Esercizi e Problemi del corso di

Complementi di Meccanica Quantistica

tenuto da Fedele Lizzi

Nota: I problemi preceduti da una $\star$ si riferiscono alle parti monografiche del corso, di cui ogni anno viene svolta solo una selezione.

In generale si posso provare a risolvere tutti i problemi del capitolo 1 del Sakurai. Tutti i problemi dei capitoli 2 e 3 (anche se alcuni sarebbero più adatti al corso di Meccanica Quantistica non fa male farli). I seguenti problemi del capitolo 4: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 11, 12. Tutti i problemi del capitolo 6.

==

In uno spazio di Hilbert a dimensione finita N con base $|e_n\rangle$ si definisca la traccia

$$\mathrm{tr}A = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n|A|e_n\rangle$$

Si dimostri che la traccia è indipendente dalla base e che

$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$$

per ogni coppia di operatori A e B e quindi $\mathrm{tr}[A, B] = 0$.

==

Dato uno spazio di Hilbert a dimensione infinita, con base $|e_n\rangle$ si trovi la forma matriciale dell'operatore

$$a\,|e_n\rangle = \sqrt{n}\,|e_{n-1}\rangle \ \ .$$

Si calcoli poi

$$\mathrm{tr}[a, a^\dagger]$$

e si discuta il risultato ottenuto.

==

Su uno spazio di Hilbert a dimensione infinita si dia un esempio di un operatore A e di un vettore $|\psi\rangle$ tali che $A|\psi\rangle$ non esiste.

Trovare poi un operatore A e due vettori $|\psi\rangle$ e$|\varphi\rangle$ tali che $A|\psi\rangle$ esiste, ma $\langle\varphi| A|\psi\rangle$ non è definito.

==

Dato l'operatore moltiplicativo x, si calcolino i suoi elementi di matrice x_{mn} nei seguenti casi per le funzioni a quadrato sommabile sulla retta, l'intervallo e il cerchio.

- Nella base data dalle autofunzioni dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico per le funzioni della retta.
- Nella base dell'Hamiltoniana della particella libera per le funzioni sull'intervallo con le condizioni al contorno di tipo buca infinita.
- Sempre la base dell'Hamiltoniana della particella libera, ma stavolta per le funzioni sul cerchio.

Nota: Usare variabili adimensionali.

==

Una particella di massa m è confinata su un intervallo $[0, a]$ da una barriera di potenziale infinita. A $t = 0$ s la funzione d'onda della particella è $\psi(x, t = 0) = A \sin 3\left(\frac{\pi x}{a}\right)$. Ricavare l'espressione di $\psi(x, t)$ per un generico $t > 0$. Esiste un τ per cui si verifica che $\psi(x, \tau) = \psi(x, t = 0)$?

==

Si consideri un fascio proveniente da un apparato di Stern-Gerlach di cui si sia selezionata la componente con spin in su, e tali che il fascio sia stato diviso in due componenti, una con intensità doppia rispetto all'atro. Il fascio di intensità minore viene ruotato di un angolo θ ed i due fasci vengono ricombinati in modo tale che la differenza fra i cammini ottici sia nulla.

Si calcoli la probabilità di trovare le particelle con spin in su nei due casi in cui lo spin dei due fasci (prima della ricombinazione) sia stato misurato o meno.

==

Si considerino le seguenti matrici e si indichi quali corrispondono a matrici densità, e di queste quali a stati puri e quali a miscele. Per i casi che rappresentano matrici densità si calcoli la probabilità che una misura dello spin lungo l'asse x dia valore 1/2. Per gli stati puri si trovi il vettore corrispondente.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

==

Si consideri una particella di spin 1/2 descritta dalla seguente matrice densità:

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si tratta di uno stato puro? Se sì trovare il corrispondente vettore dello spazio di Hilbert.
2. Calcolare la probabilità che una misura dello spin lungo l'asse x trovi il valore 1/2.

==

Si considerino due particelle descritte dalle seguenti matrici densità:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \\ \rho_1 &= |\psi\rangle\,\langle\psi| \\ \rho_2 &= \gamma\,|0\rangle\,\langle 0| + \delta\,|1\rangle\,\langle 1| \end{aligned}$$

dove $|n\rangle$ è sono gli autostati normalizzati dell'operatore numero $N = a^\dagger a$.

Si consideri inoltre l'operatore

$$W(z) = e^{a\bar{z} + a^\dagger z}$$

dove z è un generico numero complesso.

Si trovino:

1. Le condizioni su α, β, γ e δ perché ρ_1 e ρ_2 siano delle matrici densità.
2. I valori medi dell'operatore W nei due stati.
3. Si trovi almeno una scelta di α, β, γ e δ per cui il valor medio di W risulta essere lo stesso nei due casi, oppure si dica perché questo è impossibile.

Nota: La formula di Beker-Hausdorff può risultare utile: se $[A, B]$ commuta sia con A che con B allora $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$.

Soluzione:

Deve essere $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $\gamma + \delta = 1$ con α e β complessi, e γ e δ reali positivi.

$W = e^{-|z|^2/2} e^{a^\dagger z} e^{a\bar{z}}$ da cui

$$\begin{aligned}
\langle 0| W |0\rangle &= e^{-|z|^2/2} \\
\langle 1| W |0\rangle &= z e^{-|z|^2/2} \\
\langle 0| W |1\rangle &= \bar{z} e^{-|z|^2/2} \\
\langle 1| W |1\rangle &= (1 + |z|^2) e^{-|z|^2/2}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\rho_1 W &= \left(1 + |\beta z|^2 + 2\mathrm{Re}\alpha\bar{\beta}z\right) e^{-|z|^2/2} \\
\mathrm{tr}\rho_2 W &= \left(1 + |\delta z|^2\right) e^{-|z|^2/2}
\end{aligned}$$

Ci sono molti casi per cui la risposta non cambia, per esempio la scelta di α e z reali e β immaginario puro, con $\delta = -i\beta$

==

Si consideri una rozza approssimazione alla funzione d'onda di una particella in una dimensione localizzata in un intervallo di lunghezza $\epsilon \neq 0$ come:

$$\langle x \,|\, \chi_\alpha\rangle = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & \alpha \leq x \leq \alpha + \varepsilon \\ 0 & \alpha + \epsilon < x \end{cases} \tag{1}$$

e si considerino le seguenti matrici densità corrispondenti ad uno stato puro e ad una mistura di due particelle (una con un estremo nell'origine):

$$\rho^{(p)} = N^{(p)} \left(|\chi_0\rangle + |\chi_\alpha\rangle\right) \left(\langle\chi_0| + \langle\chi_\alpha|\right) \tag{2}$$
$$\rho^{(m)} = N^{(m)} \left(|\chi_0\rangle\langle\chi_0| + |\chi_\alpha\rangle\langle\chi_\alpha|\right) \tag{3}$$

Si consideri poi un altrettanto rozzo modello di "rivelatore" di una particella in un intervallo $2\delta \neq 0$ del punto x_0 descritto dall'operatore

$$\Delta_{x_0} = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx\, |x\rangle\langle x| \tag{4}$$

1. Si calcolino le due costanti $N^{(p)}$ e $N^{(m)}$.
2. Si dia un esempio di valori per α, ϵ, x_0 e δ per cui una "misura" effettuata con Δ dia lo stesso valore nei due casi, ed un esempio in cui il valore è differente.

Soluzione: Per la mistura

$$N^{(m)} = \frac{1}{2}$$

mentre per il caso puro bisogna distinguere il caso $\alpha \geq \epsilon$ (in cui caso $N^{(p)} = 1/2$) dal caso $\alpha < \epsilon$ in cui caso

$$N^{(p)} = \frac{\epsilon}{4\epsilon - 2\alpha}$$

==

Un fascio di elettroni con spin 1/2 lungo l'asse z viene diviso in due parti uguali. Di questi uno viene ruotato di $\pi/2$ lungo l'asse y, e i due fasci vengono poi ricombinati. Si trovi la probabilità di trovare il valore 1/2 dello spin lungo l'asse y nei due casi in cui lo spin dei due fasci viene misurato o meno prima della ricombinazione.

==

Si considerino le seguenti due funzioni d'onda sulla retta:

$$\begin{aligned}
\langle x|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \begin{cases} 0 & x \leq -a \\ 1 & -a < x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases} \\
\langle x|\psi_2\rangle &= \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2a}} \begin{cases} 0 & x \leq -a+b \\ 1 & -a+b < x < a+b \\ 0 & x \geq a+b \end{cases}
\end{aligned}$$

con α, a e b quantità reali e $0 < b < a$.

Si calcoli la probabilità di trovare la particella sulla semiretta $x > 0$ nei due casi in cui la particella è descritta dalle matrici densità:

$$\begin{aligned} \rho_p &= N_p(|\psi_1\rangle + \psi_2\rangle)(\langle\psi_1| + \langle\psi_2|) \\ \rho_m &= N_m(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) \end{aligned}$$

Soluzione: Nel caso della matrice densità corrispondente al caso puro conviene considerare semplicemente la funzione d'onda normalizzata e farne l'integrale del modulo quadro da 0 a ∞. La costante di normalizzazione della funzione d'onda è

$$N^2 = \frac{1}{2(2a + (2a - b)\cos\alpha)}$$

e la probabilità risulta essere

$$\frac{2a + 2a\cos\alpha + b}{2(2a + (2a - b)\cos\alpha)}$$

====================================

Si consideri un sistema composto da due elettroni A e B. Si scrivano le matrici densità di:

1. Uno stato puro non intrecciato (entangled).
2. Uno stato puro intrecciato.
3. Uno stato misto non intrecciato.
4. Uno stato misto intrecciato.

====================================

Si consideri $|\psi\rangle$, uno stato quantico generico di un sistema con spin $1/2$, e $\left|\psi^\perp\right\rangle$ uno stato ortogonale a $|\psi\rangle$.

Si esprima lo stato intrecciato di due elettroni

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi\rangle_A \left|\psi^\perp\right\rangle_B - \left|\psi^\perp\right\rangle_A |\psi\rangle_B\right)$$

nella base $|\pm\rangle_z$ degli autostati dello spin lungo l'asse z

==

Si considerino le seguenti funzioni d'onda di un sistema di due elettroni:

$$
\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= |+\rangle_{zA}|-\rangle_{xB} \\
|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{zA}|-\rangle_{xB} - |-\rangle_{zA}|+\rangle_{xB}\right) \\
|\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{zA}|-\rangle_{zB} + |-\rangle_{zA}|+\rangle_{zB}\right)
\end{aligned}
$$

1. Si indichi quali di questi stati sono stati intrecciati (entangled).
2. Si trovi la probabilità che una osservatrice trovi il valore 1/2 per lo spin lungo l'asse z dell'elettrone A.
3. Si trovi la probabilità che un osservatore trovi il valore 1/2 per lo spin lungo l'asse z dell'elettrone B.
4. Si trovi la probabilità che un osservatore trovi il valore 1/2 per lo spin lungo l'asse z dell'elettrone B *dopo che l'osservatrice in A ha osservato il valore 1/2.*.

==

Questo è essenzialmente il problema 1.7 del Sakurai

Dato uno spazio di Hilbert a dimensione finita o infinita, la base $|\phi_a\rangle$ dell'operatore autoaggiunto A

$$A\,|\phi_n\rangle = a_n\,|\phi_n\rangle$$

con alcuni autovalori a_n ripetuti tante volte quante è la loro degenerazione. Si consideri un vettore generico $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n\,|\phi_n\rangle$ e si calcolino

$$\prod_n (A - a_n)\,|\psi\rangle$$

$$\prod_{n:\, a_n \neq a_m} \frac{(A - a_n)}{a_m - a_n}\,|\psi\rangle$$

==

Questo è essenzialmente il problema 1.8 del Sakurai

Si consideri una particella con spin 1/2 in uno stato puro di cui si conoscono i valori medi di $\langle S_x \rangle$ e $\langle S_z \rangle$, determinare se i dati sono sufficienti per individuare lo stato, ed in caso contrario indicare quali altri dati sono necessari. Ripetere il ragionamento per una miscela.

Soluzione: Se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ e $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ allora:

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{4}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = 1 \tag{5}$$

che, assieme alla condizione di normalizzazione $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$, ci permette di calcolare i moduli delle ψ_i. Invece:

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{4}|\psi_1||\psi_2|\cos\phi \tag{6}$$

dove ϕ è la fase relativa (una fase globale non compare nello stato). I dati sono "quasi" sufficienti, ci rimane solo l'ambiguità del segno della ϕ, che si risolverebbe sapendo il segno di $\langle S_y \rangle = \frac{1}{4}|\psi_1||\psi_2|\sin\phi$.

Nel caso della miscela

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & 1-\alpha \end{pmatrix} \tag{7}$$

con α reale. In tal caso

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \frac{1}{2}(2\alpha - 1) \\ \langle S_y \rangle &= \frac{1}{2}(\beta - \beta^*) \end{aligned} \tag{8}$$

e si vede che con i dati a disposizione possiamo solo calcolare la parte reale di β. Stavolta abbiamo bisogno di $\langle S_y \rangle$ e non solo del suo segno.

==

$\star$ Dati i seguenti insiemi, indicare quali formano gruppo e (quando si applica) rispetto a quale operazione e/o quale valore di n. Di quelli che formano gruppo indicare quali sono abeliani, quali sono finiti (e di che ordine).

- Le rotazioni unidimensionali di un angolo α razionale, e nel caso irrazionale.

- I numeri naturali, interi relativi, razionali, reali, complessi, razionali positivi, razionali positivi escluso lo zero, reali positivi, reali non nulli, complessi con parte reale e immaginaria razionale, complessi immaginari puri, complessi non nulli, complessi con parte reale positiva. Tutti questi insiemi numerici rispetto a somma e prodotto.

- Le matrici di numeri reali $n \times n$, a determinate nonnullo, a determinante costante d, a determinate intero relativo. Rispetto al prodotto riga per colonna.

- Ripetere tutti i casi precedenti nel caso delle matrici di numeri complessi, interi, razionali.

- Le matrici con elementi diversi da zero sulla diagonale principale e sulle diagonali al di sopra di questa (matrici triangolari).

- Le matrici triangolari con elementi diagonali tutti uguali a k.

- Le funzioni continue sulla retta a valori complessi. Rispetto a somma e prodotto.

- Le funzioni non nulle sulla retta.

  Le funzioni a quadrato sommabile sulla retta, sempre rispetto a somma e prodotto.

- Le permutazioni di n elementi.

=====================================

Tre matrici M_i, 81×81 soddisfano le regole di commutazione del momento angolare.

Conoscendo gli autovalori di M_3 che sono:

$$\begin{array}{ll} \pm 2 & \text{1 volta ognuno.} \\ \pm \frac{3}{2} & \text{8 volte ognuno.} \\ \pm 1 & \text{7 volte ognuno.} \\ \pm \frac{1}{2} & \text{20 volte ognuno.} \\ 0 & \text{9 volte.} \end{array} \tag{9}$$

Trovare gli 81 autovalori di $M^2 = \sum_i M_i^2$ con le loro degenerazioni.
==

Si considerino due matrici 5×5: $A = A^\dagger$ e $B \neq B^\dagger$, che soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [A, B] &= B \\ [B, B^\dagger] &= 2A \end{aligned}$$

Trovare tutte le possibili scelte per gli autovalori di A.
==

Si considerino due operatori A e B con

$$AB + BA = 0$$

e tali che esista un autovettore (proprio o improprio) comune ai due. Si dimostri che $(AB)^{-1}$ non esiste e lo si verifichi nei due casi:

- $A = P$ (parità), $B = p$ (momento).
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

==

Si considerino la seguente matrici:

$$\rho_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \; ; \rho_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & i-1 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli se sono stati puri, e in tal caso a quali vettori corrispondono. Se un sistema si trova nello stato descritto da ρ_1 si calcoli la probabilità di trovarlo nello stato descritto da ρ_2 e si commenti il risultato.
==

Questo è essenzialmente il problema 3.22 del Sakurai
Si consideri una particella con spin $j = 1$. Trovare la matrice che corrisponde a J_y e J_z. Calcolare quindi la matrice rappresentativa di una rotazione dei tre angoli di Eulero α, β e γ.

==

Si consideri una particella di spin $\ell = 1$

1. Usando le relazioni di commutazione e espressioni di $\vec{L}^2$ in termini di L_+, L_- ed L_3, derivare una rappresentazione matriciale delle componenti di $\vec{L}$.

2. Sapendo che una possibile rappresentazione matriciale 3×3 di $\vec{L}$ è data da

$$(l_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$$

trovare la matrice di trasformazione tra l_i e L_i e mostrare esplicitamente che la trasformazione funziona per L_1, L_3, mostrando che si trasformano in l_1, l_3.

==

Dimostrare che il determinante della matrice $\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$

1. è invariante per la trasformazione

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \to \vec{\sigma} \cdot \vec{a}' = \exp\left\{i\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2}\phi\right\} (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \exp\left\{-i\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2}\phi\right\} \tag{10}$$

2. Nell'ipotesi in cui $\vec{a}$ sia il vettore posizione dimostrare che la trasformazione precedente corrisponde ad una rotazione intorno alla direzione individuata dal versore $\vec{n}$ di un angolo ϕ.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{a}' &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \cos^2(\phi/2) + \sin^2(\phi/2)\Big[i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \times \vec{a}) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\vec{n} \cdot \vec{a})\Big] - \\ &\quad \vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \times \vec{a}) 2\sin(\phi/2) cos(\phi/2) \\ &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) + \vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \times \vec{a}) \sin(\phi) \end{aligned} \tag{11}$$

da cui, sapendo che $a_i' = \mathrm{Tr}(\vec{a}' \cdot \vec{\sigma})\sigma_i$ si vede che $\vec{a}' = \vec{a} + \hat{n} \times \vec{a} \sin\phi$

==

QUESTO È ESSENZIALMENTE IL PROBLEMA 3.25 DEL SAKURAI

Si consideri un tensore sferico di ordine 2 di componenti

$$V_{\pm 1} = \mp \frac{V_x \pm V_y}{\sqrt{w}}, \quad V_0 = V_z$$

Si dimostri che per rotazione le componenti di V si trasformano come quelle di un vettore ordinario.

==

Si dimostri che se una particella con spin 0 decade in due particelle identiche di spin 1/2, con una funzione d'onda la cui parte spaziale è simmetrica, queste devono per forza essere nello stato di singoletto. Si discuta poi il caso in cui le due particelle (sempre identiche con parte spaziale simmetrica) hanno spin 1.

==

Si consideri $SO(4)$, il gruppo delle rotazioni in 4 dimensioni. Esso ha come sottogruppo ovvio $SO(3)$ che nelle rappresentazione fondamentale possiamo identificare con le matrici a blocchi con un blocco 3×3 ed 1 nella posizione 44, del tipo

$$\begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

I generatori infinitesimi (antihermitiani) delle rotazioni di $SO(3)$ sono

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con regole di commutazione

$$[R_i, R_j] = -\epsilon_{ijk} R_k$$

Si trovino gli altri generatori infinitesimi (quanti sono?) e le regole di commutazione fra di loro e con le R.

==

Data la base $|n\rangle$ delle funzioni sulla retta data dalle autofunzioni dell'operatore numero, e l'operatore parità

$$P\Psi(x) = \Psi(-x)$$

si trovino i coefficenti dell'espansione

$$P = \sum_{mn} |n\rangle\, c_{nm}\, \langle n|$$

==

Data la base a simmetria cilindrica in tre dimensioni

$$\Psi_{klm} = e^{ikz} L_l(\rho) e^{im\varphi}$$

dove le L sono i polinomi di Lauguerre (base sulla semiretta), si trovino gli elementi di matrice dell'operatore parità.

==

Si calcoli il valor medio dell'operatore parità sullo stato (coerente)

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{z\hat{a}^\dagger}\, |0\rangle$$

Dove $\hat{a}$ e $|0\rangle$ si riferiscono all'oscillatore armonico in variabili adimensionali.

==

Data la base $|n, m\rangle$ delle funzioni sul piano data dalle autofunzioni comuni all'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico e al momento angolare, e l'operatore parità

$$P\Psi(x, y) = \Psi(-x, -y)$$

si trovino i coefficenti dell'espansione

$$P = \sum_{mnm'n'} |m, n\rangle\, c_{mnm'n'}\, \langle m'n'|$$

e si mostri l'operatore corrisponde ad una rotazione facendo vedere che l'espansione risulta essere la stessa per l'appropriato operatore di rotazione.

===

Si comparino i livelli energetici e le degenerazioni dei seguenti casi:

1. Un oscillatore armonico bidimensionale.
2. Due particelle (distinguibili) di massa uguale in un potenziale armonico.
3. Due particelle identiche di spin 0 in un potenziale armonico.
4. Due particelle identiche di spin 1/2 in un potenziale armonico.

===

Data la base $|lm\rangle$ delle funzioni sulla sfera (armoniche sferiche) si consideri l'operatore parità

$$P\Psi(\theta,\varphi) = \Psi(\pi-\theta,\varphi+\pi)$$

Si trovino i coefficienti dell'espansione

$$P = |lm\rangle c_{lml'm'}\langle l'm'|$$

===

$\star$ Si trovi una funzione continua (diversa dalla funzione nulla o dall'identità) che, moltiplicata tramite il prodotto di Moyal, sia uguale a se stessa $f\star f = f$. Suggerimento: Si può usare il fatto che, se per un operatore vale $A^2 = A$, allora $\Omega^{-1}(A)\star\Omega^{-1}(A) = \Omega^{-1}(A)$ con Ω^{-1} l'inverso della mappa di Weyl (mappa di Wigner).

Soluzione: Usiamo come operatore di proiezione la matrice densità corrispondente allo stato fondamentale dell'oscillatore armonico. Conviene considerare il piano p,q ed il piano delle trasformate di Fourier η,ξ come piani complessi definendo:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x+ip}{\sqrt{2}} \\ w &= \frac{\xi-i\eta}{\sqrt{2}} \\ \hat{a} &= \frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

da cui segue che

$$i(\xi\hat{p}+\eta\hat{q}) = \hat{a}^\dagger w - \hat{a}\bar{w}$$

Consideriamo quindi

$$A = |0\rangle\langle 0| = \int \frac{d\eta d\xi}{2\pi} e^{-i(\eta q+\xi p)} \mathrm{Tr} A e^{i(\eta\hat{q}+\xi\hat{p})}$$

applicando la mappa di Wigner

$$\begin{aligned}\Omega^{-1}(A) &= \int \frac{d\eta d\xi}{2\pi} e^{-i(\eta q+\xi p)} \mathrm{Tr} A e^{i(\eta\hat{q}+\xi\hat{p})} \\ &= \frac{dw d\bar{w}}{2\pi} e^{w\bar{z}-\bar{z}w} \langle 0| e^{-\bar{w}\hat{a}+w\hat{a}^\dagger} |0\rangle\end{aligned}$$

un semplice calcolo usando la formula di Campbell-Becker-Hausdorff mostra che

$$\begin{aligned}\Omega^{-1}(A) &= \int \frac{dw d\bar{w}}{2\pi} e^{w\bar{z}-\bar{z}w} e^{-|w|^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{p^2+q^2}{2}}}{2\pi}\end{aligned}$$

==

Questo è essenzialmente il problema 6.4 del Sakurai

The bosoni identici si trovano ai vertici di un triangolo equilatero, libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare passante per il centro. Trovare lo spettro del momento angolare.

==

Questo è essenzialmente il problema 6.5 del Sakurai

Si consideri un sistema composto da tre particelle identiche con spin 1. Si trovino i possibili stati di spin nei due casi in cui la parte spaziale della funzione d'onda è simmetrica per scambio di coppie di particelle, oppure antisimmetrica.

==

Data una particella libera costretta a muoversi su una retta, di cui si conosce con precisione arbitraria la posizione x_1 al tempo t_1, si calcoli la probabilità di trovarla nella posizione $x_2 = x_1 + \Delta x$ al tempo $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Suggerimento: Risolvere il problema della sovrapposizione di due gaussiane, e poi effettuare il limite per cui la larghezza delle gaussiane va a zero.

Soluzione: Se la particella si trova al tempo t_1 in un generico stato iniziale $\Psi_1(x)$, dopo un tempo Δt questo si sarà evoluto nello stato

$$\Psi_1(x, \Delta t) = \exp\left\{-i\frac{\hat{H}\Delta t}{\hbar}\right\}\Psi_1(x), \tag{12}$$

con $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$.

Se vogliamo conoscere la probabilitḥe effetuando una misura all'istante $t_1 + \Delta t$ si trovi la particella in uno stato $\Psi_2(x)$, dobbiamo calcolare l'ampiezza di probabilità

$$a_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2^*(x)\Psi_1(x, \Delta t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2^*(x)\exp\left\{-i\frac{\hat{H}\Delta t}{\hbar}\right\}\Psi_1(x)dx \tag{13}$$

La densità di probabilità che cerchiamo ne sarà il modulo quadro.

In trasformata di Fourier lo stato di Eq.(12) puó essere scritto come:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, \Delta t) &= \exp\left\{-i\frac{\hat{H}\Delta t}{\hbar}\right\}\Psi_1(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left\{-i\frac{p^2\Delta t}{2m\hbar} + i\frac{px}{\hbar}\right\}\tilde{\Psi}_1(p). \end{aligned}\tag{14}$$

Sostituendo Eq.(14) in Eq.(13) otteniamo

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp_1dp_2dx\tilde{\Psi}_2^*(p_1)\exp\left\{-i\frac{p_1^2\Delta t}{2m\hbar} + i\frac{(p_1-p_2)x}{\hbar}\right\}\tilde{\Psi}_1(p_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\tilde{\Psi}_2^*(p)\exp\left\{-i\frac{p^2\Delta t}{2m\hbar}\right\}\tilde{\Psi}_1(p). \end{aligned}\tag{15}$$

Nel caso in esame gli stati iniziale e finale sono delle δ di Dirac, che sono ottenibili da stati gaussiani nel limite in cui essi divengono infinitamente piccati. Scegliamo quindi le due Ψ essere due pacchetti gaussiani di larghezza ϵ piccati attorno ai punti x_1 e x_2, solo alla fine eseguiremo il limite $\epsilon \to 0$. Pertanto:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\ \exp\left\{-\frac{(x-x_1)^2}{2\epsilon}\right\}. \tag{16}$$

La sua trasformata di Fourier è

$$\tilde{\Psi}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{\epsilon p^2}{2\hbar^2} - i\frac{x_1 p}{\hbar}\right\}, \tag{17}$$

ed una formula analoga per Ψ_2.

Con questa forma delle Ψ l'integrale (15) si può agevolmente fare e risulta

$$\begin{aligned} a_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\pi\hbar} \exp\left\{-i\frac{p^2\Delta t}{2m\hbar} - \frac{\epsilon p^2}{\hbar^2} - i\frac{(x_1 - x_2)p}{\hbar}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\epsilon + i\frac{\hbar\Delta t}{2m}\right]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{4\left(\epsilon + i\frac{\hbar\Delta t}{2m}\right)}\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Facendo il limite per $\epsilon \to 0$ si trova

$$a_{12} = \sqrt{\frac{m}{\pi i\hbar\Delta t}} \exp\left\{\frac{im(\Delta x)^2}{2\Delta t}\right\}. \tag{19}$$

Da cui, la densità di probabilità è

$$|a_{12}|^2 = \frac{m}{\pi\hbar\Delta t}. \tag{20}$$

Notare che il risultato non dipende da Δx, la distanza fra i due punti presi in esame. Questo è dovuto al fatto che nella funzione d'onda di una particella localizzata sono presenti, con peso uguale, tutte le componenti di Fourier, cioé tutte le componenti del momento (che é assolutamente indeterminato). Pertanto indipendentemente dalla distanza ci sono comunque delle componenti del momento, e quindi della velocità, che consentono alla particella di essere rivelata dopo un tempo Δt. Ovviamente questo è dovuto anche al fatto che in meccanica quantistica nonrelativistica *non c'è una velocità limite.*

==

⋆ Discutere il gruppo di Lorentz in 1+1 dimensioni e trovare le relative matrici γ.

==

⋆ Trovare l'algebra di Lie del gruppo euclideo in 1+1 dimensioni, identificandolo come sottogruppo del gruppo di Lorentz, e trovare il suo gruppo di ricoprimento. Ripetere il problema nel caso di 2+1 dimensioni.

===

⋆ Trovare l'algebra di Lie del Gruppo di Lorentz in 2+1 dimensioni, identificandola come sottoalgebra del gruppo in 3+1 dimensioni.

===

⋆ Trovare l'algebra di Lie del gruppo di Galileo.

===

⋆Date le radici fondamentali di SU(3)

$$\alpha^1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$\alpha^2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

1. Si trovino i pesi fondamentali μ^1 e μ^2.
2. Si costruisca la rappresentazione di peso massimo $\mu^1 + \mu^2$.

===

⋆ Un fisico sperimentale delle alte energia afferma di aver trovate delle nuove particelle che formano parte di un multipletto di SU(3). Queste hanno Isospin ed ipercarica come segue:

T_3	Y
0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
1	0
0	1

Si trovino tutti gli altri stati del multipletto (o dei multipletti) e si riconoscano le rappresentazioni se possibile. Altrimenti indicare per quale motivo le particelle trovate non possono far parte di una rappresentazione di SU(3).

Soluzione: Dato che $H_1 = T_3, H_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e che gli angoli fra i pesi delle rappresentazioni di SU(3) devono essere multipli di 60 gradi si vede che i tre stati in questione non possono far parte di un multipletto

===

⋆ Praticamente tutti i problemi dei capitoli I-IX del Georgi