# Geometria Noncommutativa

# a

# Napoli & Dintorni

**Raccontata da** *Fedele Lizzi*

Riunione nazionale del PRIN SINTESI

Vietri 2004

A Napoli (e dintorni) abbiamo accumulato molta esperienza di Geometria Noncommutativa, in vari momenti vi hanno lavorato Agostini, Bimonte, Esposito, Lizzi, Marmo, Sparano (ora a Salerno), Vitale, Zampini, anche in collaborazione con Gianni Landi del nodo di Trieste. Mentre Tarlini e Sorace a Firenze (ma partecipanti al nodo di Napoli) sono stati dei pionieri in Italia dei gruppi quantici, una versione di geometria noncommutativa dei gruppi di Lie, in cui il manifod del gruppo è uno spazio noncommutativo. Sciarrino ha applicato i gruppi quantici alla codificazione del codice genetico, ed in particolare ai rapporti fra codoni a ammionacidi.

Si possono provare ad individuare alcune linee principali:

- ⋆ La costruzione e lo studio della “geometria” degli Spazi Noncommutativi

- ⋆ Le teorie (di Campo) su Spazi non Nommutativi

- ⋆ I gruppi Quantici

Tenterò una veloce rassegna delle attività legate alla geometria noncommutativa (NCG) che si sono svolte nel nodo napoletano, indicando qualche prospettiva futura

Vi racconterò

- Brevissima introduzione all NCG.

- Qualche risultato raggiunto.

- Prospettive.

Farò tutto con una prospettiva molto personale, e senza nessun dettaglio tecnico.

Le motivazioni originali della NCG sono svariate ed hanno radici profonde in vari ambiti della fisica e della matematica.

- La Geometria Noncommutativa originale (e per molti versi ancora la più affascinante) è lo spazio delle fasi della meccanica quantistica

- Lo studio delle proprietà topologiche degli spazi attraverso lo studio delle algebre di funzioni questi, conduce naturalmente a considerare la loro generalizzazione al caso non abeliano, corrispondente ad $C^*$-algebre noncommutative

- Vari aspetti di fisica della gravitazione portano ad ipotizzare qualche sorta di principio di indeterminazione sulle distanze.

- Gli infiniti della quantizzazione delle teorie di campo, specie quelle gravitazionali, suggeriscono alla distanza di Planck un nuovo tipo di geometria che produca un qualche cutoff

- La teoria delle stringhe, che pure usa una geometria molto "classica", descrive le coordinate dello spaziotempo come campi di una teoria di conforme bidimensionale. Gli operatori di vertice di questi campi, che rappresentano stringhe interagenti, in un certo limite, riproducono le regole di commutazione della quantizazione, descrivendo quindi lo spaziotempo in maniera analoga allo spazio delle fasi della meccanica quantistica.

C'è un semplice fatto che impariamo dalla meccanica quantistica, che altri non è che la geometria noncommutativa dello spazio delle fasi:

Una delle migliori maniere di descrivere un geometria noncommutativa è attraverso un'algebra di **operatori.**

Gli spazi noncommutativi sono quasi sempre descritti attraverso la generalizzazione dell'algebra dei campi definiti su un manifold.

Nel caso commutativo quest'algebra è commutativa ed è possibile ricostruire lo spazio sottostante.

Il caso noncommutativo in certi casi si può quindi ridurre allo studio delle algebre noncommutative.

Una classe importante di spazi non commutativi sono dati dalle Algebre deformate, il cui capostipite è il prodotto di Moyal (in due dimensioni):

$$(f \star g)(x) = f(x) e^{i \overleftarrow{\partial} \theta \overrightarrow{\partial}} g(x) = f(x)g(x) + i\theta\{f, g\} + O(\hbar^2)$$

$$x_1 \star x_2 - x_2 \star x_1 = \theta\{x_i, x_j\} = \theta$$

La costruzione di algebre simili nel caso in cui le parentesi di Poisson diano di gruppi diversi da quello di Heisenberg-Weyl è una operazione non banale.

La costruzione nel caso più generale possibile di una struttura di Poisson arbitraria è nota (Kontsevich) solo a livello formale, a livello di serie formali. Non c'è in generale garanzia che le serie convergano, ed in generale non lo fanno.

Usando un procedimento di “riduzione” di spazi simplettici con profonde radici nella teoria dei sistemi integrabili, siamo stati capaci di costruire deformazioni del tipo Moyal per algebre di Lie tridimensionali arbitrarie.

Un caso particolare di questa costruzione è la costruzione di prodotti deformati du spazi $\kappa$-Minkowski, che sono gli spazi omogenei di una versione quantica del gruppo di Poincaré (Firenze).

A Firenze (e Trieste) si è lavorato molto alla definizione ed allo studio di sfere deformate.

Un discorso a parte meritano gli spazi **Fuzzy**. Questi sono descritti da algebre finito dimensionali (algebre di matrici) che approssimano uno spazio, commutativo o meno.

Esempio principe, la sfera fuzzy, definita da $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Imponendo

$$[x_i, x_j] = \frac{i}{N(N+1)} \varepsilon_{ijk} x_k$$

si ottiene uno spazio noncommutativo. Ponendo $x_i \propto L_i$ nella rappresentazione $N \times N$ si ottiene una approssimazione dell'algebra della sfera.

I modelli di matrici hanno moltissime connessioni con la NCG

Un'algebra noncommutativa è rappresentabile come algebra di operatori su uno spazio di Hilbert. E questi sono (nella base opportuna) delle matrici. Approssimazioni emergono con opportuni troncamenti.

A Napoli abbiamo descritto un disco come spazio fuzzy, e di questo parlerà Patrizia Vitale

Gli spazi noncommutativi hanno una ricchissima struttura di **Solitoni**

Prendiamo un potenziale (polinomiale o almeno analitico) $V(x)$ con un minimo a $x = 0$.

Consideriamo una teoria di campo in cui possiamo ignorare i termini cinetici e la cui azione è $V(\varphi^2 - 1)$. I minimi dell'azione sono per $\varphi$ soluzione di $\varphi V'(\varphi^2 - 1) = 0$. Nel caso noncommuativo non c'e' solo la soluzione costante $\varphi = 1$, ma c'e' un minimo, un **solitone** per ogni **proiettore** $\varphi^2 = \varphi$

Assieme a Gianni Landi del nodo di Trieste abbiamo costruito una approssimazione matriciale al toro noncommutativo (versione compatta del piano di Moyal) basata su questi solitoni. Con questa abbiamo costruito una teoria di campo che abbiamo risolto in alcuni casi.

Il che ci porta a chiederci: Una volta che abbiamo una NCG cosa ci facciamo?

Le teorie di campo su spazi noncommutativi sono una industria fra le più fiorenti in NCG. Anche per le connessioni con la teoria delle stringhe.

Molto lavoro è fatto per le teorie con il prodotto di Moyal, e noi abbiamo investigato l'algebra di Lie di una teoria di Gauge in cui il gruppo di gauge è $U(1)$, ma che è una teoria noncommutativa perché il prodotto $\star$ non commuta.

In generale per studiare una teoria di campo su spazi noncommutativi bisogna costruire un calcolo differenziale, impresa spesso non facile

Abbiamo anche studiato gli effetti della noncommutatività in ambito cosmologico studiando gli effetti del tensore $\theta$ nel background cosmico dell'era post-inflattiva

# Che fare?

Al momento stiamo considerando vari aspetti della NCG:

- ⋆ Proprietà metriche (distanze fra stati massimamente localizzati) per il piano di Moyal, la sfera ed il disco fuzzy.

- ⋆ Costruzione di un calcolo differenziale sui prodotti noncommutativi ottenuti dalla riduzione simplettica.

- ⋆ Stiamo studiando vari modelli di matrici (basate su solitoni) che approssimano (in senso forte) tori e sfere.

- ⋆ Approssimazioni fuzzy per altri spazi, e per spazi con bordo con altre condizioni al contorno.

- ⋆ Conseguenze della NCG sulla fisica dei raggi cosmici.