

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica



Laurea triennale in Fisica

Simmetrie discrete in meccanica quantistica

Relatore:

Prof. Fedele Lizzi

Candidato:

Luigi Barretta

Matricola N85/318

A.A. 2013/2014

Indice

Introduzione	1
1 Simmetrie in fisica classica	3
1.1 Parentesi di Poisson	4
1.2 Costanti del moto	5
2 Simmetrie in meccanica quantistica	7
2.1 Teorema di Wigner	9
3 Simmetrie discrete in meccanica quantistica	14
3.1 Parità	14
3.2 Inversione temporale	18
4 Spinori di Dirac e coniugazione di carica	22
4.1 Spinori di Dirac	22
4.2 Coniugazione di carica	24
Conclusioni	27
Bibliografia	29

Introduzione

Lo studio delle simmetrie ha rivestito nella fisica classica, ma soprattutto per quanto riguarda la meccanica quantistica, un ruolo importante nello sviluppo della teoria.

In questo lavoro ci si concentrerà sullo studio delle simmetrie discrete più importanti, vale a dire parità, inversione temporale e, infine, coniugazione di carica.

Tuttavia, prima di descrivere queste simmetrie, si darà un cenno a quello che è il concetto di simmetria in fisica classica, basandoci sul formalismo Hamiltoniano, andremo quindi a descrivere la connessione che esiste tra costanti del moto e simmetrie.

Passando alla meccanica quantistica, andremo a costruire quello che è un operatore di simmetria partendo da considerazioni del tutto generali. Si andrà poi a dimostrare il teorema di Wigner, il quale rappresenta una parte centrale di questo studio, e quindi parleremo delle proprietà matematiche di questi operatori.

Discuteremo in seguito quelli che sono gli operatori di parità e di inversione temporale in un contesto non relativistico, tratteremo questi argomenti utilizzando la notazione di Dirac e quindi i ket di stato, quindi ove possibile si eviterà di parlare di funzioni d'onda. Andremo a vedere come queste simmetrie trasformano gli operatori corrispondenti alle più importanti variabili dinamiche, e quindi analizzeremo sistematicamente il comportamento di posizione, impulso e momento angolare sottoposti a queste trasformazioni.

Per discutere di coniugazione di carica invece avremo bisogno di introdurre l'equazione d'onda relativistica, e dopo aver dato un cenno sulle soluzioni e sulla loro interpretazione andremo a discutere le proprietà matematiche dell'operatore di coniugazione di carica.

Concluderemo mostrando come trasformare un generica osservabile sotto questa simmetria e discuteremo come al solito degli operatori corrispondenti alle variabili dinamiche più importanti.

Capitolo 1

Simmetrie in fisica classica

Il formalismo certamente più elegante, e che conduce semplicemente alla determinazione di un moto, è quello Hamiltoniano.

Esso trasforma il sistema di equazioni di Lagrange, che è un sistema del second'ordine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \quad (1.1)$$

in uno del primo ordine scegliendo n variabili ausiliare.

Hamilton scelse come variabili ausiliare i momenti cinetici coniugati

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \quad (1.2)$$

con questa posizione le equazioni di Lagrange (1.1) assumono la forma

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad (1.3)$$

Dove la Lagrangiana L è una funzione data da

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

ovviamente T rappresenta l'energia cinetica, mentre U l'energia potenziale del sistema in considerazione.

Da queste possiamo riscrivere il sistema di equazioni di Lagrange nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \dot{q}_h &= \dot{q}_h(q, p, t) \\ \dot{p}_h &= \frac{\partial L}{\partial q_h} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Introducendo la funzione Hamiltoniana H

$$H(q, p, t) = [p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)] \quad (1.5)$$

queste possono essere scritte in una forma particolarmente simmetrica chiamate equazioni canoniche di Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h &= - \frac{\partial H}{\partial q_h} \end{aligned} \quad (1.6)$$

il seguente sistema può essere posto in una forma particolarmente compatta introducendo la matrice antisimmetrica $2n \times 2n$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

dove 0 ed \mathbb{I} sono matrici $n \times n$, la prima rappresenta la matrice nulla e la seconda la matrice identità.

Chiamando $x = (q, p)$ otteniamo

$$\dot{x} = \Omega \nabla H \quad (1.8)$$

1.1 Parentesi di Poisson

Chiamata F una variabile dinamica, ovvero una generica grandezza che possa essere espressa come funzione dello stato del sistema, la sua evoluzione temporale, tenuto conto delle equazioni di Hamilton, sarà data da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(q, p, t) &= \sum_h \left(\frac{\partial F}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial F}{\partial p_h} \dot{p}_h \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial F}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_h} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.9)$$

che può essere riscritta introducendo la seguente espressione, valida per ogni coppia di variabili dinamiche A e B

$$\{A, B\} = \sum_h \left(\frac{\partial A}{\partial q_h} \frac{\partial B}{\partial p_h} - \frac{\partial A}{\partial p_h} \frac{\partial B}{\partial q_h} \right) \quad (1.10)$$

la (1.9) può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt}F(q, p, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \quad (1.11)$$

l'espressione $\{A, B\}$ prende il nome di parentesi di Poisson tra le grandezze A e B .

Le principali proprietà delle parentesi di Poisson sono le seguenti:

- $\{c, A\} = 0$
- $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- $\{cA, B\} = c\{A, B\}$
- $\{A_1 + A_2, B\} = \{A_1, B\} + \{A_2, B\}$
- $\{A_1 A_2, B\} = A_1 \{A_2, B\} + \{A_1, B\} A_2$

dove si è indicati con c una costante e con A, B, A_1 e A_2 delle variabili dinamiche.

Esiste inoltre un'altra fondamentale proprietà chiamata identità di Jacobi:

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0 \quad (1.12)$$

Inoltre possiamo scrivere le parentesi di Poisson tra le stesse variabili canoniche ottenendo:

$$\begin{aligned} \{q_h, q_k\} &= 0 \\ \{p_h, p_k\} &= 0 \\ \{q_h, p_k\} &= \delta_{hk} \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2 Costanti del moto

Una variabile dinamica F , si dice costante del moto o integrale primo del moto, se è costante durante l'evoluzione dinamica del sistema, qualunque siano le condizioni iniziali assegnate.

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0 \quad (1.14)$$

e se la variabile dinamica F non dipende esplicitamente dal tempo si ottiene:

$$\{F, H\} = 0 \quad (1.15)$$

Da questa possiamo affermare che è un integrale primo del moto, e quindi una costante del moto, ogni variabile dinamica la cui parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana sia zero.

Nel formalismo Hamiltoniano esiste una stretta connessione tra integrali primi e simmetrie.

Come prima cosa, definiamo gruppo di simmetria, per la funzione di Hamilton, un gruppo di trasformazioni a un parametro $\rho_s(x)$ se:

$$H(\rho_s(x)) = H(x) \quad \forall s \in \mathfrak{R} \quad (1.16)$$

e quindi se l'Hamiltoniana assume gli stessi valori in x e nel suo trasformato a prescindere da s .

Per concludere mostriamo il seguente teorema che mostra la connessione tra simmetrie e integrali primi:

Teorema 1. *Ad ogni gruppo di simmetria è associato un integrale primo e viceversa.*

Dimostrazione. Si è mostrato che se F è un integrale primo si ha

$$\{F, H\} = 0 \quad (1.17)$$

per le proprietà delle parentesi di Poisson si ha che:

$$\dot{F} = \{F, H\} = -\{H, F\} = \dot{H} \quad (1.18)$$

dove la parentesi di Poisson al primo membro rappresenta la derivata direzionale di F lungo le orbite del campo Hamiltoniano generato da H , mentre quella a secondo membro rappresenta la derivata direzionale di H . Essendo nulla significa che la funzione di Hamilton è costante lungo queste orbite e quindi vale la (1.16) \square

Capitolo 2

Simmetrie in meccanica quantistica

Nella descrizione della meccanica quantistica, una teoria è simmetrica o ha una simmetria, se l'operatore Hamiltoniano H resta invariato sotto l'azione dell'operatore di simmetria S . Questo ci dice che ogni operatore di simmetria S commuta con l'Hamiltoniana

$$HS = SH \implies [S, H] = 0 \quad (2.1)$$

Possiamo distinguere le simmetrie in due diverse tipologie:

- continue
- discrete

L'operatore di simmetria S in genere è unitario. Vedremo in seguito che ad una simmetria può anche essere associato un operatore antiunitario andando ad enunciare e dimostrare il teorema di Wigner.

Le proprietà che dobbiamo richiedere affinché un operatore sia di simmetria sono le seguenti:

1. Deve essere unitario affinché venga conservata la probabilità, quindi si richiede

$$S^\dagger S = \mathbb{I} \quad (2.2)$$

2. L'applicazione di due operatori di simmetria deve essere uguale alla somma delle azioni

$$S_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta} \quad (2.3)$$

dove con α e β vengono identificati i parametri che la simmetria modifica. Per essere più chiari facciamo un esempio: pensando ad due traslazioni consecutive una di x' e una x'' si deve richiedere che applicandoli consecutivamente su uno stato la loro azione debba essere uguale ad una traslazione di $x' + x''$

3. Si deve richiedere che quando il parametro α tenda a 0 l'operatore di simmetria si riduca all'operatore identità I

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_\alpha = \mathbb{I} \quad (2.4)$$

Si può verificare che un operatore che rispetta le suddette proprietà è:

$$S = e^{i\alpha G} \quad (2.5)$$

dove con G si è indicato il generatore della simmetria che, ad esempio, può essere l'operatore impulso P per le traslazioni oppure l'operatore momento angolare J per le rotazioni.

Pensando poi a trasformazioni infinitesime, dove α è appunto un parametro infinitesimo si può eseguire uno sviluppo in serie della funzione operatoriale S ottenendo

$$S = \mathbb{I} - \frac{i\alpha}{\hbar} G + o(\alpha^2) \quad (2.6)$$

dove con \mathbb{I} si è indicato l'operatore identità.

Quando si ha una simmetria in genere c'è quella che viene detta degenerazione, ovvero ad un unico valore dell'energia E_n che rappresenta un autovalore dell'Hamiltoniana H corrispondono più stati del sistema.

Lo si può mostrare nel modo seguente, supponiamo di avere un sistema fisico descritto dall'Hamiltoniana H avente una qualche simmetria descritta dall'operatore S , ciò implica come detto in precedenza che H ed S commutano. Sia ora $|n\rangle$ un autostato dell'Hamiltoniana con autovalore E_n e cioè:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (2.7)$$

Applicandolo allo stato $H|n\rangle$ il nostro operatore di simmetria S tenendo conto che:

$$S|n\rangle = |n'\rangle \quad (2.8)$$

dove $|n\rangle$ ed $|n'\rangle$ possono essere due diversi stati, ed è appunto questo caso che consideriamo, abbiamo quindi

$$SH|n\rangle = HS|n\rangle = H|n'\rangle \quad (2.9)$$

dal fatto che H ed S commutano. Ma si può leggere anche nel modo seguente

$$SH|n\rangle = E_n S|n\rangle = E_n |n'\rangle \quad (2.10)$$

confrontando la (2.9) con la (2.10) si a che

$$H|n'\rangle = E_n |n'\rangle \quad (2.11)$$

E quindi vediamo che E_n è autovalore sia per $|n\rangle$ che per $|n'\rangle$ anche se sono due stati diversi, si ha quindi la degenerazione.

Per quanto riguarda le simmetrie discrete le più importanti sono tre. Esse sono la parità o inversione spaziale, l'inversione temporale e la coniugazione di carica. Qui dopo aver dimostrato il teorema di Wigner che rappresenta la base di partenza per lo studio di queste simmetrie, andremo poi a discutere la parità e l'inversione temporale, tratteremo poi separatamente la coniugazione di carica visto che per descriverla abbiamo bisogno di introdurre quelle che sono le soluzioni dell'equazione di Dirac.

2.1 Teorema di Wigner

Come detto in precedenza il teorema di Wigner rappresenta il punto di partenza per lo studio delle simmetrie discrete, infatti esso dimostra che una trasformazione di simmetria può essere rappresentata da un operatore unitario e lineare, oppure antilineare ed antiunitario.

Prima di enunciare questo teorema cerchiamo di fare alcune osservazione sulle operazioni di simmetria. Quando si effettua un operazione di simmetria su uno stato quantistico che porta lo stato $|\alpha\rangle$ in $|\alpha'\rangle$ e lo stato $|\beta\rangle$ in $|\beta'\rangle$ è naturale richiedere che il prodotto interno sia conservato:

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \quad (2.12)$$

questo perché richiediamo che un operatore di simmetria sia unitario dato che cambiando punto di osservazione il risultato sperimentale non deve cambiare. Ma questa richiesta risulta troppo restrittiva, infatti ci basta che

venga conservato il modulo del prodotto scalare per ottenere l'invarianza dei risultati. Quindi la nostra richiesta sarà

$$|\langle \alpha' | \beta' \rangle| = |\langle \alpha | \beta \rangle| \quad (2.13)$$

Ovviamente questa è soddisfatta dalla (2.12) ma notiamo che non è il solo modo. infatti la (2.13) è soddisfatta anche dalla condizione

$$\langle \alpha' | \beta' \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^* = \langle \beta | \alpha \rangle \quad (2.14)$$

Partendo da quest'ultima si va a definire quello che è un operatore antiunitario, diamo infatti la seguente definizione:

Definizione. *la trasformazione*

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle = \Theta|\alpha\rangle \quad |\beta\rangle \longrightarrow |\beta'\rangle = \Theta|\beta\rangle \quad (2.15)$$

si dice antiunitaria se

$$\langle \alpha' | \beta' \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^* \quad (2.16)$$

$$\Theta(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) = c_1^*\Theta|\alpha\rangle + c_2^*\Theta|\beta\rangle \quad (2.17)$$

Scriviamo l'operatore antiunitario nella seguente forma

$$\Theta = UK \quad (2.18)$$

dove U è un usuale operatore unitario mentre K è l'operatore di complessa coniugazione. Andando ad applicare K su un ket descritto in una qualche base $\{|a'\rangle\}$, vediamo che esso agisce su coefficienti complessi facendone appunto la complessa coniugazione, ma non va a modificare quelli che sono i ket di base:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle |a'\rangle &\xrightarrow{K} |\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle^* K|a'\rangle \\ &= \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle^* |a'\rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

descritta l'azione di K possiamo andare a verificare le proprietà (2.17) e (2.16)

$$\begin{aligned} \Theta(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) &= UK(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) \\ &= c_1^*UK|\alpha\rangle + c_2^*UK|\beta\rangle \\ &= c_1^*\Theta|\alpha\rangle + c_2^*\Theta|\beta\rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

che prova la (2.17) mentre per la (2.16) abbiamo:

$$\begin{aligned}\langle \alpha' | \beta' \rangle &= \sum_{a''} \sum_{a'} \langle a'' | \alpha \rangle \langle a'' | U^\dagger U | a' \rangle \langle \beta | a' \rangle \\ &= \sum_{a'} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^*\end{aligned}\quad (2.21)$$

avendo potuto scrivere

$$\begin{aligned}|\beta'\rangle &= \sum_{a'} \langle \beta | a' \rangle U | a' \rangle \\ \langle \alpha' | &= \sum_{a'} \langle a' | \alpha \rangle \langle a' | U^\dagger\end{aligned}$$

abbiamo così verificato le proprietà che descrivono un operatore antiunitario.

Inquadrata l'azione di un operatore antiunitario non ci resta che andare ad enunciare e dimostrare il teorema di Wigner.

Teorema 2 (di Wigner). *Per ogni trasformazione di simmetria $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tra raggi di uno spazio di Hilbert tale da preservare la probabilità di transizione, si può definire un operatore U che effettua la trasformazione. U è unitario e lineare se*

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \alpha' | \beta' \rangle \quad (2.22)$$

$$(c_1 |\alpha\rangle + c_2 |\beta\rangle)' = c_1 |\alpha'\rangle + c_2 |\beta'\rangle \quad (2.23)$$

oppure antiunitario e antilineare se

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \alpha' | \beta' \rangle^* \quad (2.24)$$

$$(c_1 |\alpha\rangle + c_2 |\beta\rangle) = c_1^* |\alpha'\rangle + c_2^* |\beta'\rangle \quad (2.25)$$

Dimostrazione. Per provare questo teorema partiamo prendendo un ket $|\varphi_m\rangle$ rappresentato come somma di due ket della base scelta $\{|a_n\rangle\}$

$$|\varphi_m\rangle = |a_1\rangle + |a_m\rangle \quad (2.26)$$

il ket trasformato $|\varphi'_m\rangle$, utilizzando i vettori di base trasformati $\{|a'_n\rangle\}$, e scegliendo opportunamente la fase, sarà dato da:

$$|\varphi'_m\rangle = |a'_1\rangle + |a'_m\rangle \quad (2.27)$$

Volendo decomporre, esplicitamente, il ket $|\varphi'_m\rangle$ sulla base trasformata si ottiene:

$$|\varphi'_m\rangle = \sum_n |a'_n\rangle \langle a'_n | (|a_1\rangle + |a_m\rangle)' \quad (2.28)$$

e volendo conservare la probabilità di transizione si ottiene

$$\langle a'_n | (|a_1\rangle + |a_m\rangle)' = e^{ir_n} (\langle a_n | a_1\rangle + \langle a_n | a_m\rangle) \quad (2.29)$$

potendo scegliere quindi liberamente il fattore di fase globale otteniamo che

$$|\varphi'_m\rangle = |a'_1\rangle + |a'_m\rangle \quad (2.30)$$

come preannunciato.

Consideriamo ora un generico ket $|\alpha\rangle$ e andiamo a decomporlo sulla base $\{|a_n\rangle\}$ ottenendo

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \quad (2.31)$$

il suo trasformato sarà dato da

$$|\alpha'\rangle = \sum_n c'_n |a'_n\rangle \quad (2.32)$$

e quindi si dovrà richiedere che

$$|c_n| = |c'_n| \quad (2.33)$$

volendo scrivere quindi il prodotto scalare tra $|\varphi_m\rangle$ e $|\alpha\rangle$ e tra i loro trasformati si ha:

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_m | \alpha \rangle| &= |c_1 + c_m| \\ |\langle \varphi'_m | \alpha' \rangle| &= |c'_1 + c'_m| \end{aligned} \quad (2.34)$$

e dato che si richiede la conservazione della probabilità di transizione si avrà:

$$|c_1 + c_m| = |c'_1 + c'_m| \quad (2.35)$$

si ha ancora libertà sulla scelta della fase globale di $|\alpha'\rangle$ **ovvero si potrebbe scegliere di volere**

$$c_1 + c_m = c'_1 + c'_m \quad \text{oppure} \quad c_1 + c_m = -c'_1 - c'_m$$

si sceglierà in modo tale da rendere

$$c_1 = c'_1 \quad (2.36)$$

con questa posizione otteniamo la seguente equazione quadratica:

$$c_1 c_n^* + c_1^* c_n = c_1 c_n'^* + c_1^* c_n' \quad (2.37)$$

moltiplicando per c'_n si ottiene:

$$c_1^* c_n'^2 - c'_n (c_1 c_n^* + c_1^* c_n) + c_1 |c_n|^2 = 0 \quad (2.38)$$

Le soluzioni di quest'equazione sono

$$c'_n = c_n \quad c'_n = \frac{c_1}{c_1^*} c_n^* \quad (2.39)$$

l'ultima scelta di fase che possiamo effettuare è quella sul ket $|\alpha\rangle$ e si va a sceglierla in modo tale da ottenere c_1 reale cosicché:

$$|\alpha'\rangle = \sum_n c_n^* |a'_n\rangle \quad (2.40)$$

nella seconda soluzione di c'_n .

Vediamo che alla prima soluzione di c'_n corrisponde una trasformazione unitaria, mentre alla seconda corrisponde una trasformazione antiunitaria.

Consideriamo un altro ket

$$|\beta\rangle = \sum_n d_n |a_n\rangle \quad (2.41)$$

esso si trasforma in

$$|\beta'\rangle = \sum_n d_n |a'_n\rangle \quad (2.42)$$

oppure

$$|\beta'\rangle = \sum_n d_n^* |a'_n\rangle \quad (2.43)$$

a seconda se la trasformazione sia unitaria o antiunitaria. Assumiamo che $|\alpha\rangle$ subisca una trasformazione unitaria

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle = \sum_n c_n |a'_n\rangle \quad (2.44)$$

Vediamo che se $|\beta\rangle$ subisce anch'esso una trasformazione unitaria è verificata la (2.22):

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = \sum_n c_n^* d_n = \langle\alpha|\beta\rangle \quad (2.45)$$

mentre scegliendo per $|\beta\rangle$ una trasformazione antiunitaria si ottiene

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = \sum_n c_n^* d_n^* \neq \langle\alpha|\beta\rangle \quad (2.46)$$

Da questo si può affermare che tutti i vettori decomposti in una base devono trasformarsi in accordo tra loro, sia la trasformazione unitaria o antiunitaria.

□

Capitolo 3

Simmetrie discrete in meccanica quantistica

In questo capitolo si andrà a discutere, alla luce di quanto dimostrato nel capitolo precedente, di due delle tre simmetrie discrete trattate in questo lavoro. Queste vengono discusse in regime non relativistico e quindi l'equazione fondamentale è l'equazione di Schrödinger.

3.1 Parità

La parità o inversione spaziale è la prima simmetria discreta che si incontra in meccanica quantistica. L'operatore di parità Π applicato a un sistema di coordinate trasforma un sistema destrorso in un sistema sinistrorso (vedi fig 3.1).

Quando esso è applicato ad un ket di stato ci restituisce uno stato spazialmente invertito:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \Pi|\alpha\rangle \quad (3.1)$$

Risulta quindi ragionevole chiedere che il valore di aspettazione della posizione x rispetto allo stato spazialmente invertito cambi di segno.

$$\langle\alpha|\Pi^\dagger x \Pi|\alpha\rangle = -\langle\alpha|x|\alpha\rangle \quad (3.2)$$

Questo risulta vero quando

$$\Pi^\dagger x \Pi = -x = x' \quad (3.3)$$

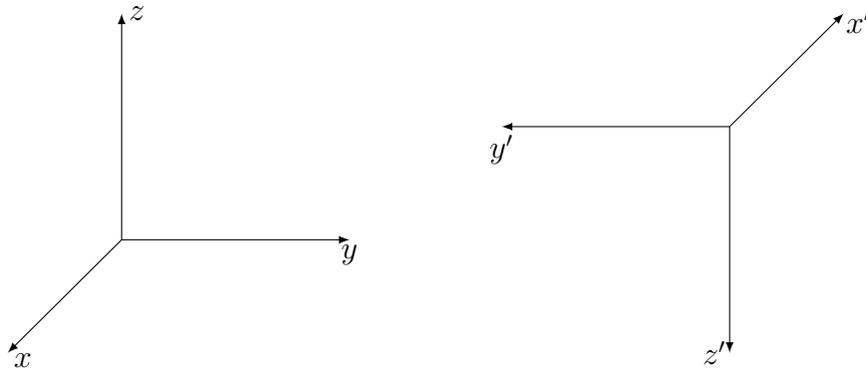


Figura 3.1: Sistema di riferimento sottoposto a parità. A sinistra un sistema di riferimento destrorso, a destra lo stesso sistema dopo che ha agito la parità e quindi un sistema sinistrorso

ed essendo Π un operatore unitario otteniamo

$$x\Pi = -\Pi x \quad (3.4)$$

questo quindi significa che l'operatore posizione e l'operatore di parità devono anticommutare:

$$\{\Pi, x\} = 0 \quad (3.5)$$

Cerchiamo di calcolare gli autovalori dell'operatore Π partendo dalla seguente considerazione:

dopo aver applicato due volte la riflessione spaziale uno stato deve ritornare in se stesso e quindi

$$\Pi \Pi |x\rangle = |x\rangle \quad (3.6)$$

da questo si evince che gli autovalori di Π sono 1 e -1.

Trattiamo ora l'impulso P considerandolo come generatore delle traslazioni. Ricordando che l'operatore di traslazione si scrive come

$$\mathcal{T}(\vec{d}x) = 1 - \frac{iP \cdot \vec{d}x}{\hbar} \quad (3.7)$$

dobbiamo richiedere che la parità seguita da una traslazione equivalga ad una traslazione nel vero opposto seguita dalla parità come si vede dalla fig 3.2. Richiediamo quindi che siano uguali i due stati descritti dalle seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= \Pi \mathcal{T}_{\delta\vec{x}} |\alpha\rangle \\ |\gamma\rangle &= \mathcal{T}_{-\delta\vec{x}} \Pi |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

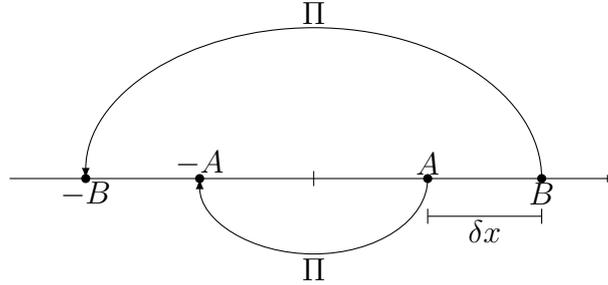


Figura 3.2: abbiamo i 2 casi descritti: prima la traslazione e poi la parità che porta A in B dopodiché va in $-B$ mentre la seconda fa agire prima la parità andando da A in $-A$ e poi effettua una traslazione negativa che da $-A$ va in $-B$

questo equivale a dire

$$\Pi \mathcal{T}_{\delta \vec{x}} = \mathcal{T}_{-\delta \vec{x}} \Pi \quad (3.9)$$

esplicitando l'operatore di traslazione si ha

$$\begin{aligned} \Pi \left(\mathbb{I} - \frac{iP \cdot \delta \vec{x}}{\hbar} \right) &= \left(\mathbb{I} + \frac{iP \cdot \delta \vec{x}}{\hbar} \right) \Pi \\ \Pi - \frac{i}{\hbar} \Pi P \cdot \delta \vec{x} &= \Pi + \frac{i}{\hbar} P \cdot \delta \vec{x} \Pi \end{aligned} \quad (3.10)$$

volendo pensare ad una sola componente del vettore δx ad esempio la componente x e quindi $\delta \vec{x} = \delta x \cdot i$ otteniamo

$$\Pi P_x = -P_x \Pi \quad (3.11)$$

facendolo poi per tutte le componenti si avrà

$$\{\Pi, P\} = 0 \quad (3.12)$$

Trattiamo ora, analogamente all'impulso, il momento angolare considerandolo come generatore delle rotazioni $\mathcal{D}(R)$.

Per una rotazione l'operatore di trasformazione viene scritto come:

$$\mathcal{D}(R) = \mathbb{I} - \frac{iJ \cdot \delta \theta}{\hbar} \quad (3.13)$$

Si deve richiedere che lo stato trasformato applicando prima una rotazione e poi la parità sia uguale ad uno ottenuto eseguendo prima la parità e poi una rotazione come si vede dalla fig 3.3.

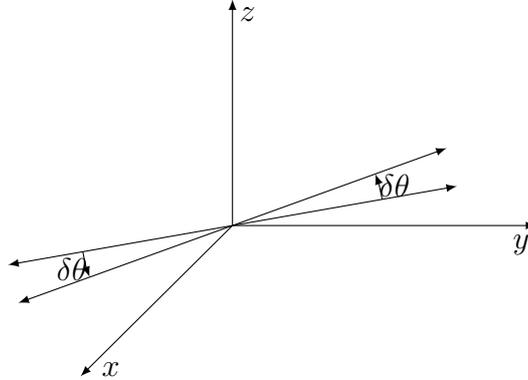


Figura 3.3: possiamo distinguere i casi in uno eseguiamo prima la rotazione di un angolo $\delta\theta$ dopodiché si va nello stato finale applicando l'operatore di parità, nell'altro si applica prima la parità e poi si esegue la rotazione per avere lo stesso risultato

In formule si avrà quindi

$$\Pi \mathcal{D}(R)|\alpha\rangle = \mathcal{D}(R)\Pi|\alpha\rangle \quad (3.14)$$

con la conseguente uguaglianza degli operatori

$$\Pi \mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(R)\Pi \quad (3.15)$$

esplicitando la rotazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \Pi \left(\mathbb{I} - \frac{iJ \cdot \delta\theta}{\hbar} \right) &= \left(\mathbb{I} - \frac{iJ \cdot \delta\theta}{\hbar} \right) \Pi \\ \Pi - \frac{i}{\hbar} \Pi J \cdot \delta\theta &= \Pi - \frac{i}{\hbar} J \Pi \cdot \delta\theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

Questo equivale a dire che la parità commuta con il momento angolare J , contrariamente a quanto si è visto per l'operatore posizione e per l'operatore impulso che anticommutano:

$$[\Pi, J] = 0 \implies \Pi^\dagger J \Pi = J \quad (3.17)$$

Come si vede, la conseguenza è che l'operatore momento angolare non cambia segno sotto parità.

Ricapitolando abbiamo visto che:

$$\begin{aligned} \{\Pi, x\} &= 0 \\ \{\Pi, P\} &= 0 \\ [\Pi, J] &= 0 \end{aligned}$$

ovvero che, x e P cambiano segno sotto parità mentre J resta invariato. Ciò distingue questi vettori in vettori polari che sono x e P , dispari sotto parità, ovvero che cambiano il loro segno se viene invertito spazialmente il sistema di riferimento in cui vivono, e in vettori assiali o pseudovettori come J che hanno la peculiarità di non cambiare segno anche se viene applicata la parità nel sistema di riferimento in cui vive.

3.2 Inversione temporale

La seconda simmetria discreta che incontriamo è quella di inversione temporale. Non bisogna farsi ingannare dal nome, poiché sembra difficile immaginare di mandare indietro il tempo. Sarebbe, infatti più appropriato chiamare questa simmetria inversione del moto, visto che applicandola ad uno stato, essa ha la funzione di invertire il moto.

Si immagini in meccanica classica una particella soggetta a un campo di forze conservativo, se al tempo $t = 0$ invertiamo il moto si avrà

$$p|_{t=0} \longrightarrow -p|_{t=0} \quad (3.18)$$

mentre la posizione conserva il segno

$$x|_{t=0} \longrightarrow x|_{t=0} \quad (3.19)$$

e la particella torna indietro sulla stessa traiettoria (vedi fig 3.4).

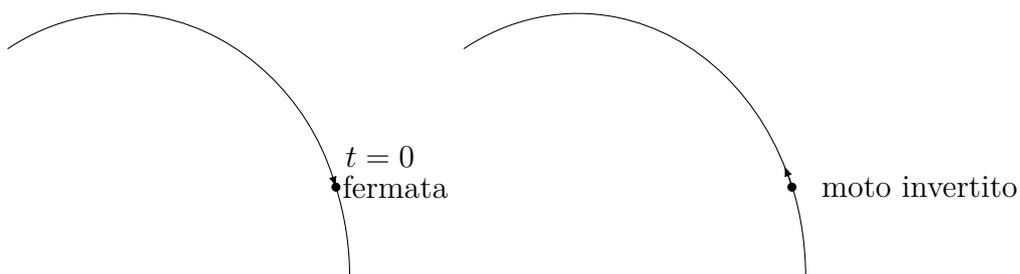


Figura 3.4: Traiettoria classica che si ferma a $t = 0$ e inverte il suo moto

Volendo passare alla meccanica quantistica, indicando con \mathfrak{T} l'operatore di inversione temporale, andiamo ad indagare sulla sua natura. Consideriamo un generico ket di stato $|\alpha\rangle$ ed applichiamo ad esso l'inversione temporale

$$|\alpha\rangle \longrightarrow \mathfrak{T}|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle \quad (3.20)$$

Si pensi a questo ket all'istante $t = 0$, ad un istante successivo, diciamo δt infinitesimo lo stato sarà descritto:

$$|\alpha, t_0 = 0, t = \delta t\rangle = \left(\mathbb{I} - \frac{iH\delta t}{\hbar} \right) |\alpha\rangle \quad (3.21)$$

dove l'operatore al secondo membro è l'operatore di evoluzione temporale, il cui generatore H è l'Hamiltoniana del sistema, per un tempo infinitesimo δt .

Applicando l'operatore di inversione temporale allo stato $|\alpha\rangle$ e poi facendolo evolvere fino all'istante δt si avrà

$$\left(\mathbb{I} - \frac{iH\delta t}{\hbar} \right) \mathfrak{J} |\alpha\rangle \quad (3.22)$$

questo, se il moto soddisfa l'inversione temporale sarà uguale allo stato evoluto temporalmente fino a $-\delta t$ su cui poi è applicata l'inversione temporale

$$\mathfrak{J} \left(\mathbb{I} - \frac{iH(-\delta t)}{\hbar} \right) |\alpha\rangle \quad (3.23)$$

Confrontando la (3.22) con la (3.23) si ottiene l'uguaglianza per gli operatori

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{I} - \frac{iH\delta t}{\hbar} \right) \mathfrak{J} &= \mathfrak{J} \left(\mathbb{I} - \frac{iH(-\delta t)}{\hbar} \right) \\ \mathfrak{J} - \frac{iH\delta t}{\hbar} \mathfrak{J} &= \mathfrak{J} + \mathfrak{J} \frac{iH\delta t}{\hbar} \end{aligned} \quad (3.24)$$

quindi, semplificando, si ottiene

$$-iH\mathfrak{J} = \mathfrak{J}iH \quad (3.25)$$

Non si può a priori eliminare la i poiché non si è ancora chiarito se l'operatore di inversione temporale è unitario o antiunitario.

Vediamo infatti che se si eliminasse la i si avrebbe

$$\mathfrak{J}H = -H\mathfrak{J} \quad (3.26)$$

Ma questa risulta impossibile, infatti prendendo $|n\rangle$ un autostato dell'Hamiltoniana H si ha

$$H\mathfrak{J}|n\rangle = -\mathfrak{J}H|n\rangle = -E_n\mathfrak{J}|n\rangle \quad (3.27)$$

Ma non ha senso parlare di sistemi con uno spettro di energia negativa.

Da questo si deduce che l'operatore di inversione temporale deve essere antiunitario. Richiamando la (3.25) e sfruttando la proprietà di antilinearità mostrata nel capitolo 2 si ha

$$H\mathfrak{J} = \mathfrak{J}H \implies [H, \mathfrak{J}] = 0 \quad (3.28)$$

il che ci assicura che l'inversione temporale rispetta la proprietà generale delle simmetrie, ovvero la commutazione con H

Volendo ragionare sui valori di aspettazione, e in particolare per operatori hermitiani quindi osservabili fisiche, si avrà che un osservabile è pari o dispari per inversione temporale se si ha un segno $+$ o un segno $-$.

$$\mathfrak{J}A\mathfrak{J}^{-1} = \pm A \quad (3.29)$$

e quindi

$$\langle \alpha | A | \alpha \rangle = \pm \langle \alpha' | A | \alpha' \rangle \quad (3.30)$$

dove $\langle \alpha' | A | \alpha' \rangle$ rappresenta il valore di aspettazione rispetto ad uno stato temporalmente invertito.

Indaghiamo come si comportano sotto inversione temporale gli operatori posizione, momento e momento angolare.

Per l'operatore posizione, in analogia con la meccanica classica, dobbiamo richiedere che il suo valore di aspettazione per uno stato temporalmente invertito non cambi di segno e quindi

$$\langle \alpha | x | \alpha \rangle = \langle \alpha' | x | \alpha' \rangle \quad (3.31)$$

La quale conduce alla relazione

$$\mathfrak{J}x\mathfrak{J}^{-1} = x \quad (3.32)$$

Per l'operatore momento P si deve richiedere che sotto inversione temporale essi cambi di segno:

$$\langle \alpha | P | \alpha \rangle = -\langle \alpha' | P | \alpha' \rangle \quad (3.33)$$

La quale conduce alla relazione

$$\mathfrak{J}P\mathfrak{J}^{-1} = -P \quad (3.34)$$

Con le relazioni appena mostrate si può verificare che viene preservata la relazione fondamentale di commutazione

$$[x_i, P_j] | \alpha \rangle = i\hbar | \alpha \rangle \quad (3.35)$$

Applicando alla (3.35) l'operatore di inversione temporale si ottiene

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}[x_i, P_j]|\alpha\rangle &= \mathfrak{T}i\hbar\delta_{ij}|\alpha\rangle \\
 \mathfrak{T}[x_i, P_j]\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{T}|\alpha\rangle &= \mathfrak{T}i\hbar\delta_{ij}|\alpha\rangle \\
 [x_i, -P_j]\mathfrak{T}|\alpha\rangle &= -i\hbar\delta_{ij}\mathfrak{T}|\alpha\rangle
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Per il momento angolare si può ragionare nel modo seguente: in assenza di spin l'operatore J è proprio definito come $x \wedge P$ e quindi essendo x pari e P dispari rispetto all'inversione temporale, si può affermare che l'operatore J debba essere dispari sotto inversione temporale

$$\mathfrak{T}J\mathfrak{T}^{-1} = -J
 \tag{3.37}$$

In modo analogo a quanto fatto per il commutatore tra x e P , si può mostrare che questa scelta preserva la regola di commutazione fondamentale per il momento angolare

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k
 \tag{3.38}$$

Capitolo 4

Spinori di Dirac e coniugazione di carica

Per descrivere la coniugazione di carica abbiamo bisogno di introdurre quelle che sono le soluzioni d'onda relativistica, ovvero l'equazione di Dirac.

Questo perché la simmetria di coniugazione di carica è la naturale simmetria che esiste tra le particelle e le corrispondenti antiparticelle. Quindi dopo aver discusso quelle che sono le soluzioni dell'equazione di Dirac e la loro interpretazione andremo a descrivere l'operatore di simmetria C .

4.1 Spinori di Dirac

Data un fermione e quindi una particella di spin $\frac{1}{2}$, ad esempio un elettrone, cerchiamo di risolvere l'equazione delle onde relativistica nel caso più semplice possibile ovvero in assenza di un campo esterno.

Useremo per le matrici γ^μ la seguente rappresentazione:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Volendo quindi esplicitare otteniamo:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione d'onda sarà data da

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (4.2)$$

Visto che siamo in assenza di campi esterni, cerchiamo una soluzione di particella libera del tipo di un'onda piana.

$$\Psi = u(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \quad (4.3)$$

dove $u(E, \vec{p})$ rappresenta uno spinore a quattro componenti che deve soddisfare l'equazione di Dirac.

le quattro soluzioni sono le seguenti

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A meno di costanti di normalizzazione.

Vediamo che esiste una degenerazione degli stati, si hanno due con energia positiva e due con energia negativa che corrispondono ai due stati di spin ($+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$).

Da questo si vede il grande risultato della teoria di Dirac per l'elettrone, essa prevede spontaneamente l'esistenza dello spin, mentre fino ad allora questo era stato introdotto a mano.

Il problema è quello di interpretare le soluzioni con energia negativa, infatti mentre gli spinori u_1 e u_2 rappresentano i due stati di spin con energia positiva gli altri due corrispondono a casi di energia negativa.

Lo stesso Dirac propose un'interpretazione per questi stati, esso infatti interpretò le soluzioni ad energia negativa nel seguente modo:

Nel vuoto tutti gli stati di elettroni con energia negativa sono pieni per cui, per il principio di esclusione di Pauli, non possono essere occupati da altri elettroni. Interpretò poi le lacune negli stati con energia negativa come stati corrispondenti ad antiparticelle con energia positiva e carica opposta a quella dell'elettrone.

Un'altra interpretazione è dovuta a Feynman e Stückelberg i quali interpretarono nel modo seguente:

Una soluzione ad energia negativa descrive una particella che si propaga indietro nel tempo o equivalentemente, un antiparticella ad energia positiva che si propaga in avanti nel tempo

Entrambe le interpretazioni richiedono l'esistenza delle antiparticelle e quindi dell'antimateria.

Ad oggi è noto che per ogni particella è associata una rispettiva antiparticella, con proprietà del tutto analoghe come la massa e lo spin, ma avente carica elettrica opposta. Più precisamente, non è solo la carica elettrica ad essere invertita ma anche altri numeri quantici che identificano la particella stessa, come ad esempio il numero leptonico il numero di stranezza o il numero barionico ecc.

Nel corso degli anni sono state ipotizzate e poi scoperte tutta una serie di antiparticelle a partire dal positrone ipotizzato dallo stesso Dirac nel 1928 e poi scoperto da Anderson nel 1932

4.2 Coniugazione di carica

La coniugazione di carica C è la simmetria che sostituisce alle particelle le rispettive antiparticelle.

Per trattare l'operatore di coniugazione di carica C andiamo a studiare l'equazione di Dirac nel caso di un campo elettromagnetico descritto dal quadrivettore A

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\Psi = 0 \quad (4.4)$$

applicando l'operatore antilineare K introdotto nel capitolo 2 otteniamo:

$$\begin{aligned} K[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\Psi &= 0 \\ [\gamma^\mu(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m]K\Psi &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

moltiplicando in seguito per la matrice

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \gamma^5[\gamma^\mu(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m]K\Psi &= 0 \\ [\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\gamma^5K\Psi &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Visto che γ^5 anticommute con le matrici γ^μ mentre commuta con ∂_μ e A_μ

Identificando C con γ^5K notiamo che l'equazione (4.7) descrive l'evoluzione di una particella con la stessa massa m e nello stesso potenziale A_μ ma con carica opposta a quella descritta dall'equazione (4.4) e quindi le due equazioni descrivono l'evoluzione di due particelle coniugate di carica tra loro nello stesso potenziale come richiesto.

Si noti che non abbiamo cambiato il segno di A_μ , e quindi delle correnti. Se avessimo considerato il campo elettromagnetico come quantizzato avremmo dovuto cambiare anche il segno del quadrivettore A_μ . Infatti in teoria quantistica dei campi l'operatore C risulta leggermente diverso [3].

La coniugazione di carica è dunque una corrispondenza antilineare e reciproca tra stati che descrivono particelle distinte immerse nello stesso potenziale elettromagnetico, aventi la stessa massa ma di carica opposta; $-e$ per quella descritta dall'equazione (4.4), $+e$ per quella descritta dalla (4.7).

Come già fatto per la parità, dobbiamo richiedere che applicando due volte l'operatore C si ritorni allo stato di partenza:

$$C C = 1 \quad (4.8)$$

e quindi i suoi autovalori saranno $+1$ e -1 .

Per quanto riguarda gli operatori, data una generica osservabile O andiamo a vedere come essa si comporta sotto coniugazione di carica. Andiamo quindi a calcolarne il valore di aspettazione tra generici stati $|\alpha\rangle$ e i rispettivi stati coniugati di carica $C|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_C &= (\langle \alpha | C^\dagger)(O C |\alpha\rangle) \\ &= \langle \alpha | C^\dagger O C |\alpha\rangle^* = \langle \alpha | C^\dagger O^\dagger C |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

E quindi la relazione tra i valori di aspettazione è

$$\langle O \rangle_C = \langle C^\dagger O^\dagger C \rangle \quad (4.10)$$

Applicando questa relazione, sfruttando le proprietà di antilinearità dell'operatore K da cui è stato costruito C , si trovano le seguenti trasformazioni di coniugazione di carica per gli operatori x , P e J

$$\begin{aligned}x &\longrightarrow x \\P &\longrightarrow -P \\J &\longrightarrow -J\end{aligned}\tag{4.11}$$

Queste rappresentano dunque le trasformazioni che subiscono gli operatori corrispondenti alle più importanti variabili dinamiche, che sono state al centro del nostro studio.

Conclusioni

In questa tesi si sono mostrate quelle che sono le proprietà matematiche e le azioni sulle osservabili più importanti degli operatori di simmetria discussi.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nella seguente tabella:

	x	P	J
Π	-	-	+
\mathfrak{J}	+	-	-
C	+	-	-

Tuttavia, non si può concludere non dando quello che è un quadro generale delle applicazioni e dello sviluppo che queste simmetrie hanno portato nel corso dei progressi più recenti. **Infatti le simmetrie di tutti i tipi, ad oggi, giocano un ruolo fondamentale nelle teorie correnti.**

Nello sviluppo della teoria, con la formulazione del modello standard, si è ipotizzata una rottura spontanea delle simmetrie verificate poi sperimentalmente nei vari acceleratori di particelle sparsi per il mondo.

Già nel 1956 Lee e Yang, studiando i decadimenti β e quindi nelle interazioni deboli, ipotizzarono una violazione della parità. Solo un anno dopo furono pubblicati le prime evidenze sperimentali da S. Wu della violazione di parità ottenute studiando il decadimento β del ^{60}Co .

Un'altra significativa evidenza sperimentale arrivò nel 1958 dallo studio dell'elicità del neutrino condotta da Goldhaber che mostrava un'evidente violazione della simmetria di coniugazione di carica.

É stato anche sperimentalmente dimostrato che le interazioni deboli violano la simmetria CP studiando il sistema dei mesoni K .

Tuttavia ad oggi non si è ancora evidenziata una violazione della simmetria CPT , la non violazione è giustificata da uno dei teoremi più importanti della teoria quantistica dei campi. Esso afferma che qualunque sistema Hamiltoniano, che sia invariante per trasformazioni di Lorentz è anche invariante sotto l'applicazione successiva, in qualunque ordine, di C , P e T .

Visto che si è evidenziata una violazione di CP è conseguenza che venga violata la simmetria di inversione temporale. **Quest'ultima violazione, che potrebbe avere conseguenze persino per la seconda legge della termodinamica, è comunque minuscola.** Un importante conseguenza del teorema CPT è che la massa e la vita media di una particella debbano essere esattamente uguali a quelle della sua antiparticella.

Bibliografia

- [1] Goldstein, Herbert, *Meccanica classica*, Zanichelli (1971), Bologna.
- [2] Gottfried, Kurt, *Quantum mechanics: volume I*, W. A. Benjamin (1966), New York.
- [3] Itzykson, Claude; Zuber, Jean-Bernard *Quantum field theory*, Mc-Graw Hill (1980).
- [4] Messiah, Albert, *Mécanique quantique*, Dunod (1964), Parigi.
- [5] Romano, Antonio, *Meccanica analitica*, Apogeo (2007).
- [6] Sakurai, Jun John, *Meccanica quantistica moderna*, Zanichelli(1996), Bologna.