.71}$$

dove i termini nella sommatoria per cui $p < k$ sono nulli.

Equivalentemente la precedente relazione si può scrivere come segue

controllare $l = 0$

$$X_n^l x^p = \left[\prod_{k=0}^{l-1} (p + kn) \right] x^{ln+p} \tag{4.72}$$

Per $n = 0$ la relazione (4.71) si semplifica divenendo

$$X_0^l x^p = p^l x^p \tag{4.73}$$

Invece, se $n < 0$, p è multiplo di $-n$ e $0 < \frac{p}{-n} \leq l - 1$, si ha

$$X_n^l x^p = 0 \tag{4.74}$$

per $l > 0$.

Ora svolgiamo il prodotto:

controllare $\mathcal{F}^{-1}$ (segno θ)

$$m(\mathcal{F}^{-1} f(x,y) \otimes g(x,y)) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p,q,a,b} \frac{(i\theta)^l}{l!} X_n^l (f_{pq} x^p y^q) Y_m^l (g_{ab} x^a y^b) = \tag{4.75}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p,q,a,b} \frac{(i\theta)^l}{l!} f_{pq} \left[\prod_{k=0}^{l-1}(p+kn)\right] x^{ln+p} y^q g_{ab} x^a \left[\prod_{k=0}^{l-1}(b+km)\right] y^{lm+b} = \tag{4.76}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p,q,a,b} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[\prod_{k=0}^{l-1}(p+kn)\right] \left[\prod_{k=0}^{l-1}(b+km)\right] f_{pq} g_{ab} x^{ln+p+a} y^{lm+b+q} = \tag{4.77}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \sum_{p,q,a,b} \left[\prod_{k=0}^{l-1}(p+kn)(b+km)\right] f_{pq} g_{ab} x^{ln+p+a} y^{lm+b+q} = \tag{4.78}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \sum_{p,b} \left[\prod_{k=0}^{l-1}(p+kn)(b+km)\right] f_p(y) g_b(x) x^{ln+p} y^{lm+b} \tag{4.79}$$

In particolare per $n = m$ e per f_{pq} e g_{ab} diagonali il prodotto è simmetrico

$$m(\mathcal{F} f(x,y) \otimes g(x,y)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \sum_{p,a} \left[\prod_{k=0}^{l-1}(p+kn)(a+kn)\right] f_{pp} g_{aa} (xy)^{ln+p+a} \tag{4.80}$$

Per $n = m = 0$ la relazione (4.79) si semplifica dando

$$m(\mathcal{F} f(x,y) \otimes g(x,y)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \sum_{p,q,a,b} (pb)^l f_{pq} g_{ab} x^{p+a} y^{b+q} = \tag{4.81}$$

$$= \sum_{p,q,a,b} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} (pb)^l f_{pq} g_{ab} x^{p+a} y^{b+q} = \sum_{p,q,a,b} e^{i\theta pb} f_{pq} g_{ab} x^{p+a} y^{b+q} = \tag{4.82}$$

$$= \sum_{p,b} e^{i\theta pb} f_p(y) g_b(x) x^p y^b \tag{4.83}$$

Infine calcoliamo il commutatore fra x e y

$$[x,y] = x \star y - y \star x = x \star y - yx = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[\prod_{k=0}^{l-1}(1+kn)(1+km)\right] x^{ln+1} y^{lm+1} \tag{4.84}$$

Per $n = m = 0$ si ha cioè?

$$[x,y] = x \star y - y \star x = x \star y - yx = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} xy = (e^{i\theta} - 1)xy \tag{4.85}$$

Per $n = -1$ si ha cioè?

$$[x,y] = x \star y - y \star x = x \star y - yx = i\theta y^{m+1} \tag{4.86}$$

4.3.2 Deformazioni di Simmetrie

$$\Delta_{\mathcal{F}}(X_k) = \mathcal{F}\Delta(X_k)\mathcal{F}^{-1} = e^{i\theta X_n \otimes Y_m}\Delta(X_k)e^{-i\theta X_n \otimes Y_m} = \tag{4.87}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \underbrace{[X_n \otimes Y_m, [X_n \otimes Y_m, ...[X_n \otimes Y_m}_{l}, \Delta(X_k)]...]] = \tag{4.88}$$

$$= \Delta(X_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \underbrace{[X_n \otimes Y_m, [X_n \otimes Y_m, ...[X_n \otimes Y_m}_{l}, X_k \otimes id]...]] = \tag{4.89}$$

$$= \Delta(X_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \underbrace{[X_n, [X_n, ...[X_n}_{l}, X_k]...]] \otimes Y_m^l = \tag{4.90}$$

$$= \Delta(X_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[\prod_{q=1}^{l}(k + n(q-2))\right] X_{nl+k} \otimes Y_m^l \tag{4.91}$$

dove si è utilizzata la seguente identità

$$e^{i\theta B}Ce^{-i\theta B} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \underbrace{[B, [B, ...[B}_{l}, C]...]] \tag{4.92}$$

La serie è finita se k è multiplo di n ed è troncata all'ordine $l' = -\frac{k}{n} + 2$

In particolare per $n = m = k = -1$ non vi è deformazione del coprodotto, mentre per $n = 0$ si ha

$$\Delta_{\mathcal{F}}(X_k) = \Delta(X_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta k)^l}{l!} X_k \otimes Y_m^l = id \otimes X_k + X_k \otimes e^{i\theta k Y_m} \tag{4.93}$$

Infine per $n = m = 0$ si ha

$$\Delta_{\mathcal{F}}(X_k) = id \otimes X_k + X_k \otimes e^{i\theta k \partial_y} \tag{4.94}$$

cioè

$$X_k \triangleright m(\mathcal{F}^{-1} f(x,y) \otimes g(x,y)) = m(\mathcal{F}^{-1}\Delta_{\mathcal{F}}(X_k) f(x,y) \otimes g(x,y)) = \tag{4.95}$$

$$= m(\mathcal{F}^{-1} f(x,y) \otimes X_k g(x,y)) + m(\mathcal{F}^{-1} X_k f(x,y) \otimes g(x + ik\theta, y)) \tag{4.96}$$

Ora il caso delle rotazioni i 2 dimensioni ($U(1)$):

$$\Delta_{\mathcal{F}}(x\partial_y) = e^{i\theta X_n \otimes Y_m}\Delta(x\partial_y)e^{-i\theta X_n \otimes Y_m} = \tag{4.97}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \underbrace{[X_n \otimes Y_m, [X_n \otimes Y_m, ...[X_n \otimes Y_m}_{l}, \Delta(x\partial_y)]...]] = {}^{2} \tag{4.100}$$

$$= \Delta(x\partial_y) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[\prod_{k=0}^{l-1} [(k-1)m-1] X_n^l \otimes x Y_{lm-1} + \prod_{k=0}^{l-1} (kn+1) x^{ln+1} \partial_y \otimes Y_m^l \right] \tag{4.101}$$

e

$$\Delta_{\mathcal{F}}(y\partial_x) = \tag{4.102}$$

$$= \Delta(y\partial_x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[\prod_{k=0}^{l-1} (km+1) X_n^l \otimes y^{lm+1} \partial_x + \prod_{k=0}^{l-1} [(k-1)n-1] y X_{ln-1} \otimes Y_m^l \right] \tag{4.103}$$

da cui

$$\Delta_{\mathcal{F}}(x\partial_y - y\partial_x) = \Delta(x\partial_y - y\partial_x) + \tag{4.104}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[X_n^l \otimes \left(\prod_{k=0}^{l-1} [(k-1)m-1] x Y_{lm-1} - \prod_{k=0}^{l-1} (km+1) y^{lm+1} \partial_x \right) + \right. \tag{4.105}$$

$$\left. + \left(\prod_{k=0}^{l-1} (kn+1) x^{ln+1} \partial_y - \prod_{k=0}^{l-1} [(k-1)n-1] y X_{ln-1} \right) \otimes Y_m^l \right] \tag{4.106}$$

Per $m = n = 0$ si ha

$$\Delta_{\mathcal{F}}(x\partial_y - y\partial_x) = \Delta(x\partial_y - y\partial_x) + \tag{4.107}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[X_0^l \otimes \left((-1)^l x\partial_y - y\partial_x \right) + \left(x\partial_y - (-1)^l y\partial_x \right) \otimes Y_0^l \right] = \tag{4.108}$$

$$= \Delta(x\partial_y - y\partial_x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[(-1)^l X_0^l \otimes x\partial_y - X_0^l \otimes y\partial_x + x\partial_y \otimes Y_0^l - y\partial_x \otimes (-1)^l Y_0^l \right] = \tag{4.109}$$

[2]

$$\underbrace{[X_n \otimes Y_m, ...[X_n \otimes Y_m}_{l}, id \otimes x\partial_y]...] = \prod_{k=0}^{l-1} [(k-1)m-1] X_n^l \otimes x Y_{lm-1} \qquad l \geq 1 \tag{4.99}$$

$$\underbrace{[X_n \otimes Y_m, ...[X_n \otimes Y_m}_{l}, x\partial_y \otimes id]...] = \prod_{k=0}^{l-1} (kn+1) x^{ln+1} \partial_y \otimes Y_m^l \qquad l \geq 1 \tag{4.100}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^l}{l!} \left[(-1)^l X_0^l \otimes x\partial_y - X_0^l \otimes y\partial_x + x\partial_y \otimes Y_0^l - y\partial_x \otimes (-1)^l Y_0^l\right] = \quad (4.110)$$

$$= e^{-i\theta X_0} \otimes x\partial_y - e^{i\theta X_0} \otimes y\partial_x + x\partial_y \otimes e^{i\theta Y_0} - y\partial_x \otimes e^{-i\theta Y_0} \quad (4.111)$$

Per $m = n = -1$ si ha

$$\Delta_{\mathcal{F}}(x\partial_y - y\partial_x) = \Delta(x\partial_y - y\partial_x) + i\theta[\partial_y \otimes \partial_y - \partial_x \otimes \partial_x] \quad (4.112)$$

4.3.3 Le Parentesi di Poisson

Il primo termine dello sviluppo del commutatore ci da la parentesi di Poisson

Poisson Structure

$$[f,g]_{\mathcal{F}} = m(\mathcal{F}f \otimes g) - m(\mathcal{F}g \otimes f) = i\theta x^{n+1} y^{m+1} (\partial_x f \partial_y g - \partial_x g \partial_y f) + O(\theta^2) \quad (4.113)$$

La parentesi di Poisson contenuta nel prodotto è la seguente

c per classica

$$\{f,g\}_{\mathcal{F}} = x^{n+1} y^{m+1} (\partial_x f \partial_y g - \partial_x g \partial_y f) = x^{n+1} y^{m+1} \{f,g\}_c \quad (4.114)$$

Appendice A

Richiami

A.1 Richiami

Definizione A.1 *un insieme K è un* ***campo*** *se*

Definizione A.2 ***spazio vettoriale*** **V**

Definizione A.3 ***spazio vettoriale duale*** **V***

Definizione A.4 $\mathbb{C}^*$***-algebra***

A.2 Teoremi sugli Omomorfismi ed altre Proprietà dei Gruppi

Sia

$$f : G \to H$$

un omomorfismo, allora sono valide le seguenti proprietà:

1. f trasforma sottogruppi normali di G in sottogruppi normali di $Im(f)$;
2. $Ker(f) = \{g \in G : f(g) = 1\}$ è un sottogruppo normale del gruppo G.

Dimostrazione.

1. Dato un sottogruppo normale K del gruppo G allora si ha che $gKg^{-1} = K$ cioé che $f(gKg^{-1}) = f(K)$, allora sviluppando il termine sinistro si ottiene che $f(g)f(K)f(g^{-1}) = f(K)$, cioé il sottogruppo $f(K)$ immagine del sottogruppo K è normale in $Im(f)$;

2. poniamo $N = Ker(f)$, allora $f(gNg^{-1}) = f(g)f(N)f(g^{-1}) = f(g)1f(g^{-1}) = 1 = f(N)$. Poiché ogni sottogruppo normale N di un gruppo G è il nucleo dell'omomorfismo canonico $\phi : G \to G/N$, possiamo affermare che tutti i sottogruppi normali di G sono i nuclei $(Ker(f))$ di tutti i possibili omomorfismi di G.

■

Teorema A.1 (primo teorema degli omomorfismi) *Sia $f : G \to H$ un omomorfismo. Denotato con $\phi : G \to G/Ker(f)$* ***l'epimorfismo canonico****, l'unica applicazione iniettiva $\psi : G/Ker(f) \to H$ tale che $f = \psi \circ \phi$ è un monomorfismo e quindi $G/Ker(f)$ è isomorfo a $Im(f)$.*

Dimostrazione. L'applicazione ψ è definita come segue

$$\psi[gKer(f)] = f(g) \qquad (g \in G)$$

ed è un omomorfismo in quanto lo è f. Poiché $Im(\psi) = Im(f)$ si ha ovviamente che la corestrizione di ψ a $Im(f)$ è un isomorfismo $G/Ker(f) \to Im(\psi) = Im(f)$.
■

Teorema A.2 (secondo teorema degli omomorfismi) *Dati un sottogruppo H ed un sottogruppo normale N in G, allora $N \cap H \trianglelefteq H$ e i gruppi quoziente $H/(N \cap H)$ e $(NH)/N$ sono isomorfismi.*

Dimostrazione. Sia $f : H \to G/N$ l'applicazione definita come segue

$$f(h) = Nh \qquad (h \in H).$$

f è la restrizione a H dell'epimorfismo canonico $G \to G/N$ e quindi f è un omomorfismo. D'altronde si ha, con $h \in H$:

$$h \in Ker(f) \Leftrightarrow Nh = h \Leftrightarrow h \in H \cap N$$

cioé $Ker(f) = H \cap N$. Allora il teorema A.1 assicura che $H/(H \cap N)$ è isomorfo a $Im(f) = \{Nh : h \in H\} = NH/N$, da cui si ha l'asserto. ■

Teorema A.3 (terzo teorema degli omomorfismi) *Dati due sottogruppi normali M, N di G con $N \leq M$, allora $M/N \lhd G/N$ e $(G/N)/(M/N)$ è isomorfo a G/M.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema basta mostrare che M/N è il nucleo di un epimorfismo f dal gruppo G/N nel gruppo G/M; sia $f : G/N \to G/M$ l'applicazione definita come segue

$$f(Ng) = Mg \qquad (g \in G).$$

f è ben definita poiché $N \leq M$ e quindi

$$Ng_1 = Ng_2 \Rightarrow Mg_1 = Mg_2,$$

inoltre, da quanto appena detto, è ovvio che f sia un epimorfismo. Infine si ha che

$$Ker(f) = \{Ng \in G/N : Mg = M\} = M/N.$$

■

A.3 Il Gruppo delle Permutazioni su un Insieme

Definizione A.5 *Una **permutazione** di un insieme X è un'applicazione biettiva di X in X.*

Per un'applicazione g (in particolare per una permutazione) possiamo utilizzare sia la notazione sinistra

$$g : x \in X \to gx \in X$$

sia la notazione destra

$$x \in X \to xg \in X$$

Le permutazioni formano gruppo rispetto al prodotto fra applicazioni, in quanto il prodotto di due permutazioni è ancora una permutazione e l'elemento neutro è la permutazione identica $(x \to x)$.

Il gruppo delle permutazioni è detto **gruppo simmetrico** ed è indicato con $Sym(X)$; se $|X| = n$ l'ordine di $Sym(X)$ è $n!$.

Dato un insieme X costituito da n elementi un elemento del gruppo delle permutazioni è indicato schematicamente con una matrice $2 \times n$; prendiamo per esempio il gruppo delle permutazioni sull'insieme $X = \{1, 2, 3\}$. Presi $a, b \in Sym(X)$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

allora il prodotto ab si costruisce riscrivendo la prima riga di a e scrivendo nella seconda riga la sequenza ottenuta sostituendo ogni elemento x_i della seconda riga di a con l'elemento che si trova nella seconda riga di b corrispondente alla'elemento x_i nella prima riga di b.

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Il gruppo delle permutazioni su di un insieme X non è commutativo per $n = |X| \geq 3$, come si può verificare facilmente.

Una **trasposizione** è una permutazione che scambia solo due elementi (e fissa i rimanenti); ad esempio l'elemento del gruppo delle permutazioni che trasforma la sequenza $(3, 1, 2)$ nella sequenza $(3, 2, 1)$ è una trasposizione. Ogni permutazione di un insieme finito si può ottenere come prodotto di trasposizioni: se il numero di trasposizioni è pari la permutazione è detta **pari**, altrimenti è detta **dispari**. Non è difficile provare che la parità del numero di trasposizioni in cui si decompone una permutazione non varia.

Esempio A.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (12)(13)(14)(15) = (34)(35)(13)(23)$$

Il prodotto di due permutazioni pari è ovviamente una permutazione pari, mentre il prodotto di due permutazioni dispari è una permutazione pari; l'identità è una permutazione pari in quanto è il quadrato di una qualsiasi trasposizione, essendo le trasposizioni involutorie (l'inversa di una trasposizione è la trasposizione stessa); quindi le permutazioni pari formano un sottogruppo del gruppo delle permutazioni chiamato *gruppo alterante*, indicato con A_n, dove $n = |X|$. A_n è un gruppo di ordine $n!/2$, non commutativo per $n \geq 4$.

A.4 I Gruppi Topologici

In questo paragrafo vengono introdotti alcuni concetti utilizzati nel caso di gruppi continui.

A.4.1 Spazi Topologici

Definizione A.6 *Un insieme X è detto **spazio topologico** se esiste una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{U}$ tale che:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$;*
2. *l'unione di insiemi appartenenti ad $\mathcal{U}$ appartiene ancora ad $\mathcal{U}$;*
3. *l'intersezione di un numero finito di insiemi appartenenti ad $\mathcal{U}$ appartiene ancora ad $\mathcal{U}$.*

Gli insiemi $U_i \in \mathcal{U}$ sono detti **aperti** e definiscono la topologia T sull'insieme X; differenti famiglie di aperti $\mathcal{U}$ definiscono differenti topologie; si può definire una struttura topologica su di un insieme arbitrario X considerando come aperti tutti i suoi sottoinsiemi ottenendo in questo modo una topologia detta **discreta**. Una famiglia $\mathcal{V}$ di insiemi aperti definisce una **base** dello spazio topologico se ogni insieme della famiglia $\mathcal{U}$ è esprimibile come unione di insiemi appartenenti alla base, quindi una base è tale se:

1. $\emptyset \in \mathcal{V}$;
2. l'intersezione di un numero finito di insiemi appartenenti a $\mathcal{V}$ è l'unione di insiemi appartenenti a $\mathcal{V}$;
3. l'unione di tutti gli insiemi di $\mathcal{V}$ è X.

Esempio A.2 *1. Uno spazio topologico X è munito della* ***topologia banale*** *se $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$;*

2. *Un sottoinsieme V di uno spazio topologico X è munito della* ***topologia indotta*** *da X se si assume come base l'insieme delle intersezioni tra gli insiemi (aperti) di una base di X e l'insieme V, equivalentemente, assumendo come aperti di V le sue intersezioni con gli aperti di X;*

3. *Possiamo strutturare lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ a spazio topologico utilizzando una topologia detta* ***naturale*** *scegliendo come base la famiglia di parallelepipedi aperti $a_i < x_i < b_i$ con $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e l'insieme vuoto. Utilizzando la topologia naturale di $\mathbb{R}^{2n}$, possiamo strutturare $\mathbb{C}^n$ con la topologia naturale, tenendo presente che $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^{2n}$ sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali isomorfi.*

Negli spazi topologici si possono definire le seguenti nozioni:

1. un **intorno** $U(x)$ è un aperto contenente x;

2. un insieme **chiuso** è un complementare[1] di un insieme aperto;

3. la **chiusura** di un insieme M (indicata con $\overline{M}$) è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti l'insieme dato;

4. un punto di X è un **punto di aderenza** se ogni suo intorno contiene almeno un punto di X;

5. un insieme M si dice **denso** in X se $\overline{M} = X$;

6. uno spazio X è **separabile** se esiste un sottoinsieme al più numerabile e denso in X.

Una funzione f da uno spazio topologico X in uno spazio topologico Y si dice **continua nel punto** x_0 se l'immagine inversa di ogni intorno $V(y_0)$, dove $y_0 = f(x_0)$, contiene un intorno di x_0; f, inoltre, è detta **continua** se è continua in ogni punto di X. È facile osservare che f è continua se e solo se la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X.

[1] Dato un insieme F si definisce complementare del sottoinsieme A il sottoinsieme $B = F - A$, intendendo con questa scrittura l'insieme dei punti che appartengono a F e che non appartengono a A.

Un'applicazione f dallo spazio X allo spazio Y è detta **omeomorfismo** se è biettiva e se f e f^{-1} sono continue. Un omeomorfismo conserva le **proprietà topologiche** di un insieme, cioé manda aperti in aperti, chiusi in chiusi, chiusure in chiusure.

Definizione A.7 *Uno spazio topologico X si dice **separato** o **spazio di Hausdorff** se, per ogni coppia $(x, y) \in X \times X$, esistono un intorno di x ed un intorno di y che non si intersecano.*

In uno spazio di Hausdorff il limite di una successione di elementi in X, se esiste è unico.

Dati n spazi topologici X_i possiamo definire uno spazio topologico ponendo $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$; X si può munire della topologia indotta dagli spazi X_i, considerando come base di X il prodotto cartesiano delle basi delle componenti X_i; X si dice **spazio topologico prodotto**.

A.4.2 I Gruppi Topologici

Definizione A.8 *Un **Gruppo Topologico** G è uno spazio topologico che possiede una struttura di gruppo ed in cui la funzione $f : (g, h) \in G \times G \to gh^{-1} \in G$ è continua.*

Ponendo $g = e$ si ottiene che $f(e, h) = h^{-1}$, sicché ola funzione $i : h \in G \to h^{-1} \in G$ è continua, ciò significa che un elemento in un intorno di h ha l'inverso in un intorno di h^{-1}. Inoltre, sfruttando la continuità di i, si ottiene la continuità dell'operazione di moltiplicazione fra gli elementi del gruppo: $f(g, h^{-1}) = f(g, f(e, h)) = f^*(g, h) = gh$.

Ogni gruppo può essere banalmente strutturato a gruppo topologico, munendolo della topologia discreta. Poiché l'applicazione $i : g \in G \to g^{-1}$ è continua abbiamo che se $U(e)$ è un intorno dell'unità allora lo sará anche U^{-1} $(i(e) = e)$.

In un gruppo topologico la **traslazione destra** (**sinistra**) $g \to gg_0$ $(g \to g_0g)$ è un omeomorfismo di G su G; ciò significa che, se $\mathcal{V}(g)$ è una base di intorni dell'elemento g, allora $\mathcal{V}(g)g_0$ $(g_0\mathcal{V}(g))$ è una base di intorni dell'elemento gg_0 (g_0g); in particolare avremo che, fornendo una base di intorni dell'elemento neutro, avremmo una base di intorni di un qualsiasi elemento del gruppo cioé la topologia di un gruppo topologico è completamente definita assegnando una base di intorni dell'identità.

Esempio A.3 *1. $GL(n,\mathbb{R})$ ($GL(n,\mathbb{C})$) è il gruppo degli invertibili dell'anello $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$) delle matrici $n \times n$ su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Poiché $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$) è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione n^2 ($2n^2$), esso è isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ ($\mathbb{R}^{2n^2}$) ed è pertanto munito della topologia prodotto indotta dalla topologia naturale di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pertanto $GL(n,\mathbb{R})$ ($GL(n,\mathbb{C})$) resta munito della topologia indotta di $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$). Infine si può facilmente verificare che $GL(n,\mathbb{R})$ ($GL(n,\mathbb{C})$) è un gruppo topologico.*

Un sottogruppo è detto **chiuso** se è un sottoinsieme chiuso di G.

Un gruppo topologico è detto **lineare** se è isomorfo ad un sottogruppo di $GL(n,\mathbb{C})$ o di $GL(n,\mathbb{R})$.

Dato un gruppo topologico G ed un sottogruppo H, possiamo strutturare H come sottogruppo topologico attraverso la topologia indotta da G; lo spazio quoziente $G/\mathcal{R}_H^R$ può essere strutturato anch'esso a spazio topologico attraverso l'epimorfismo canonica $\phi : G \to G/\mathcal{R}_H^R$, imponendo che ϕ sia una funzione continua; ciò significa che gli aperti di $G/\mathcal{R}_H^R$ sono le immagini, mediante ϕ, degli aperti di G.

Proposizione A.4 *Se H è un sottogruppo chiuso allora lo spazio quoziente $G/\mathcal{R}_H^R$ è separato.*

Dimostrazione. Presi due laterali destri $\{g_1\} = Hg_1$ e $\{g_2\} = Hg_2$ appartenenti a $G/\mathcal{R}_H^R$ con $\{g_1\} \neq \{g_2\}$ si ha che $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Essendo H chiuso esiste un intorno U di $g_1^{-1}g_2$ tale che $U \cap H = \emptyset$; essendo continua la funzione $f(g,h) = g^{-1}h$ esistono due intorni U_1 e U_2, rispettivamente di g_1 e g_2, tali che $U_1^{-1}U_2 \subset U$; $\widetilde{U}_1 = \phi(U_1)$ e $\widetilde{U}_2 = \phi(U_2)$, dove ϕ è l'omomorfismo canonico, sono intorni rispettivamente delle classi $\{g_1\}$ e $\{g_2\}$; per dimostrare la separabilità di $G/\mathcal{R}_H^R$ basta notare che $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \emptyset$ infatti, se così non fosse, presi $g_0, g_0' \in \{g_0\} \in \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2$, si avrebbe $g_0^{-1}g_0' = g_0^{-1}(g_0h) = h \in H$ in contraddizione col fatto che $U \cap H = \emptyset$. ■

Proposizione A.5 *Se H è un sottogruppo normale chiuso allora G/H è un sottogruppo topologico di Hausdorff.*

Dimostrazione. Dal fatto che H è normale discende che G/H è un sottogruppo, mentre dalla chiusura segue che è anche separato; imponendo la continuità dell'epimorfismo canonico otteniamo che è possibile strutturare il gruppo quoziente G/H a gruppo topologico. ■

Se G e K sono gruppi topologici, un'applicazione f di G in K è detta **omomorfismo continuo** se:

1. f è continua;
2. f è un omomorfismo di G in K.

Proposizione A.6 *Sia f un omomorfismo continuo di G in K e $N = Ker(f)$, allora:*

1. *N è un sottogruppo normale chiuso;*
2. *$f = \psi\phi$ dove ϕ è l'omomorfismo canonico e ψ è un isomorfismo continuo di G/N in K.*

Inoltre, se f è aperta (manda aperti in aperti), ψ è un **isomorfismo topologico** (perché conserva le proprietà topologiche), da cui si ha che G/N e $f(G)$ sono topologicamente isomorfi (omeomorfi).

A.4.3 Gruppi Compatti

Definizione A.9 *Sia X uno spazio topologico, allora una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X è detta **ricoprimento aperto (chiuso)** di un sottoinsieme M di X se l'unione di tutti gli insiemi aperti (chiusi) di $\mathcal{F}$ contiene M.*

Definizione A.10 *Un sottoinsieme di uno spazio topologico X ,in particolare uno spazio topologico, è detto **compatto** se da ogni suo ricoprimento aperto $\mathcal{F}$ se ne può estrarre uno contenente un numero finito di insiemi.*

Proposizione A.7 *Un insieme compatto di uno spazio separato è chiuso.*

Proposizione A.8 *Un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$.*

Proposizione A.9 *Un sottospazio chiuso M di uno spazio topologico compatto X è compatto.*

Proposizione A.10 *Un'applicazione continua manda insiemi compatti in insiemi compatti.*

Proposizione A.11 *Un'applicazione continua da uno spazio compatto in uno separato manda chiusi in chiusi.*

Proposizione A.12 *Il prodotto topologico di spazi topologici compatti è uno spazio topologico compatto.*

Definizione A.11 *Uno spazio X si dice **localmente compatto** se ogni punto $x \in X$ possiede un intorno, la cui chiusura è compatta.*

Definizione A.12 *Un gruppo topologico G è **compatto** se lo è lo spazio topologico G.*

Proposizione A.13 *Ogni sottogruppo chiuso di un gruppo compatto è compatto.*

Un gruppo topologico G è **localmente compatto** se esiste un intorno U dell'elemento neutro la cui chiusura è compatta.

Una funzione f da un gruppo topologico G al gruppo topologico $\mathbb{C}^n$ munito della topologia naturale si dice **uniformemente continua** su G se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno U dell'elemento neutro di $\mathbb{C}^n$ tale che: $|f(g_1) - f(g_2)|_{\mathbb{C}^n} < \epsilon$ per $g_2, g_1 \in U$.

Proposizione A.14 *Ogni funzione continua su un gruppo localmente compatto è uniformemente continua.*

A.4.4 Gruppi Connessi

Definizione A.13 *Due sottoinsiemi $M, N \subset X$ sono una* ***partizione*** *di X se $M \cup N = X$, $M \cap N = \emptyset$ e $M, N \neq \emptyset$.*

Definizione A.14 *Uno spazio topologico X è* ***connesso*** *se non esiste una sua partizione fatta da insiemi chiusi.*

Un insieme aperto connesso è detto **dominio**.

Proposizione A.15 *Funzioni continue mandano insiemi connessi in insiemi connessi.*

Dimostrazione. Data $Y = f(X)$ una funzione continua e X uno spazio connesso e presa una partizione di Y fatta da F_1 e F_2 chiusi, allora avremo X sarebbe l'unione delle immagini inverse, tramite f, di F_1 e F_2 che sarebbero due insiemi chiusi (funzioni continue mandano chiusi in chiusi) in contraddizione con la connessione di X. ■

Proposizione A.16 *L'unione di una famiglia di insiemi connessi aventi un punto in comune è un insieme connesso.*

Il più grande insieme connesso contenente $x \in X$ è detto **componente connessa** di x.

Proposizione A.17 *Ogni componente connessa è chiusa.*

Proposizione A.18 *Se ogni coppia di punti appartenenti ad X può essere connessa da una curva*[2] *continua contenuta in X, allora X è connesso;*

Proposizione A.19 *Il prodotto topologico di spazi connessi è uno spazio topologico connesso.*

[2] Una curva continua su uno spazio topologico X è una funzione continua dallo spazio topologico $\mathbb{R}$, dotato della topologia naturale, e X.

Uno spazio topologico è l'unione disgiunta delle sue componenti connesse.

Definizione A.15 *Un gruppo topologico G è* ***connesso*** *se lo è lo spazio topologico.*

Proposizione A.20 *La componente connessa dell'identità è un sottogruppo normale chiuso di G.*

Proposizione A.21 *La componente connessa di ogni elemento $g \in G$ è il laterale $gK = Kg$ dove K è la componente connessa di g ($K = G$ se e solo se G è connesso).*

A.5 La misura di Haar

Su di un gruppo topologico compatto G possiamo definire una misura μ detta **misura di Haar**.

Data una funzione $f \in L^1(G)$ (ciò significa che f è integrabile su G tramite la misura μ) definiamo una **media invariante** su G nel seguente modo:

$$M(f) = \int_G f(g) d\mu(g). \tag{A.1}$$

Le proprietà della media invariante sono:

1. $M(I) = 1$, dove I è l'applicazione identica e dove si è posto $\int_G d\mu(g) = \mu(G) = 1$;
2. $M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$;
3. $M(f) \geq 0$ per $f \geq 0$ e $M(f) > 0$ se f è continua, $f \geq 0$ e $f \neq 0$;
4. $M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2)$;
5. $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, dove α è un numero;
6. $M(f(gh)) = M(f(hg)) = M(f(g))$;
7. $M_g(f(g^{-1})) = M_g(f(g))$.

Le proprietà 1)ª5) sono le proprietà dell'integrale, mentre la 6) e la 7) sono relative all'invarianza (a destre ed a sinistra) della misura sul gruppo G (equivalenti all'invarianza del consueto integrale su $\mathbb{R}$ in cui si può sostituire dx con $d(x+a)$, dove a è una costante).

Bibliografia

[1] S. Majid, “Foundations of Quantum Group Theory”, Cambridge University Press, 1995.

[2] M. Chaichian, A. Demichev, “Introduction to Quantum Groups”, World Scientific, Singapore, 1996

[3] A. O. Barut, R. Rączka, “Theory of Group Representations and Applications”, PWN.

[4] C. Gonera, P. Kosiński, P. Maślanka, “Global Symmetries of Noncommutative Space-Time”, arXiv:hep-th/0507054 v2, 2005.

[5] Micho Durdevich, “Quantum Geometry and New Concept of Space”,. rivista,data

[6] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima, A. Tureanu, “On a Lorentz-Invariant Interpretation of Noncommutative Space-Time and its Implications on Noncommutative QFT”, Phys. Lett. B, 604, 98,2004. controlare

[7] L. A. Takhtajan, “Lectures on Quantum Groups”, Leningrad branch of the Steklov Mathematical Institute USSR Academy of Sciences.